

Control de sincronización saturado para formaciones variantes en el tiempo de robots unicycle

Hugo Gutiérrez-Flores * América Morales-Díaz **
Flabio Mirelez-Delgado ***

* *CINVESTAV-Salttillo, Av. Metalúrgica, Ramos Arizpe, Coahuila, 25900 (e-mail: gufohu@gmail.com).*

** *CINVESTAV-Salttillo, Av. Metalúrgica, Ramos Arizpe, Coahuila, 25900 (e-mail: america.morales@cinvestav.edu.mx)*

*** *CINVESTAV-Salttillo, Av. Metalúrgica, Ramos Arizpe, Coahuila, 25900 (e-mail: flabiodariomirelezdelgado@gmail.com)*

Resumen: En este trabajo se propone una estrategia de control saturado para formaciones de robots unicycle con diferentes geometrías y capacidades de potencia. Estas formaciones pueden variar con el tiempo, tanto en forma como en número de elementos. La tarea cooperativa impuesta sobre los robots consiste en seguir una trayectoria deseada mientras mantienen una formación específica. Los robots pueden entrar o salir de la formaciones, adecuándose a los parámetros máximos de velocidad, conocidos a priori y permitidos dentro de la formación específica. La estabilidad del sistema de control a lazo cerrado es probada mediante el método directo de Lyapunov. Experimentos con 2 robots *i-robot Create* y 2 robots *turtle*, diseñados por los autores, son presentados para validar la ley de control propuesta.

Palabras clave: Sistemas multi-agente; Sincronización de sistemas; Control de sistemas no lineales

1. INTRODUCCIÓN

En años recientes, la coordinación de múltiples vehículos robóticos ha sido un área de intensa investigación. Diversas aplicaciones como los almacenes automatizados, las autopistas inteligentes, entre otras aplicaciones, han hecho que este campo de la robótica y el control automático tenga gran auge dentro de la comunidad científica. El problema de cooperación de múltiples robots ha sido estudiado mediante diferentes enfoques. Estos métodos son clasificados dentro de tres convencionales: Seguidor de líder, (Huang et al., 2006)-(Gustavi and Hu, 1998), basados en comportamiento, (Balch and Arkin, 1998), y estructuras virtuales, (Lewis and Tan, 1997).

Muchos de los algoritmos de coordinación de múltiples vehículos, como (Sun and Wang, 2007), considera solo robots de masa puntual con dinámica de simple o doble integrador, donde el robot se puede mover instantáneamente en cualquier dirección sobre el plano, en otras palabras, el robot es completamente actuado. Los robots unicycle son más complicados de controlar debido a su restricción cinemática inherente pero tienen la ventaja de simple construcción y bajo precio. Es por ello que este tipo de robots es tan popular y ha sido estudiado mediante diversas técnicas de control. Un enfoque de coordinación que utiliza robots heterogéneos es presentado en (Egerstedt and Hu, 2001) donde se propone un algoritmo independiente de la plataforma y utiliza la técnica de estructura virtual para definir la formación. La trayectoria del grupo debe respetar algunas restricciones cinemáticas y es basada en el enfoque de path-following.

La popular y reciente técnica de consenso puede ser usada para controlar un grupo de sistemas dinámicos, la cual es introducida en (Olfati-Saber and Murray, 2003) y (Olfati-Saber and Murray, 2004). Este enfoque se basa fuertemente en la teoría de grafos y matrices, casi en todos los casos considera sistemas lineales y hace uso de linealización de entrada-salida. Las coordenadas a las que llegan los robots dependen de las condiciones iniciales y de la conectividad que exista entre ellos. Además, no funciona correctamente para sistemas no lineales como el caso de un robot móvil diferencial.

Por su parte, el enfoque de sincronización ha sido usado para coordinar múltiples sistemas robóticos. Este tipo de control ofrece una ventaja única para la cooperación de múltiples robots, manteniendo una relación cinemática entre los miembros de un grupo. En (Sun and Mills, 2002) un control de sincronización es diseñado para coordinar un grupo de manipuladores mediante la incorporación de la tecnología de acoplamiento dentro de un controlador adaptativo. Por su parte, en (Chung and Slotine, 2009) un sistema de sincronización es diseñado para lograr que múltiples sistemas Lagrangianos, como es el caso de los manipuladores, sincronicen sus variables de estado mientras siguen una trayectoria deseada común. En (Liu and Chopra, 2012) un control de sincronización para manipuladores heterogéneos es diseñado tomando en consideración retardos variables en la comunicación e incertidumbres en el modelo dinámico. El problema de evasión de colisiones y coordinación para sistemas de unicycles es abordado en (Kostić et al., 2010), donde se propone un control de sincronización que utiliza funciones de satura-

ción para evitar que los robots de la formación colisionen entre sí en caso de presentarse una perturbación. En el presente trabajo, se propone un control de sincronización no lineal para robots tipo unicyclo que toma en cuenta la restricción no holónoma característica de este tipo de robots. El controlador puede ser aplicado a formaciones de robots unicyclo con diferentes características, como tamaño y potencia de los actuadores. Las formaciones son dinámicas, en otras palabras, el número de elementos y la conectividad entre ellos puede variar con el tiempo. Además, se introducen funciones de saturación dentro de la ley de control, de tal forma que se consideran las limitaciones físicas de los actuadores de cada robot dentro del controlador.

