Formación de agentes: una aplicación al patrullaje

Martínez-Clark R.*, **Cruz-Hernández C.***, **Reyes-De la Cruz D.**,* **Arellano-Delgado A.***, **Pinedo-Lomelí L.F.****

* *Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE), México. (e-mails: rigomar@cicese.edu.mx, ccruz@cicese.mx, jreyes@cicese.edu.mx, aarellan@cicese.mx).*
** *Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño, Universidad Autónoma de Baja California (UABC), México. (e-mail: luis.pinedo@uabc.edu.mx)*

Resumen: Los sistemas complejos exhiben comportamientos interesantes, los cuales suponen grandes ventajas tanto para los elementos que lo conforman como al grupo en general. Estos comportamientos son adoptados y aprovechados en los sistemas ingenieriles para maximizar las capacidades y el ahorro de energía. En este trabajo, se presentan mejoras de un controlador para la formación de agentes reportado en la literatura. Para tal efecto, se utilizan agentes representados por masas puntuales con movimiento en dos dimensiones. El controlador tiene como objetivo lograr formaciones predefinidas por el usuario, utilizando una estrategia de control distribuido y en este caso, se hace énfasis en la evasión de colisiones entre los agentes del grupo. Por último, se presenta una aplicación de patrullaje para validar la eficacia del controlador.

Palabras Clave: Sistemas complejos, agentes, formación, patrullaje, control.

1. INTRODUCCIÓN

Por *formación* en un grupo de agentes, se entiende a la distancia que guardan entre sí dichos agentes, con el propósito de alcanzar ciertas configuraciones predefinidas, ver Stanoev y Smilkov (2013). Éstas pueden ser fijas o variantes en tiempo. Esta estrategia de control ha tomado fuerza en años recientes, pues cada vez son más las tareas que pueden realizarse mediante un grupo de agentes, en especial, se pueden mencionar: vigilancia y exploración, mapeo, construcción y transportación en grupo, formación de satélites para comunicación, formación de aviones de guerra, etc. ver Kelly et al. (2004), Yamaguchi et al. (2001). Es común encontrar en la literatura controladores para formación de agentes diseñados desde una perspectiva distribuida (i.e., cada robot cuenta con su propio controlador) tal es el caso de Yamaguchi et al. (2001), esta estrategia distribuida permite estudiar a los grupos controlados desde la perspectiva de los sistemas complejos, pues el intercambio de información entre los agentes permite que cada uno de ellos afecte a la formación del grupo, vista como un todo. Para entender mejor a lo que se refiere con sistemas complejos, se expone la diferencia entre el estudio convencional de los sistemas por parte del reduccionismo y el estudio de los sistemas bajo la óptica de la ciencia de la complejidad.

La ciencia convencional se apoya en la filosofía del reduccionismo para explicar los diferentes fenómenos de la naturaleza, esto es, busca reducir los sistemas hasta los elementos más básicos que lo constituyen, pues supone que, estudiando a fondo las partes que conforman dicho fenómeno, éste puede ser descrito completamente. Esta forma de analizar a los sistemas se puede reducir en la siguiente frase, *el todo no es nada más que la suma de sus partes*. La mencionada teoría es muy útil para describir sistemas pequeños o simples, en los que los elementos que lo conforman no se encuentran relacionados entre sí; pero cuando se presentan interacciones entre los mismos es difícil describir el comportamiento del sistema completo basado en el comportamiento propio de sus componentes, ya que dichas interacciones permiten que *el todo sea más que la suma de sus partes*, pues, por medio del intercambio de información entre los individuos: se forman estructuras, se generan variedades, se produce *complejidad*, etc., en fin, la composición final o el "todo" presenta comportamientos más ricos que los que suceden en cada uno de los individuos, ver por ejemplo Auyang (1999).

No existe una defición precisa (o universalmente aceptada) de *sistema complejo*, pero en el presente trabajo, se utilizará el término para describir sistemas formados por varios componentes, cuyo comportamiento es *emergente*, esto es, que el comportamiento del sistema no puede ser inferido solamente por el comportamiento de sus componentes, ver Bar-Yam (1997). Como ejemplos se pueden citar al cerebro humano, los ecosistemas, internet, entre otros, ver Wang (2002). Así pues, se analizará la formación como una propiedad emergente de un sistema formado por

⋆ Agradecemos al CONACYT, por el apoyo económico brindado a través del proyecto de Grupos de Investigación en Ciencia Básica, Ref. 166654.

un grupo de agentes, donde entendemos a las *propiedades emergentes* como los efectos a gran escala (i.e., que afectan al grupo completo) producidos por las interacciones locales entre los agentes, ver Axelrod (1997).

