Conexiones Globales en una Clase de Sistemas Lineales por Pedazos

Juan Castillo * **Fernando Verduzco** ** **Ricardo Femat** ***

* *Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México. (correo-e: juanc@mat.uson.mx).*
** *Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México. (correo-e: verduzco@mat.uson.mx).*
*** *División de Matemáticas Aplicadas, IPICyT, San Luis Potosí, México. (correo-e: rfemat@ipicyt.edu.mx.)*

Resumen: En este trabajo mostramos familias de sistemas lineales discontinuos por pedazos, las cuales presentan conexiones heteroclínicas y homoclínicas. Estas familias se obtienen aprovechando una forma normal para el caso en que los sistemas presenten un punto de doble-tangencia.

Palabras clave: Forma normal, conexiones globales, doble-tangencia.

1. INTRODUCCIÓN

La ocurrencia de órbitas heteroclínicas y homoclínicas ha sido un tema ampliamente abordado en el estudio de sistemas dinámicos en las últimas décadas, ver (Guckenheimer et al. (1993)). Sin embargo, existen pocos métodos analíticos para demostrar la existencia de tales conexiones globales. Ahora bien, se sabe que la linealidad por pedazos parece ser suficiente para crear comportamientos propios de los sistemas continuos no lineales, tal es el caso de las conexiones globales. De hecho, en (Carmona et al. (2008) y Carmona et al. (2010)) se dan demostraciones analíticas sobre la existencia de conexiones globales en un sistema lineal por pedazos continuo (SLPPC), sin embargo, la gran mayoría de la literatura existente sobre conexiones globales es mediante métodos numéricos y casi siempre considerando sistemas por pedazos continuos (SPPC's).
En este trabajo mostramos familias de sistemas lineales por pedazos discontinuos (SLPPD's), los cuales presentan conexiones globales. Estas familas se encuentran de forma púramente geométrica, aprovechando una forma normal para SLPPD's que se caracterizan por presentar un punto de doble-tangencia. La existencia de puntos de doble-tangencia está estrechamente ligada a la ocurrencia de movimiento deslizante en la superficie de conmutación, ver (Colombo et al. (2010), Colombo et al. (2012), di Bernardo et al. (2008), Filippov (1988), Jeffrey et al. (2009), y Kuznetsov et al. (2003)).
El resto del trabajo se organiza como sigue. En la sección 2 definimos los conceptos matemáticos a utilizar. En la sección 3 establecemos el problema a resolver. En la sección 4, obtenemos una forma normal para SLPPD's con un único punto de doble-tangencia. En la sección 6, mostramos familias de sistemas SLPPD's con conexiones heteroclínicas y homoclínicas. Finalmente, en la sección 6 se dan las conclusiones del trabajo.

2. PRELIMINARES

Considere el sistema suave por pedazos

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & \text{si } x \in D_1, \\ F_2(x), & \text{si } x \in D_2, \end{cases} \tag{1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$,

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) < 0\},$$
$$D_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) > 0\},$$

con $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funciones suaves.
Sea $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) = 0\}$ la superficie de conmutación. El sistema suave por pedazos (1) es continuo si $F_1 = F_2$ para todo punto de Σ, por el contrario, el sistema es discontinuo (Filippov) si dos vectores diferentes F_1 y F_2 se pueden asociar a un punto de Σ. Para el caso en que el sistema sea discontinuo, es posible definir una región de deslizamiento en Σ.

Definición 1. La región de deslizamiento de Σ está dada por la porción de $H(x)$ para la cual

$$(\nabla H(x)F_1(x))\,(\nabla H(x)F_2(x)) \leq 0. \tag{2}$$

Esto es, $\nabla H(x)F_1(x)$ (la componente de $F_1(x)$ normal a $H(x)$) tiene el signo opuesto a $\nabla H(x)F_2(x)$.

Podemos distinguir dos tipos de regiones que satisfacen (2),
La región de deslizamiento:
$\Sigma_s = \{x \in \Sigma : \nabla H(x)F_1(x) > 0 \text{ y } \nabla H(x)F_2(x) < 0\}$,
y la región de escape:
$\Sigma_e = \{x \in \Sigma : \nabla H(x)F_1(x) < 0 \text{ y } \nabla H(x)F_2(x) > 0\}$.