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera: En la Sección 1.1 se define el problema que se aborda en este trabajo y los preliminares matemáticos necesarios. En la Sección 2, se presenta el diseño del controlador y su correspondiente prueba de estabilidad. Para validar físicamente el controlador propuesto, en la Sección 3 se presentan resultados experimentales realizados con 4 robots unicyclos. Por último, las conclusiones del trabajo son presentadas en la Sección 4.

1.1 Definición del problema

El problema de coordinar un grupo de robots móviles se puede resolver básicamente manteniendo una relación cinemática en todo momento entre los robots. Un control de seguimiento puede lograr este objetivo en la ausencia de perturbaciones. Sin embargo, al inicio, cuando los robots no están en la trayectoria definida y en presencia de perturbaciones, un control simple de seguimiento es incapaz de mantener la relación cinemática requerida. Por lo tanto, para lograr el objetivo deseado, al inicio e inclusive cuando se presentan perturbaciones en uno o más robots, se propone un control de sincronización. Este controlador hace uso del acoplamiento cruzado, que consiste en incorporar términos con información de uno o más robots dentro de la misma formación. En nuestro caso, a estos términos los conocemos como errores de sincronización. Otro de los problemas atacados en este trabajo es la saturación de los actuadores. Cuando los errores son relativamente grandes, las señales de control pueden ser inalcanzables por las limitaciones físicas de potencia de los motores del robot. Debido a esto, el controlador debe tener en cuenta estas limitaciones físicas, con mayor razón si los robots utilizados dentro de la misma formación tiene diferentes actuadores y diferente geometría. El problema global atacado en este trabajo se puede definir como:

“Dado un grupo de robots unicyclo con diferentes características, deseamos que sincronicen sus movimientos para lograr mantenerlos en formaciones que siguen una trayectoria predefinida. En presencia de perturbaciones, los robots deben trabajar cooperativamente para recuperar su trayectoria y formación. Adicionalmente, los robots pueden salir y entrar de las formaciones, por lo cual el resto de la formación se debe ajustar a las condiciones de velocidad máxima que puede ser alcanzada por todos los miembros del grupo”.

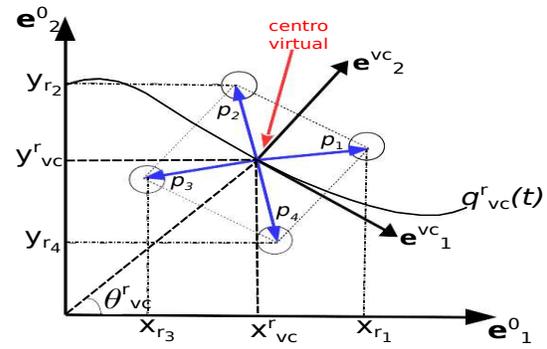


Fig. 1. Enfoque de estructura virtual.

El modelo matemático utilizado para desarrollar el controlador en este trabajo, es el ya conocido modelo cinemático de un robot unicyclo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= v_i \cos(\theta_i), \\ \dot{y}_i &= v_i \sin(\theta_i), \\ \dot{\theta}_i &= \omega_i. \end{aligned} \quad (1)$$

Donde $i = 1, \dots, n$ es el índice del robot, v_i y ω_i son las velocidades lineal y angular respectivamente para cada robot. x, y y θ son las variables de estado del robot en el plano Cartesiano. Para definir la posición relativa entre los robots de una formación, es usado el enfoque de estructura virtual, ver Fig. 1. En este enfoque, se define un punto en la estructura llamado centro virtual, este punto puede considerarse como un robot virtual adicional a la formación. Sobre este punto o robot virtual se impone la trayectoria deseada del grupo, definida mediante $q^r_{vc}(t) = [x^r_{vc}(t), y^r_{vc}(t), \theta^r_{vc}(t)]$. Esta trayectoria debe cumplir con la restricción no holonómica propia de un robot unicyclo, en este caso:

$$-\dot{x}^r_{vc}(t) \sin(\theta^r_{vc}(t)) + \dot{y}^r_{vc}(t) \cos(\theta^r_{vc}(t)) = 0. \quad (2)$$

A partir del centro virtual, se define un vector de posición para cada uno de los robots de la formación. Esto es, $p_i = [p_{xi}, p_{yi}]^T$. Estos vectores pueden variar con el tiempo modificando así la geometría de la formación. Por otra parte, estos vectores de posición están definidos en el plano de referencia del centro virtual e^{vc} . Por lo tanto, para obtener las trayectorias individuales de cada robot en el plano inercial e^0 , que por consecuencia también cumplen con la restricción no holonómica $-\dot{x}_{ri}(t) \sin(\theta_{ri}(t)) + \dot{y}_{ri}(t) \cos(\theta_{ri}(t)) = 0$, se usa una matriz de rotación alrededor del eje z:

$$x_{ri} = x^r_{vc} + p_{xi} \cos(\theta^r_{vc}) - p_{yi} \sin(\theta^r_{vc}), \quad (3)$$

$$y_{ri} = y^r_{vc} + p_{xi} \sin(\theta^r_{vc}) + p_{yi} \cos(\theta^r_{vc}). \quad (4)$$