El contenido de este trabajo se estructura como sigue: primeramente se muestra el controlador propuesto en Martínez-Clark et al. (2014) y Martínez-Clark (2014) con el que se desea alcanzar la formación de los agentes, pasando después al estudio de la convergencia del grupo así como algunas modificaciones propuestas para evitar colisiones entre los agentes. Un ejemplo ilustrativo es presentado para validar la propuesta así como una aplicación de la formación en patrullaje de áreas. Finalmente se menciona el trabajo futuro y las conclusiones derivadas de este trabajo.

2. FORMACIÓN DE REDES DE AGENTES

Es común encontrar en la literatura controladores distribuidos (i.e., cada robot cuenta con su propio controlador) para la formación de agentes, tal es el caso de Yamaguchi et al. (2001) y Qu et al. (2007), en los cuales se presentan casos de formación para agentes robóticos. En este trabajo, se utiliza una ley de control propuesta en Martínez-Clark et al. (2014) y Martínez-Clark (2014) para formar una red homogénea de N sistemas dinámicos *sin restricciones de movimiento* y con componentes de dimensión independientes entre sí, cada una de las cuales es representada por un modelo matemático de la forma

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i^x = f\left(\boldsymbol{x}_i\right) + \boldsymbol{u}_i \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados correspondientes al movimiento en el eje x (representado por el superíndice) del $i-$ésimo robot y $\boldsymbol{u}_i = (u_{i1} \quad 0 \quad ... \quad 0) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de entradas de control. En este caso, se propone el uso de un controlador que actúa únicamente sobre la *primer variable de estado* de cada agente (variable asociada generalmente a la posición del mismo), el cual, para el $j-$ésimo agente, tiene la siguiente estructura,

$$u_{j1} = \sum_{i=1}^{N} c_{ij} a_{ij} x_{i1} + \delta_{ij}\left(a_{ij} x_{i1} + \Delta_{ij}\right), \tag{2}$$

donde c_{ij} es la *fuerza de acoplamiento* entre los agentes i y j, a_{ij} es un elemento de la matriz de acoplamiento $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ (para profundizar en su estudio ver: Wu (1996), Berge (2001), Wang (2002), Posadas-Castillo (2008), Stanoev y Smilkov (2013) y Martínez-Clark et al. (2014)), Δ_{ij} es la *distancia deseada* entre los agentes i y j, y δ_{ij} es el coeficiente de repulsión, el cual puede tomar los siguientes valores

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & si \quad |x_{i1} - x_{j1}| > \Delta_{ij}, \\ \delta, & si \quad |x_{i1} - x_{j1}| \leq \Delta_{ij} \end{cases} \tag{3}$$

con $\delta \in \mathbb{R}^+$. La idea es que el controlador se comporte de la siguiente manera, la primer parte, trata de igualar los estados del robot j a los del robot i cuando están suficientemente alejados entre sí (i.e., llevarlos a una posición común), cuando la diferencia entre el primer estado es más pequeña que la distancia deseada entre ellos, el coeficiente de repulsión actúa para lograr la separación deseada Δ_{ij}.

2.1 Convergencia

A continuación se presentan las condiciones necesarias para que el controlador sea eficaz. Considerando los modelos de los N agentes aislados

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_1 &= \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1), \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 &= \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}_2), \\ &\vdots \\ \dot{\boldsymbol{x}}_N &= \boldsymbol{f}_N(\boldsymbol{x}_N), \end{aligned} \tag{4}$$

en donde $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{f}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Al acoplar a los robots entre sí con una topología en específico y utilizando el controlador (2) para alcanzar la formación, se tiene que la ecuación del robot j-ésimo presenta la siguiente forma,

$$\begin{cases} \dot{x}_{j1} = f_{j1}(\boldsymbol{x}_j) + \sum_{i=1}^{N} c_{ij} a_{ij} x_{i1} + \delta_{ij}\left(a_{ij} x_{i1} + \Delta_{ij}\right), \\ \dot{x}_{j2} = f_{j2}(\boldsymbol{x}_j), \\ \quad \vdots \\ \dot{x}_{jn} = f_{jn}(\boldsymbol{x}_j), \end{cases} \tag{5}$$