Observación 1. Observe que en la región de escape no se pueden seguir las soluciones, es decir, en esta región hay movimiento deslizante repulsivo.

Definimos la región de cruce Σ_c como el complemento de $\Sigma_s \cup \Sigma_e$ en Σ, es decir,

$$\Sigma_c = \{x \in \Sigma : (\nabla H(x)F_1(x))\,(\nabla H(x)F_2(x)) > 0\}.$$

Reserva de Derechos No. EN TRÁMITE, ISSN. EN TRÁMITE

Las soluciones en $\Sigma_s \cup \Sigma_e$ se pueden construir con el método de Filippov, el cual toma la combinación convexa $F_s(x)$ de los dos campos $F_i(x)$ para cada punto $x \in \Sigma_s \cup \Sigma_e$:

$$F_s(x) = (1-\gamma(x))F_1(x) + \gamma(x)F_2(x), \tag{3}$$

donde la función $\gamma(x)$ está definida como

$$\gamma(x) = \frac{\nabla H(x)F_1(x)}{\nabla H(x)(F_1(x) - F_2(x))} \in [0,1] \quad \forall \ x \in \Sigma_s \cup \Sigma_e.$$

Si $\gamma(x) = 0$, entonces el flujo estará determinado sólo por F_1, el cual deberá ser tangente a Σ en tales puntos. De manera similar, $\gamma(x) = 1$ representa una tangencia del flujo de F_2 con Σ. De aquí, podemos definir las regiones de deslizamiento (escape) como

$$\Sigma_{s(e)} = \{x \in \Sigma : 0 \leq \gamma(x) \leq 1\},$$

y las fronteras de la región de deslizamiento (escape) son

$$\partial\Sigma_{s(e)+} = \{x \in \Sigma_{s(e)} : \gamma(x) = 1\},$$
$$\partial\Sigma_{s(e)-} = \{x \in \Sigma_{s(e)} : \gamma(x) = 0\},$$

con tangencia de cualquiera de los dos campos, ocurriendo en los dos tipos de frontera.

Definición 2. Decimos que un punto $\tilde{x}$ es un pseudo-equilibrio de (1) si éste es un equilibrio del campo vectorial deslizante, es decir, si $F_s(\tilde{x}) = 0$. El pseudo-equilibrio es admisible si $0 < \gamma < 1$, ó virtual si $\gamma < 0$ ó $\gamma > 1$.

Definición 3. Un punto $\hat{x}$ se denomina un equilibrio frontera de (1) si

$$F_1(\hat{x})F_2(\hat{x}) = 0, \ \text{ y } \ F_s(\hat{x}) = 0.$$

Note que un equilibrio frontera siempre se encuentra en la frontera de la región de deslizamiento, donde uno de los campos vectoriales se anula.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere el siguiente SLPPD

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x) = A_1x + b_1, & \text{si } \ n^Tx < n^Tq_0, \\ F_2(x) = A_2x + b_2, & \text{si } \ n^Tx > n^Tq_0, \end{cases} \tag{4}$$

donde $x, b_1, b_2, q_0, n \in \mathbb{R}^3$, y $A_1, A_2 \in R^{3\times 3}$. La superficie de conmutación es el plano definido como

$$\Sigma = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : n^T(x - q_0) = 0\right\}.$$

Sean las superficies

$$\Pi_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : n^T(A_1x + b_1) = 0, \ \text{ y } \ n^Tx \leq n^Tq_0\right\},$$
$$\Pi_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : n^T(A_2x + b_2) = 0, \ \text{ y } \ n^Tx \geq n^Tq_0\right\}.$$

La característica de las superficies Π_1 y Π_2 es que están conformadas por puntos en los cuales los flujos de los campos $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son paralelos al plano Σ. De esta manera, la existencia de la región de deslizamiento en Σ dependerá de la orientación de los vectores normales de Π_1 y Π_2 con respecto a Σ, y si es el caso de que exista dicha región, ésta tendrá como fronteras a las rectas

$$L_1 = \left\{x \in \Sigma : n^T(A_1x + b_1) = 0\right\} = \Sigma \cap \pi_1$$
$$L_2 = \left\{x \in \Sigma : n^T(A_2x + b_2) = 0\right\} = \Sigma \cap \pi_2$$