Mediante el uso de la primera y segunda derivada de las ecuaciones anteriores, se calculan la orientación y las velocidades lineal y angular de referencia:

$$\theta_{ri}(t) = \arctan\left(\frac{\dot{y}_{ri}(t)}{\dot{x}_{ri}(t)}\right), \quad (5)$$

$$v_{ri}(t) = \sqrt{\dot{x}_{ri}^2(t) + \dot{y}_{ri}^2(t)}, \quad (6)$$

$$\omega_{ri}(t) = \frac{\dot{x}_{ri}(t)\ddot{y}_{ri}(t) - \dot{y}_{ri}(t)\ddot{x}_{ri}(t)}{\dot{x}_{ri}^2(t) + \dot{y}_{ri}^2(t)}. \quad (7)$$

Los errores de seguimiento Cartesianos son definidos

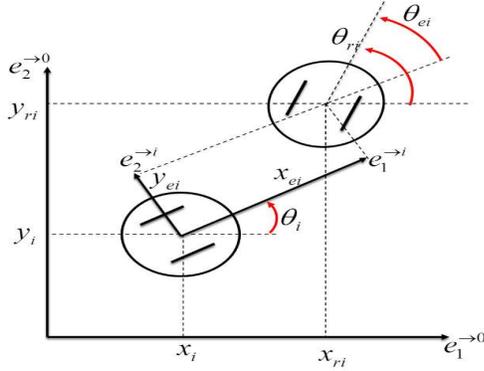


Fig. 2. Definición de errores de seguimiento.

usando el método utilizado primeramente en (Kanayama et al., 1990), ver Fig. 2. En donde los errores se definen como la diferencia entre la posición actual y la deseada de cada robot i , esto es:

$$\mathbf{e}_i(t) = \begin{bmatrix} e_{x_i} \\ e_{y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{ri} - x_i \\ y_{ri} - y_i \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$e_{\theta_i}(t) = \theta_{ri} - \theta_i. \quad (9)$$

En este trabajo, usamos los errores definidos en el plano local de cada robot debido a que esto ofrece algunas propiedades especiales para el diseño del controlador y su prueba de estabilidad a lazo cerrado, principalmente la emergencia de una matriz anti-simétrica la cual pre-multiplica al vector de estado.

$$e_{xy,i} = [e_{x_i}, e_{y_i}]^T = \mathbf{R}^T(\theta_i)\mathbf{e}_i, \quad (10)$$

donde \mathbf{R} es una matriz de rotación definida como:

$$\mathbf{R}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Por lo tanto, la dinámica del error para cada robot en su propio plano coordenado está dado por:

$$\dot{\mathbf{e}}_{xy,i} = -\omega_i \mathbf{S} \mathbf{e}_{xy,i} + \begin{bmatrix} v_{ri} \cos e_{\theta_i} - v_i \\ v_{ri} \sin e_{\theta_i} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\dot{e}_{\theta_i} = \omega_{ri} - \omega_i, \quad (13)$$

donde \mathbf{S} es la matriz anti-simétrica:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Un control individual de seguimiento puede llevar estos errores a cero, sin embargo para ofrecer robustez ante perturbaciones, los robots necesitan tener información de al menos otro robot dentro de la formación. Por esta razón, definimos los errores de acoplamiento como:

$$\epsilon_{i,j} = \begin{bmatrix} \epsilon_{x_{i,j}} \\ \epsilon_{y_{i,j}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{x_i}(t) - e_{x_j}(t) \\ e_{y_i}(t) - e_{y_j}(t) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Estos términos de acoplamiento permiten lograr la sincronización entre los robots. Por la misma razón para el caso de los errores de seguimiento, se consideran los errores de sincronización $\epsilon_{i,j}$ en par coordenado resultante de la rotación por un ángulo $\theta_i + \theta_j$ respecto al plano inercial, esto es:

$$\sigma_{i,j} = \mathbf{R}^T(\theta_i + \theta_j)\epsilon_{i,j}. \quad (16)$$

Para derivar la dinámica de los errores $\dot{\sigma}_{i,j}$, usamos las propiedades (17) de la matriz de rotación $\mathbf{R}(\theta_i)$ y la matriz anti-simétrica \mathbf{S} (Slotine and Li, 1991).