Ahora, se define el conjunto $\mathcal{J}$, el cual contiene a los robots acoplados al robot j-ésimo, de tal forma que,

$$x_i \in \mathcal{J} \quad |a_{ij} \neq 0\,, \qquad i = 1, 2, ..., N \tag{6}$$

por tanto, es posible reescribir (5) de la siguiente manera,

$$\begin{cases} \dot{x}_{j1} = f_{j1}(\boldsymbol{x}_j) + \sum_{i \in \mathcal{J}} c_{ij}(x_{i1} - x_{j1}) + \delta_{ij}\left(x_{i1} - x_{j1} + \Delta_{ij}\right), \\ \dot{x}_{j2} = f_{j2}(\boldsymbol{x}_j), \\ \quad \vdots \\ \dot{x}_{jn} = f_{jn}(\boldsymbol{x}_j), \end{cases} \tag{7}$$

Para encontrar el punto de equilibrio de la trayectoria del agente, es necesario igualar a cero el lado izquierdo de (7), la convergencia de la posición (*i.e.*, el estado estacionario de x_{j1}) está dada por,

$$\begin{aligned} 0 = f_{j1}(\boldsymbol{x}_j) &+ \sum_{i \in \mathcal{J}} \left[c_{ij} x_{i1} + \delta_{ij}\left(x_{i1} + \Delta_{ij}\right)\right] \\ &- |\mathcal{J}|\, x_{j1} \left(\sum_{i \in \mathcal{J}} c_{ij} + \delta_{ij}\right), \end{aligned} \tag{8}$$

en donde $|\mathcal{J}|$ es el cardinal (*i.e.*, número de elementos) del conjunto $\mathcal{J}$. Resolviendo para x_{j1} se tiene,

$$x_{j1} = \frac{f_{j1}(\boldsymbol{x}_j) + \sum_{i \in \mathcal{J}} c_{ij} x_{i1} + \sum_{i \in \mathcal{J}} \delta_{ij}\left(x_{i1} + \Delta_{ij}\right)}{|\mathcal{J}| \left(\sum_{i \in \mathcal{J}} c_{ij} + \delta_{ij}\right)}, \tag{9}$$

Suponiendo que es posible seleccionar el valor de $\delta \gg 1$, $\delta \gg \max(c_{ij})$ y en general $\delta \gg |\mathcal{J}|$, la posición del robot j-ésimo tiende a

$$x_{j1} = \sum_{i \in \mathcal{J}} (x_{i1} + \Delta_{ij}), \tag{10}$$

Lo cual concuerda con la definición de formación presentada, pues, cada agente tiende a la posición de los demás agentes de la red que se encuentran acoplados a él más una distancia seleccionada anteriormente. De (9) y (10) se puede establecer que, mediante la *selección apropiada del coeficiente de repulsión*, es posible alcanzar las distancias deseadas entre los agentes de la red para lograr una formación específica.

2.2 Evasión de colisiones

El controlador propuesto en (2) es suficiente para lograr el objetivo de control de un grupo de agentes en una topología en específico, sin embargo, éstos sólo obtienen información de los miembros del grupo que tienen acoplamiento con ellos, mientras que no tienen conocimiento de la existencia de algún otro agente en el grupo. Esta situación puede desencadenar que los agentes colisionen mientras busquen formase según el acoplamiento dado. Debido a esto, es necesario tomar en cuenta esta situación para que los robots puedan desenvolverse en un área de trabajo común. Con tal motivo, se propone la siguiente modificación al controlador (2),

$$u_{1j} = \sum_{i=1}^{N} c_{ij} a_{ij} x_{i1} + \delta_{ij} a_{ij} x_{i1} + \Delta_{ij}) - r_{ij}\, sign\,(x_{i1} - x_{j1}), \tag{11}$$

en donde r_{ij} es el coeficiente anticolisiones, el cual puede tomar los siguientes valores,

$$r_{ij} = \begin{cases} 0, & si \quad \left\| \overrightarrow{l}_{ij} \right\| > m, \\ r, & si \quad \left\| \overrightarrow{l}_{ij} \right\| < m, \end{cases} \tag{12}$$