Estas rectas pueden a su vez intersectarse en un punto x_0, el cual será aquel punto donde ambos campos $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son tangentes a Σ. Esto es, el punto x_0 es un punto de doble tangencia (PDT); ver (Colombo et al. (2010), Colombo et al. (2012) y Jeffrey et al. (2009)).
Así, si consideramos el sistema

$$Tx = b \tag{5}$$

donde $T = \begin{pmatrix} n^T \\ n^TA_1 \\ n^TA_2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ y $b = \begin{pmatrix} n^Tq_0 \\ -n^Tb_1 \\ -n^Tb_2 \end{pmatrix}_{3\times 1}$,
de acuerdo al Teorema de Rouché-Frobenius para $n = 3$, el sistema (5) puede presentar las siguientes situaciones

a) $Ran(T) = Ran(T^*) = 3 \iff$ Único PDT
b) $Ran(T) = Ran(T^*) < 3 \iff$ Infinidad de PDT's
c) $Ran(T) \neq Ran(T^*) \iff$ Ningún PDT

donde T^* es la matriz ampliada de T.
Consideremos el primer caso. En esta situación el plano Σ siempre quedará dividido en los tres tipos de regiones alrededor del PDT (ver Figura 1),
Región de deslizamiento:
$\Sigma_s = \left\{x \in \Sigma : n^T(A_1x + b_1) > 0 \ \text{ y } \ n^T(A_2x + b_2) < 0\right\}$,
Región de escape:
$\Sigma_e = \left\{x \in \Sigma : n^T(A_1x + b_1) < 0 \ \text{ y } \ n^T(A_2x + b_2) > 0\right\}$,
Región de cruce:
$\Sigma_c = \left\{x \in \Sigma : n^T(A_1x + b_1)n^T(A_2x + b_2) > 0\right\}$.
Nuestro objetivo es, primero encontrar una forma normal para el sistema (4) satisfaciendo la condición $|T| \neq 0$ y después encontrar familias que presenten conexiones globales alrededor del PDT x_0.

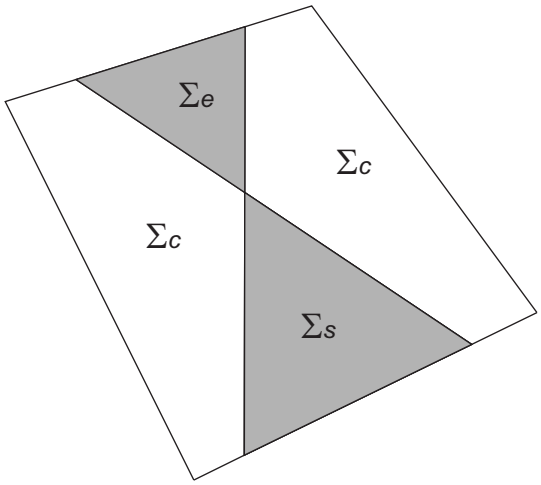

Figura 1. Regiones alrededor del PDT x_0.

4. FORMA NORMAL

En esta sección presentamos el cambio de coordenadas reportado en (Castillo et al. (2014)), para transformar al sistema (4) en una forma normal y así realizar un análisis más sencillo. De hecho, se utiliza la matriz T, ya que es invertible en este caso.

Lema 1. El cambio de coordenadas

$$y = T(x - x_0),$$

donde $T = \begin{pmatrix} n^T \\ n^T A_1 \\ n^T A_2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$, transforma el sistema (4) en

$$\dot{y} = \begin{cases} f_1(y) = \mathcal{A}_1 y + \tilde{b}_1, & \text{si } y_1 < 0, \\ f_2(y) = \mathcal{A}_2 y + \tilde{b}_2, & \text{si } y_1 > 0, \end{cases} \tag{6}$$

donde $\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \end{pmatrix}$, $\tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix}$, y $\tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{22} \\ b_{23} \end{pmatrix}$.