$$\mathbf{R}(-\theta_i) = \mathbf{R}^T(\theta_i) = \mathbf{R}^{-1}(\theta_i), \quad (17a)$$

$$\mathbf{R}(-\theta_i + \theta_j) = \mathbf{R}(\theta_i)\mathbf{R}(\theta_j), \quad (17b)$$

$$\dot{\mathbf{R}}(\theta_i(t)) = \frac{d}{dt}\mathbf{R}(\theta_i(t)) = \omega_i(t)\mathbf{S}\mathbf{R}(\theta_i(t)), \quad (17c)$$

$$\mathbf{S}^T = -\mathbf{S}, \quad (17d)$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \equiv 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (17e)$$

$$\mathbf{S}\mathbf{R}(\theta_i) = \mathbf{R}(\theta_i)\mathbf{S}. \quad (17f)$$

Por lo tanto, la dinámica del error de acoplamiento queda definida como:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{i,j} = & -(\omega_i + \omega_j)\mathbf{S}\sigma_{i,j} + \mathbf{R}^T(\theta_j) \begin{bmatrix} v_{ri} \cos e_{\theta_i} - v_i \\ v_{ri} \sin e_{\theta_i} \end{bmatrix} \\ & - \mathbf{R}^T(\theta_i) \begin{bmatrix} v_{rj} \cos e_{\theta_j} - v_j \\ v_{rj} \sin e_{\theta_j} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

Para lograr la limitación de las señales de control, usamos un conjunto de funciones de saturación en forma similar a (Jiang et al., 2001). El cual es una clase de funciones uniformemente continuas y acotadas $BF_{r,k}$ con parámetros $r, k \in \mathcal{R}^+$ que es definida como:

$$BF_{r,k} = \{\phi_r(kx) : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} \mid \phi_r(kx) \text{ es uniformemente continua y } -r \leq \phi_r(kx) \leq r \forall x \in \mathcal{R}\}. \quad (19)$$

Dentro de esta clase consideremos el conjunto $S_{r,k}$ de funciones impares:

$$S_{r,k} = \{\phi_r(kx) : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} \mid \phi_r(kx) \in BF_{r,k}, \phi_r(0) \equiv 0, x\phi_r(kx) > 0 \text{ para todo } x \neq 0, \phi_r(kx) + \phi_r(-kx) \equiv 0\}. \quad (20)$$

Como ejemplos de esta clase de funciones $S_{r,k}$ tenemos:

$$\phi_r(kx) = r \frac{kx}{1 + (kx)^2}, \quad (21)$$

$$\phi_r(kx) = r \tanh(kx). \quad (22)$$

2. DISEÑO DEL CONTROLADOR

El objetivo principal de los robots, en este trabajo, es seguir una trayectoria predefinida mientras mantienen una formación deseada y en ciertos instantes de tiempo uno o varios robots pueden dejar su formación para incorporarse a otra, manteniendo a su vez, la restricción física de las velocidades de cada robot:

$$v_i \leq v_{max,i}, \quad v_i \neq 0, \quad |\omega_i| \leq \omega_{max,i}, \quad (23)$$

donde $v_{max,i}$ y $\omega_{max,i}$ son las velocidades máximas del robot $i = 1, \dots, n$. Para lograr este objetivo, se propone un controlador de sincronización saturado utilizando las funciones de saturación de la clase $S_{r,k}$. Este controlador es desarrollado tomando en cuenta el modelo cinemático del unicycle y las dinámicas de error (12), (13) y (18). Por lo tanto, la ley de control propuesta queda establecida mediante las siguientes ecuaciones:

$$v_i(t) = v_{ri} \cos(e_{\theta_i}) + \phi_{\mathcal{K},i} \left(k_x e_{x_i} + c_x \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \epsilon_{x_{i,j}} \right), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \omega_i(t) = & \omega_{ri}(t) + \phi_{\mathcal{K},i}(k_{\theta} e_{\theta_i}(t)) \\ & + v_{ri}(t) \frac{\sin(e_{\theta_i}(t))}{e_{\theta_i}(t)} \frac{K}{\alpha_i} \left[k_y e_{y_i}(t) C_y \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \epsilon_{y_{i,j}} \right], \end{aligned} \quad (25)$$

donde

$$\alpha_i = \sqrt{K^2 + e_{x_i}^2 + e_{y_i}^2} + \beta_i, \quad (26)$$

$$\beta_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \epsilon_{x_{i,j}}^2 + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \epsilon_{y_{i,j}}^2, \quad (27)$$

los términos $\epsilon_{x_{i,j}}$ y $\epsilon_{y_{i,j}}$ son los errores de acoplamiento para los robots interconectados, k_x , k_y , k_θ y K son constantes positivas de seguimiento, C_x y C_y son constantes positivas de acoplamiento, mientras que, \mathcal{N}_i es el conjunto de los robots conectados con el robot i . Finalmente, $\phi_{\mathcal{K}_{x,i}}(\cdot)$ y $\phi_{\mathcal{K}_{\theta,i}}(\cdot)$ son funciones de saturación de la clase $S_{r,k}$ definidos en (23). Concretamente, utilizamos la función $\phi_r(kx) = r \tanh(kx)$. Aquí los parámetros $\mathcal{K}_{x,i}$ y $\mathcal{K}_{\theta,i}$ definen los rangos de las funciones de saturación y pueden variar con el tiempo dependiendo de las velocidades máximas del robot más lento dentro de la formación en cuestión. Por otro lado, cabe mencionar que no existe función de saturación para los errores correspondientes en el eje coordenado “y”, debido a que el término del controlador que contiene a estos errores ya está acotado y normalizado.