$m > 0$ es el umbral de colisión, el cual se ajusta según las dimensiones de los robots y la distancia que se desee como protección anticolisiones (ver figura 1), y $\left\| \overrightarrow{l}_{ij} \right\|$ es la norma euclidiana del vector formado por las posiciones (primer estado) de cada agente por eje, esto es

$$\overrightarrow{l}_{ij} = \begin{bmatrix} x_{i1}^x - x_{j1}^x \\ x_{i1}^y - x_{j1}^y \\ x_{i1}^z - x_{j1}^z \end{bmatrix} \tag{13}$$

y $sign(\cdot)$ es la función signo, que para efectos de este trabajo se utiliza la definición dada en Kwakernaak et al. (1991),

$$sign(u) = \begin{cases} 1 & si \quad u > 0, \\ 0 & si \quad u = 0, \\ -1 & si \quad u < 0, \end{cases} \qquad u \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

En general, la sección anticolisiones de (11) es nula, solamente es activada en pequeños periodos de tiempo para lograr la repulsión entre los agentes. De tal modo, el análisis de convergencia dado anteriormente se sostiene.

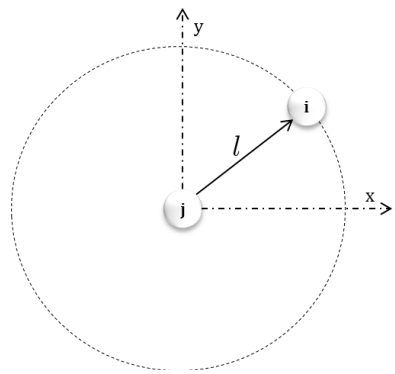

Figura 1. Descripción gráfica del vector l para robots que se desenvuelven en $\mathbb{R}^2$.

2.3 Formación de grupos de agentes en varias topologías

A continuación, se presenta un caso para la formación de grupos de agentes. En esta ocasión se seleccionó una red de tres agentes en topología de estrella, con acoplamiento unidireccional. Como se mencionó, se consideran agentes sin restricciones holonómicas y con componentes independientes en dos dimensiones, en donde el movimiento en cada dimensión se rige por el modelo matemático normalizado de una masa puntual desacoplada (i.e. sin entrada de control), presentado en Qu et al. (2007). Por tanto, el i-ésimo agente es descrito por,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1}^x &= x_{i2}^x, \\ \dot{x}_{i2}^x &= -x_{i1}^x - 2x_{i2}^x, \\ \dot{x}_{i1}^y &= x_{i2}^y, \\ \dot{x}_{i2}^y &= -x_{i1}^y - 2x_{i2}^y, \end{aligned} \tag{15}$$

En este modelo el estado x_{i1} representa la *posición del agente*, mientras el estado x_{i2} representa su *velocidad*, además, el superíndice representa la dimensión en la que se desenvuelve el agente (eje x o eje y). Para todos los casos aquí presentados se considera un umbral de colisión $m = 0.1$, una fuerza de acoplamiento $c = 1$, un coeficiente de repulsión $\delta = 100$ y un coeficiente anticolisiones $r = 1000$. El objetivo de esta sección es comprobar numéricamente si el controlador propuesto es capaz de mantener la formación de los robots bajo diferentes circunstancias, por tanto, se incluyen trayectorias variantes en el tiempo a la dinámica de algún agente para simular una perturbación; esta situación permite observar la capacidad del control para adaptarse ante cambios repentinos en la dinámica de los mismos, ya que esta cualidad será explotada en un futuro para aplicar esta técnica de formación en casos de patrullaje o búsqueda y rescate. Ésta perturbación añadida al estado x_{11}^x del agente maestro, tiene una trayectoria sinusoidal de la forma $v = sen(2t)$, resultando en el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{11}^x &= x_{12}^x + sen(2t), \\ \dot{x}_{12}^x &= -x_{11}^x - 2x_{12}^x, \\ \dot{x}_{11}^y &= x_{12}^y, \\ \dot{x}_{12}^y &= -x_{11}^y - 2x_{12}^y, \end{aligned} \tag{16}$$

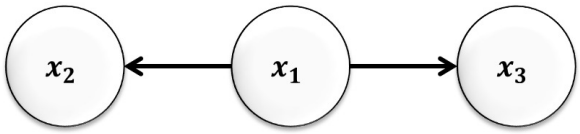

Figura 2. Red de tres agentes acoplados unidireccionalmente en topología estrella.