Por medio de los errores de acoplamiento, el controlador para el robot i tiene información de uno o más de sus vecinos. Estos errores de acoplamiento indican que tan bien se mantiene la formación. Cuando una perturbación ocurre, el robot afectado transmite esta información al resto del grupo, la forma en que se transmite esta información depende de la topología de red de comunicación, entonces todos los robots trabajan juntos para mantener su formación y recuperar la trayectoria deseada. La estabilidad y convergencia del sistema a lazo cerrado es probada mediante la técnica de Lyapunov y se establece en el siguiente teorema:

Teorema 1. Considere el sistema (1) con las entradas de control (24)-(25) donde el conjunto \mathcal{N}_i puede variar dependiendo de la conectividad de los robots. Considere que los parámetros de las funciones de saturación satisfacen:

$$\mathcal{K}_{x,i} \leq v_{max,i} - v_{ri}, \quad (28)$$

$$\mathcal{K}_{\theta,i} + k_y v_{r,i} \leq \omega_{max,i} - |\omega_{r,i}|. \quad (29)$$

Considere además las siguientes restricciones para $i = 1, \dots, n$:

- Todas las ganancias de control son positivas.
- La trayectoria de referencia satisface la restricción no holonómica (2).
- Para las velocidades máximas $v_{max,i}$, $\omega_{max,i} \in \mathcal{R}^+$, se satisface $|v_{r,i}| < v_{max,i}$ y $|\omega_{r,i}| < \omega_{max,i}$.

Entonces el origen del sistema a lazo cerrado (12)-(13) con las entradas de control (24)-(25) es globalmente asintóticamente estable para todo $i = 1, \dots, n$. Adicionalmente, los errores de seguimiento y de acoplamiento convergen globalmente asintóticamente a cero. Mientras que las restricciones físicas de velocidad (23) son respetadas.

Prueba: Considere la siguiente función candidata de Lyapunov, la cual es positiva definida y radialmente no acotada.

$$V = \sum_{i=1}^n \left[\frac{Kk_y}{2} \sqrt{K^2 + e_{x_{y_i}}^T e_{x_{y_i}} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \sigma_{ij}^T \sigma_{ij}} + \frac{1}{2} e_{\theta_i}^2 \right]. \quad (30)$$

Diferenciando esta función respecto al tiempo y tomando en cuenta (25)-(27), obtenemos:

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{Kk_y}{\alpha} \left(e_{x_{y_i}}^T \dot{e}_{x_{y_i}} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \sigma_{ij}^T \dot{\sigma}_{ij} \right) + e_{\theta_i} \dot{e}_{\theta_i} \right]. \quad (31)$$

Reemplazando la dinámica del error (12) en la ecuación de arriba y usando las propiedades (17) de la matriz anti-simétrica, resulta:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{Kk_y}{\alpha} e_{x_{y_i}}^T \left(-\omega_i S e_{x_{y_i}} + \begin{bmatrix} v_{ri} \cos(e_{\theta_i}) - v_i \\ v_{ri} \sin(e_{\theta_i}) \end{bmatrix} \right) \right. \\ &\quad + \frac{Kk_y}{\alpha} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \sigma_{ij}^T \left(-(\omega_i + \omega_j) S \sigma_{ij} + R^T(\theta_j) \begin{bmatrix} v_{ri} \cos(e_{\theta_i}) - v_i \\ v_{ri} \sin(e_{\theta_i}) \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. \left. - R^T(\theta_i) \begin{bmatrix} v_{rj} \cos(e_{\theta_j}) - v_j \\ v_{rj} \sin(e_{\theta_j}) \end{bmatrix} \right) + e_{\theta_i} (\omega_{ri} - \omega_i) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{Kk_y}{\alpha} \left(e_{x_{y_i}}^T + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \sigma_{ij}^T R^T(\theta_j) \right) \begin{bmatrix} v_{ri} \cos(e_{\theta_i}) - v_i \\ v_{ri} \sin(e_{\theta_i}) \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + e_{\theta_i} (\omega_{ri} - \omega_i) \right\}. \quad (32) \end{aligned}$$

Ahora reemplazando el controlador (24)-(25) en (32):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{Kk_y}{\alpha} \left(e_{x_{y_i}}^T + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \sigma_{ij}^T R^T(\theta_j) \right) \right. \\ &\quad \left[\phi_{\mathcal{K}_{x,i}} \left(\begin{bmatrix} -k_x e_{x_i} - C_x \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\epsilon_{x_{i,j}}) \\ v_{ri} \sin(e_{\theta_i}) \end{bmatrix} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. - e_{\theta_i} \left[k_\theta e_{\theta_i} + v_{ri} \frac{\sin(e_{\theta_i})}{e_{\theta_i}} \frac{K}{\alpha} \left(k_y e_{y_i} + C_y \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \epsilon_{y_{i,j}} \right) \right] \right] \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{Kk_y}{\alpha} \left[\phi_{\mathcal{K}_{x,i}} \left(-(k_x + N_i k_x + N_i C_x) e_{x_i}^2 + (k_x + C_x) e_{x_i} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (e_{x_j}) - \left(C_x \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \epsilon_{x_{i,j}} \right)^2 \right) - \phi_{\mathcal{K}_{\theta,i}} \left(k_\theta e_{\theta_i}^2 \right) \right] \right\} \leq 0, \quad (33) \end{aligned}$$