Red en topología estrella. Para este caso y con *acoplamiento unidireccional* (figura 2) se tiene la siguiente matriz de acomplamiento $\boldsymbol{A}_{estrella}$

$$\boldsymbol{A}_{estrella} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

siguiendo las pautas del controlador (11), se obtienen las ecuaciones dinámicas respectivas a los agentes controlados. Las cuales no son reproducidas aquí por cuestiones de espacio. En esta ocasión el término variante en tiempo v es añanido a la dinámica de la posición en el eje X del primer agente (i.e., x_{11}^x), para actuar como una perturbación, por tanto, las oscilaciones sinusoidales presentes en las trayectorias de los agentes se manifiestan de forma horizontal. Para la simulación de este caso, se seleccionan las siguientes distancias entre los robots: $\Delta_{12}^x = 2, \Delta_{12}^y = -2$, $\Delta_{13}^x = -2$ y $\Delta_{13}^y = 2$, con las cuales se desea obtener una formación en línea recta, con pendiente de -1. Las condiciones iniciales, propuestas arbitrariamente son: $\boldsymbol{x}_1^x = (4,0)^T, \boldsymbol{x}_1^y = (1,0)^T, \boldsymbol{x}_2^x = (-10,0)^T, \boldsymbol{x}_2^y = (5,0)^T, \boldsymbol{x}_3^x = (10,0)^T, \boldsymbol{x}_3^y = (-5,0)^T$. En la figura 3 (a) se observan las posiciones iniciales de los robots, mientas que en la figura 3 (b) se presenta la formación final deseada.

En la figura 4 se presenta la trayectoria descrita por cada uno de los agentes, desde su posición inicial hasta llegar a la posición final. Nótese la trayectoria sinusoidal descrita horizontalmente por cada agente.

3. APLICACIÓN AL PATRULLAJE

El patrullaje se define como "la actividad de ir alrededor o a través de un área en intervalos regulares con propósitos de seguridad" Portugal y Rocha (2011). El uso de grupos de agentes autónomos para desempeñar esta tarea se ha convertido en un área contemporánea de estudio, con trabajos relevantes en las últimas décadas, (ver por ejemplo, Portugal y Rocha (2013), Guo y Qu (2004) y Basilico et al. (2009)) ya que, el auge de la tecnología permite tener agentes cada vez más eficientes, lo que permite diseñar estrategias de patrullaje más efectivas Portugal y Rocha (2010). A continuación se presenta una aplicación en *patrullaje de áreas* del control para formación de grupos de agentes propuesto en este trabajo.

Se propone el uso de una *red de tres agentes acoplados unidireccionalmente en topología cadena* como la que se muestra en la figura 5, en este caso el agente x_1 es considerado un maestro, por tanto, la estrategia de patrullaje afectará directamente la dinámica de x_1. Los agentes, descritos

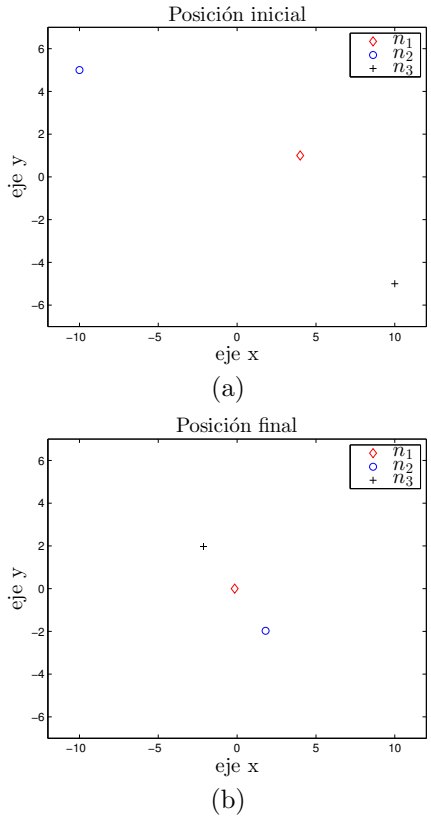

Figura 3. Simulación de una red de agentes en topología estrella con acoplamiento unidireccional, (a) las posiciones iniciales y (b) las posiciones deseadas al alcanzar la formación.