donde $N_i = \dim(\mathcal{N}_i)$ es la cantidad de robots conectados con el robot i . De la ecuación de arriba, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \left| (2k_x + C_x) e_{x_i}^2 \right| \leq \left| (k_x + C_x) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (e_{x_j}) \right| \right\}, \quad (34)$$

esto es soportado por la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Por lo tanto, la derivada respecto al tiempo de la función de Lyapunov es negativa semidefinida y con esto probamos que el sistema de control a lazo cerrado es estable. Ahora queda probar que el sistema converge global y asintóticamente a cero. De (33) tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_0^\infty dV(t) \geq \int_0^\infty \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{Kk_y}{\alpha} \left[\phi_{\mathcal{K}_{x,i}} \left(-(k_x + N_i k_x + N_i C_x) e_{x_i}^2 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + (k_x + C_x) e_{x_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (e_{x_j}) - \left(C_x \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \epsilon_{x_{i,j}} \right)^2 + \phi_{\mathcal{K}_{\theta,i}} \left(-k_\theta e_{\theta_i}^2 \right) \right] \right\} \quad (35) \end{aligned}$$

Dado que V está acotada por abajo por cero, implica que las integrales del lado derecho de la ecuación (35) existen y son finitas. Lo anterior significa que los términos de la ecuación (33) deben ser uniformemente continuos a lo largo del tiempo sobre $t \in [0, \infty)$. Por medio del lemma de Barbalat, (Khalil, 1996), obtenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{Kk_y}{\alpha} \left[\phi_{\mathcal{K}_{x,i}} \left(-(k_x + N_i k_x + N_i C_x) e_{x_i}^2 + (k_x + C_x) e_{x_i} \cdot \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (e_{x_j}) - \left(C_x \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \epsilon_{x_{i,j}} \right)^2 \right) + \phi_{\mathcal{K}_{\theta,i}} \left(-k_{\theta} e_{\theta_i}^2 \right) \right] \right\} = 0, \quad (36)$$

implicando:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [|e_{x_i}(t)| + |e_{\theta_i}(t)|] = 0, \forall i = 1, \dots, n. \quad (37)$$

De la dinámica a lazo cerrado para e_{θ_i} tenemos:

$$\dot{e}_{\theta_i} = -v_{r_i}(t) \frac{\sin(e_{\theta_i}(t))}{e_{\theta_i}(t)} \frac{K}{\alpha_i} \left[k_y e_{y_i}(t) + C_y \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \epsilon_{y_{i,j}} \right] - k_{\theta} e_{\theta_i}(t). \quad (38)$$

De (37) $e_{\theta_i}(t) = 0$ y de (38) tenemos que:

$$\lim_{e_{\theta_i} \rightarrow 0} \dot{e}_{\theta_i} = -v_{r_i} \frac{K}{\alpha_i} \left[k_y e_{y_i}(t) + C_y \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \epsilon_{y_{i,j}} \right] = 0. \quad (39)$$

Entonces, la única solución de (39) implica que $e_{y_i}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty \forall i = 1, \dots, n$. Por lo tanto, podemos concluir que el origen del sistema (12)-(13) con las entradas de control (24)-(25) es globalmente asintóticamente estable. Consecuentemente, los errores de acoplamiento, $\epsilon_{i,j} \rightarrow 0 \forall i, j = 1, \dots, n$ con $i \neq j$, implicando también, la dinámica del error (18) converge globalmente asintóticamente a cero. La selección de los parámetros de las funciones de saturación de acuerdo a (28)-(29) asegura que las entradas de control satisfacen las condiciones (23).

3. EXPERIMENTOS

Para validar la ley de control propuesta, en esta sección se presentan resultados experimentales. Éstos fueron obtenidos utilizando una plataforma que consta de una cámara CCD montada en techo, Fig. 3, la cual captura imágenes a razón de 30 cuadros por segundo. Mediante un algoritmo de reconocimiento de patrones se detecta la posición y orientación absolutas de marcas de color negro montadas sobre los robots: 2 *i-robots Create* y 2 *turtle*, Fig. 4. El controlador para cada robot es calculado en una PC, donde se ejecuta paralelamente el algoritmo de visión, emulando una arquitectura descentralizada. Posteriormente las señales de control v_i y ω_i traducidas a velocidad de cada rueda son enviadas, mediante comunicación Bluetooth, a cada uno de los robots. La topología de comunicación es,

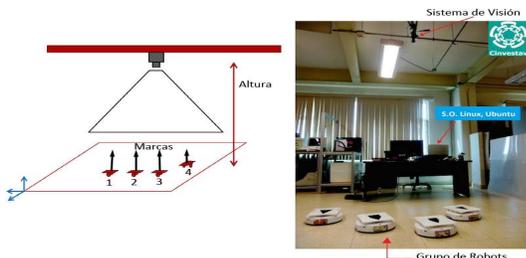


Fig. 3. Plataforma experimental.

para este caso, en forma de anillo unidireccional, aunque por obvias razones, cuando la formación tiene solo dos elementos, la comunicación se vuelve bidireccional.