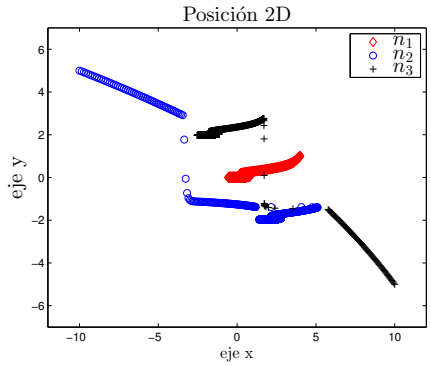

Figura 4. Trayectorias descritas en el plano por los tres agentes al momento de buscar la formación propuesta para la simulación.

por el modelo de masa puntual utilizado anteriormente, patrullarán un área rectangular de 7×5 unidades de longuitud, mientras exhiben una *formación tipo delta.*

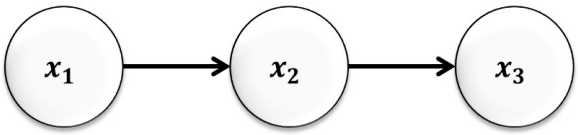

Figura 5. Red de tres agentes acoplados unidireccionalmente con topología de cadena. En este caso el agente x_1 cumple la función de maestro.

3.1 Diseño del controlador para la formación

Para lograr la formación del grupo de agentes, primeramente se obtiene la matriz de acoplamiento correspondiente a la situación, que en este caso es,

$$A_{cc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Por tanto, siguiendo el procedimiento para formación descrito anteriormente, las ecuaciones dinámicas de los agentes son generadas. En este caso, el agente x_1, que actúa como robot maestro del grupo, es gobernado por el lazo de control compuesto por v_x y v_y con el fin de lograr el patrullaje. Finalmente, mediante los coeficientes de separación $\Delta_{12}^x = 2, \Delta_{12}^y = -2, \Delta_{23}^x = -4$ y $\Delta_{23}^y = 0$ se logra una formación tipo delta, tal como se aprecia en la figura 6.

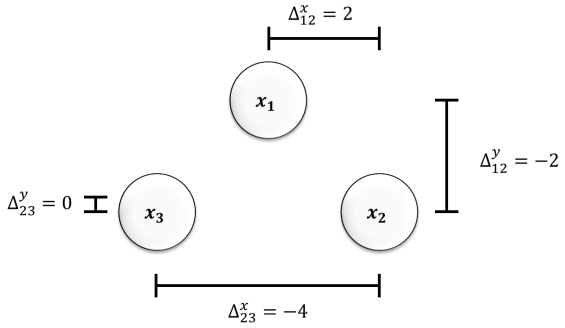

Figura 6. Tres agentes en la formación tipo delta utilizada para el ejemplo de patrullaje.

3.2 Diseño del control para patrullaje

Como una aplicación del control para formación de agentes, se plantea el patrullaje del perímetro de una área rectangular, comenzando desde posiciones iniciales arbitrarias, un grupo de agentes debe alcanzar una formación tipo delta para recorrer el área seleccionada. Para lograr este cometido, se diseñan las leyes de control necesarias para recorrer dicha trayectoria. En este caso se optó por utilizar un control secuencial, dividido en 4 secciones, donde cada una representa el movimiento sobre los 4 lados del rectángulo. Para realizar los cambios entre las secciones del control, se utilizan los vértices de un cuadrado de 3 unidades de longitud por lado sobre el que se desplaza el robot maestro. Esta situación se muestra en la figura 7.

Mediante un control de regulación secuencial dado por $v_x = k_p(x_d^x - x_{11}^x)$ y $v_y = k_p(x_d^y - x_{11}^y)$ con $(x_d^x, x_d^y) = [A, B, C, D]$, el agente maestro x_1 es capaz de recorrer el perímetro del cuadrado de 3 unidades de arista. Mediante simulaciones numéricas y considerando las condiciones iniciales de los agentes como $\boldsymbol{x}_1^x = (4,0)^T$, $\boldsymbol{x}_1^y = (1,0)^T$, $\boldsymbol{x}_2^x = (-5,0)^T$, $\boldsymbol{x}_2^y = (5,0)^T$, $\boldsymbol{x}_3^x = (2,0)^T$, $\boldsymbol{x}_3^y = (-3,0)^T$, también se selecciona el coeficiente de acoplamiento $c = 20$, la ganancia del controlador de patrullaje $k_p = 12$, el coeficiente de repulsión $\delta = 100$, el coeficiente anticolisiones $r = 1000$ y el umbral $\phi = 0.1$. En la figura 8 se muestran las posiciones iniciales de los agentes para este caso. El perímetro a patrullar esta delimitado por la línea sólida mientras que