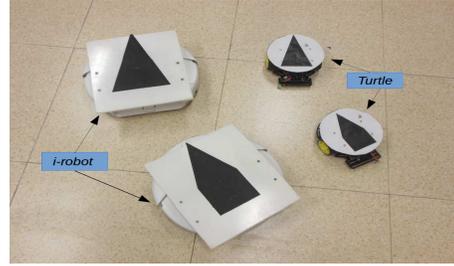


Fig. 4. Dos i-robots Create y dos turtle robots.

$k_{x,1-2}$	3	$c_{x,1-2}$	3	$\mathcal{K}_{x,1-2}$	0.33
$k_{y,1-2}$	40	$c_{y,1-2}$	40		
$k_{\theta,1-2}$	2			$\mathcal{K}_{\theta,1-2}$	2.3
$k_{x,3-4}$	1.7	$c_{x,3-4}$	1.7	$\mathcal{K}_{x,3-4}$	0.47
$k_{y,3-4}$	30	$c_{y,3-4}$	30		
$k_{\theta,3-4}$	5			$\mathcal{K}_{\theta,3-4}$	0.3

Tabla 1. Ganancias de control

3.1 Resultados experimentales

Las ganancias usadas para estos experimentos se muestran en la Tabla 1. Note que las ganancias de seguimiento y de acoplamiento son definidas iguales para este caso en particular. Las constantes $\mathcal{K}_{x,i}$ y $\mathcal{K}_{\theta,i}$ son elegidas de tal manera que cumplan con las restricciones (28) y (29); con $v_{max,1-2} = 0,4m/s$, $v_{max,3-4} = 0,6m/s$, $\omega_{max,1-2} = 5,3rad/s$, $\omega_{max,3-4} = 4,4rad/s$, $v_{r,1-2} = 0,07m/s$, $v_{r,3-4} = 0,13m/s$, $\omega_{r,1-4} = 0,2rad/s$. El experimento consiste en tener dos formaciones que siguen trayectorias circulares concéntricas. Transcurrido la tercera parte del tiempo del experimento (20 seg.), un robot de la formación de afuera (robot 4) dejará a su grupo e ingresará a la formación de adentro. Posteriormente, cuando el tiempo supere las dos terceras partes (40 seg.) del tiempo total del experimento, un robot de la formación de adentro (robot 1) se unirá a la formación de afuera.

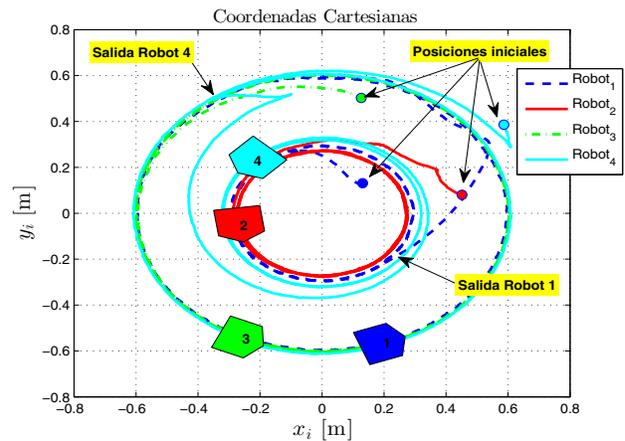


Fig. 5. Trayectorias en el plano x-y.

En la Fig. 5 se muestran las trayectorias desarrolladas por los robots en el plano durante el experimento, donde se puede apreciar la entrada y la salida de los robots 1 y 4 de y hacia las formaciones correspondientes. Al inicio y en el cambio de formación del robot 4 se puede observar una trayectoria abrupta, en realidad el robot retrocede para

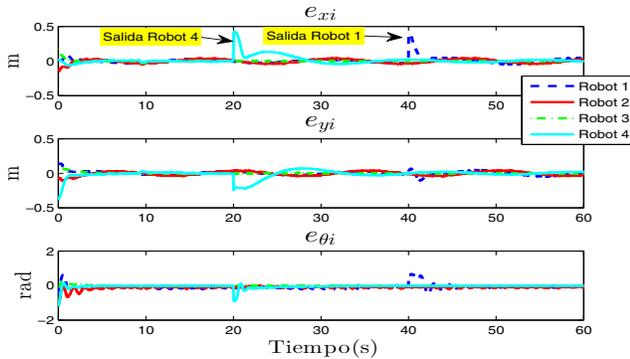


Fig. 6. Errores de seguimiento de los 4 robots.