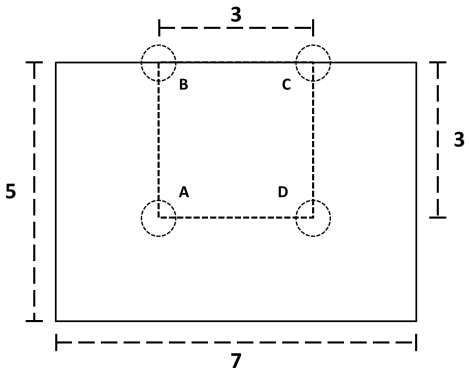

Figura 7. Área a patrullar en la aplicación propuesta. El cuadrado interior de 3 unidades es la referencia de movimiento del agente maestro.

la línea punteada marca la trayectoria seleccionada para el recorrido del agente maestro x_1.

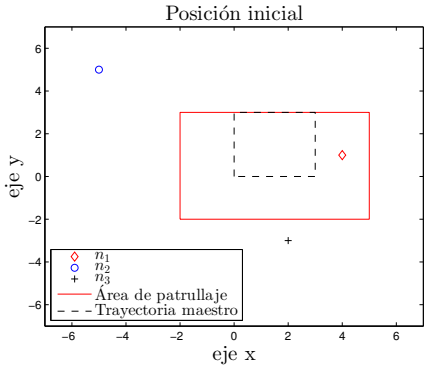

Figura 8. Posiciones iniciales de los agentes correspondientes a $t = 0$ para la simulación numérica.

En la figura 9 se muestra la posición del grupo de agentes en diferentes tiempos. Durante la simulación, es posible apreciar el desplazamiento del grupo y el área cubierta durante el patrullaje.

4. CONCLUSIONES

Se presentó una estrategia de control distribuido que permite lograr la formación de un grupo homogéneo de agentes, este controlador se basa en la transmisión de la posición actual de los agentes siguiendo la topología de conexión que existe entre ellos. Una de las caracteŕsticas principales del controlador es la evasión de colisiones entre los distintos agentes de la red. Para lograr este objetivo de formación, es necesario seleccionar adecuadamente el coeficiente de repulsión con el fin de disminuir el efecto de la dinámica propia del agente as como para evitar formaciones físicamente imposibles de realizar. Cabe destacar que la estrategia utilizada en este trabajo fue formar cada uno de los ejes de desplazamiento por separado, es por ello que se tendrán tantas leyes de control como ejes de movimiento estén disponibles. Se presentaron simulaciones numéricas para validar la eficacia del controlador en diferentes escenarios, entre los cuales, se incluye la adición de una trayectoria variante en tiempo para alguno de los agentes. Por último, se propuso una aplicación

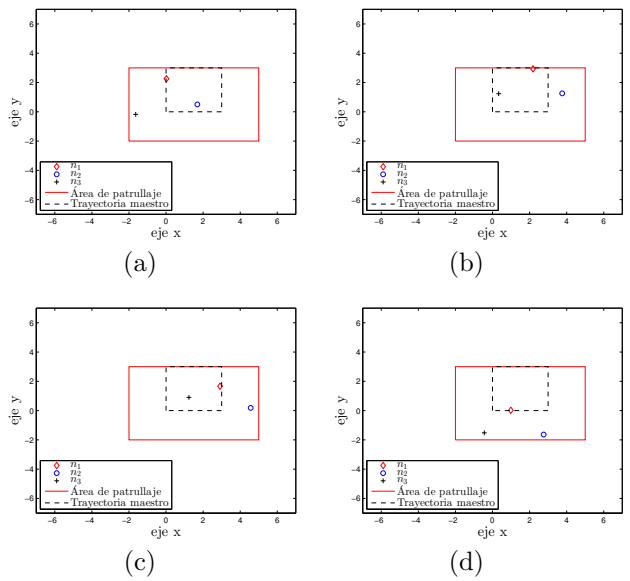

Figura 9. Recorrido del grupo de agentes en formación para patrullaje. Posiciones del grupo en (a) las 0.39 unidades de tiempo, (b) 0.70 unidades de tiempo, (c) correspondiente a 0.95 unidades de tiempo y (d) a las 1.20 unidades de tiempo.

en patrullaje para validar la eficacia del controlador. A continuación se mencionan algunas de las actividades a realizar posteriormente:

- Realizar evasión de obstáculos en el terreno.
- Analizar detalladamente el efecto de la topología de conexión en grupos numerosos de agentes.
- Validar el controlador con diferentes modelos de agentes.
- Aplicar la formación para otras tareas tales como el transporte de materiales, búsqueda, etc..

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al CONACYT, por el apoyo económico brindado a través del proyecto de Grupos de Investigación en Ciencia Básica, Ref. 166654.

REFERENCIAS

Auyang, S. (1999). *Foundations of complex-system theories: In Economics, Evolution-ary Biology, and Statistical Physics*. Cambridge University Press.

Axelrod, R. (1997). *The Complexity of Cooperation: Agent-Based Models of Competition and Collaboration*, volume 1. Princeton University Press.

Bar-Yam, Y. (1997). *Dynamics of complex systems*. Addison-Wesley.

Basilico, N., Gatti, N., y Amigoni, F. (2009). Leader-follower strategies for robotic patrolling in environments with arbitrary topologies. In *Proceedings of the 8th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS)*, volume 1, 57–64.

Berge, C. (2001). *The theory of graphs*. Dover.

Guo, Y.G.Y. y Qu, Z.Q.Z. (2004). Coverage control for a mobile robot patrolling a dynamic and uncertain environment. *Fifth World Congress on Intelligent Control and Automation (IEEE Cat. No.04EX788)*, 6(1), 1–5.

Kelly, R., Carelli, R., Zannatha, J.I., y Monroy, C. (2004). control de una pandilla de robots móviles para el seguimiento de una constelación de puntos objetivo. In *VI Congreso Mexicano de Robótica*, 83–89.

Kwakernaak, H., Sivan, R., y Strijbos, R. (1991). *Modern Signals and Systems*. Prentice Hall.

Martínez-Clark, R. (2014). *Control de comportamientos colectivos en grupos de robots móviles*. Tesis de maestría, Centro de Investigacion Científica y de Educación Superior de Ensenada.

Martínez-Clark, R., Cruz-Hernández, C., Reyes-De la Cruz, D., y Pinedo-Lomelí, L.F. (2014). Diseño de un controlador para la formación de grupos de robots móviles. In *XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático, CLCA 2014*, 6–11. Cancún, Quintana Roo, México.

Portugal, D. y Rocha, R. (2010). MSP Algorithm : Multi-Robot Patrolling based on Territory Allocation using Balanced Graph Partitioning. *ACM Symposium on Applied Computing*, 1271–1276.

Portugal, D. y Rocha, R. (2011). A survey on multi-robot patrolling algorithms. *IFIP Advances in Information and Communication Technology*, 349 AICT, 139–146.

Portugal, D. y Rocha, R.P. (2013). Multi-robot patrolling algorithms: examining performance and scalability. *Advanced Robotics*, 27(5), 325–336.

Posadas-Castillo, C. (2008). *Sincronización de sistemas complejos*. Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Baja California.

Qu, Z., Wang, J., y Hull, R.a. (2007). Leaderless cooperative formation control of autonomous mobile robots under limited communication range constraints. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 588, 79–104.

Stanoev, A. y Smilkov, D. (2013). Consensus theory in networked systems. In L. Kocarev (ed.), *Understanding Complex Systems*, 1–22. Springer Berlin Heidelberg.

Wang, X.F. (2002). Complex Networks: Topology, Dynamics and Synchronization. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(05), 885–916.

Wu, C.W. (1996). On a conjecture regarding the synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 43(2), 161–165.

Yamaguchi, H., Arai, T., y Beni, G. (2001). A distributed control scheme for multiple robotic vehicles to make group formations. *Robotics and Autonomous Systems*, 36(4), 125–147.