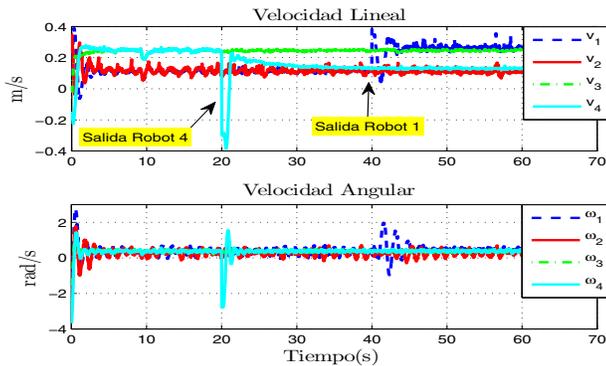


Fig. 7. Señales de control.

llegar a su nueva posición deseada, ya que en el instante en que decidimos que cambie de formación, se encuentra por delante de la posición que deberá ocupar. Por su parte, en la Fig. 6 se muestran los errores de seguimiento de los 4 robots donde podemos observar la convergencia de éstos con pequeñas oscilaciones alrededor del origen, esto es debido a la sintonización de las ganancias y a irregularidades en la iluminación del sistema de visión. Por último, en la Fig. 7 podemos apreciar las velocidades lineales y angulares calculadas por el algoritmo de control y enviadas a los robots traducidas a velocidades de rueda, las cuales están por debajo de los límites máximos, respetando así las restricciones físicas de velocidad de cada robot.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo, hemos demostrado que el controlador de sincronización propuesto ofrece robustez ante perturbaciones en la coordinación de robots no holónomos diferenciales. Estos robots pueden tener diferentes tamaños, geometrías y capacidades de potencia en los actuadores, mientras se sigan modelando matemáticamente por las ecuaciones del unicyclo. Lo que implica que pueden tener diferentes velocidades lineales y angulares máximas y aún así lograr sincronizar sus movimientos para lograr una tarea definida en forma cooperativa. Gracias a las funciones de saturación utilizadas, las velocidades máximas de cada robot se respetan en todo momento. Como trabajo futuro queda el incluir un algoritmo de evasión de colisiones para evitar posibles choques entre los robots cuando cambian de formación o cuando se recuperan de una perturbación.

REFERENCIAS

- T. Balch and R. Arkin. Behavior-based formation control for multi-robot systems. *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 14, pp. 926-939, 1998.
- J. Huang, S.M. Farritor, A. Quadi and S. Goddard. Localization and follow-the-leader control for a heterogeneous group of mobile robots. *IEEE/ASME trans. Mechatronics*, vol. 11, no. 2, pp. 205-215, 2006.
- T. Gustavi and X. Hu. Observer-Based Leader-Following Formation Control Using Onboard Sensor Information. *IEEE Trans. on Rob.*, vol. 24, no. 6, 2008.
- M.A. Lewis and K.H. Tan. High precision formation control of mobile robots using virtual structures. *Autonomous robots*, vol. 4 pp. 387-403, 1997.
- R. Olfati-Saber and R.M. Murray. Consensus protocols for networks of dynamics agents. *Proc. American Control Conf*, pp. 951-956, 2003.
- R. Olfati-Saber and R.M. Murray. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Tran. on Aut. control*, vol. 49, no. 9, pp. 1520-1533, 2004.
- D. Sun and C. Wang. Controlling Swarms of mobile robots for Switching between Formations Using Synchronization Concept. *IEEE Int. Conf. on Rob. and Aut.*, Rome, Italy, 2007.
- J-J E. Slotine, W. Li. Applied nonlinear control. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 07632, 1991.
- H. Khalil. Nonlinear Systems. Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1996.
- Z. Lin, B. Francis, and M. Maggiore. Necessary and Sufficient Graphical Conditions for Formation Control of Unicycles. *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, vol. 50, no. 1, 2005.
- A. Widoyatriatmo, K-S Hong. Navigation Function-Based Control of Multiple Wheeled Vehicles. *IEEE Trans on Ind. Elec.*, vol. 58, no. 5, 2011.
- M. Egerstedt and X. Hu. Formation Constrained Multi-Agent Control. *IEEE Int. Conf. on Rob. and Aut.*, vol. 17, no. 6, 2001.
- D. Sun and J. K. Mills. Adaptive Synchronized Control for Coordination of Multirobot Assembly Tasks. *IEEE Int. Conf. on Rob. and Aut.*, vol. 18, no. 4, 2002.
- S-J Chung and J-J E. Slotine. Cooperative Robot Control and Concurrent Synchronization of Lagrangian Systems. *IEEE Trans. on Rob.*, vol. 25, no. 3, 2009.
- Y-C Liu and N. Chopra. Controlled Synchronization of Heterogeneous Robotic Manipulators in the Task Space. *IEEE Trans. on Rob.*, vol. 28, no. 1, 2012.
- Y. Kanayama; Y. Kimura; F. Miyazaki; T. Noguchi. A Stable Tracking Control Method for an Autonomous Mobile Robot. *IEEE Int. Conf. on Rob. and Aut.*, 1990.
- T. Sugar, J. P. Desai, V. Kumar and J. P. Ostrowski. A Stable Tracking Control Method for an Autonomous Mobile Robot. *IEEE Int. Conf. on Rob. and Aut.*, Seoul, Korea, 2011.
- Z.-P. Jiang, E. Lefeber, H. Nijmeijer. Saturated Stabilization and Tracking of a Nonholonomic Mobile Robot. *Systems & Control Letters*, vol. 42, pp. 327-332, 2001.
- D. Kostić, S. Adinandra, J. Caarls, H. Nijmeijer. Collision-free Motion Coordination of Unicycle Multi-agent Systems. *American Control Conf.*, pp 3186-3191, Baltimore, MD, USA, 2010.