Observe que al aplicar el cambio de coordenadas a las superficies Π_i, obtenemos las nuevas superficies

$$\pi_1 = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_2 = 0, \text{ y } y_1 \leq 0\},$$
$$\pi_2 = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_3 = 0, \text{ y } y_1 \geq 0\}.$$

Así, en el sistema normalizado se identifican fácilmente las regiones de deslizamiento, escape y cruce.

$$\begin{aligned} \Sigma_s &= \{y \in \Sigma : y_2 > 0 \text{ y } y_3 < 0\}, \\ \Sigma_e &= \{y \in \Sigma : y_2 < 0 \text{ y } y_3 > 0\}, \\ \Sigma_c &= \{y \in \Sigma : y_2 y_3 > 0\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Las fronteras de la región de deslizamiento son las rectas

$$l_1 = \Sigma \cap \pi_1 \text{ y } l_2 = \Sigma \cap \pi_2,$$

y el PDT es el origen. En la figura 2 podemos ver como el flujo de cada lado golpea(Σ_s), jala(Σ_e) ó cruza(Σ_c) el plano de conmutación Σ.

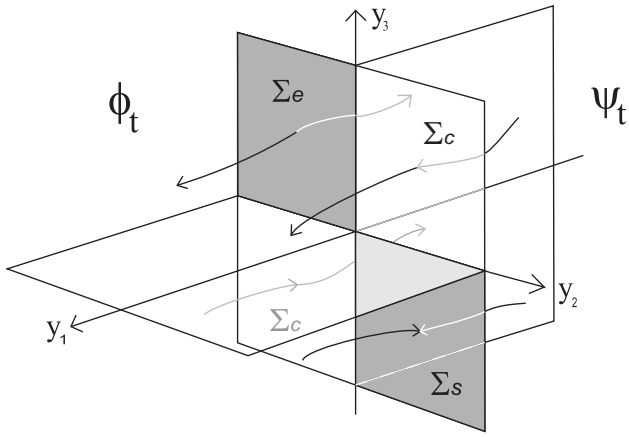

Figura 2. Regiones y flujos en forma normal. ψ_t es el flujo en la mitad del espacio $\{y_1 < 0\}$, y ϕ_t es el flujo en la mitad del espacio $\{y_1 > 0\}$.

5. CONEXIONES GLOBALES

La órbita heteroclínica es la órbita que une dos puntos de equilibrio en el espacio fase, es decir, una variedad que forma un lazo cerrado conectando dos puntos de equilibrio. En este tipo de conexión, la variedad inestable de un punto de equilibrio p_1 se une a la variedad estable de otro punto de equilibrio p_2. Si también sucede que la variedad estable de p_1 se une a la variedad inestable de p_2, entonces se tiene un ciclo heteroclínico.

Por otro lado, una órbita homoclínica ocurre cuando las variedades estable e inestable de un punto de equilibrio se unen. Esas variedades tienen las siguientes propiedades: las trayectorias que parten de condiciones iniciales sobre la variedad estable se aproximan al punto de equilibrio cuando $t \to \infty$; las trayectorias que parten de condiciones iniciales sobre la variedad inestable se aproximan al punto de equilibrio cuando $t \to -\infty$. El procedimiento para obtener familias de órbitas heteroclínicas y homoclínicas que presentamos en este trabajo es puramente geométrico, aprovechando la forma normal (6) para lograrlo.

Para el caso de las órbitas heteroclínicas, consideramos por simplicidad puntos silla tales que sus espectros sean dos valores propios reales negativos y uno real positivo. De esta manera, el espacio propio estable será un plano y el espacio propio inestable será una recta y el mecanismo para construir una órbita heteroclínica es colocar el espacio propio inestable de un equilibrio y el espacio propio estable del otro equilibrio de tal manera que se intersecten en un punto de Σ_c. La manera de proceder para obtener órbitas homoclínicas es similar al caso de las órbitas heteroclínicas, sólo que aquí buscamos un flujo en la mitad del espacio $\{x_1 > 0\}$ tal que conecte directamente los puntos de intersección de los espacios propios asociados al punto de equilibrio en la mitad del espacio $\{x_1 < 0\}$. Enseguida, para simplificar los cálculos haremos otro cambio de coordenadas, esta vez uno por pedazos.

Lema 2. El cambio de coordenadas

$$\begin{cases} x = P_1^{-1} y, & \text{si } y_1 < 0, \\ x = P_2^{-1} y, & \text{si } y_1 > 0, \end{cases} \tag{8}$$

donde $P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \delta_1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y $P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

transforma el sistema (6) en

$$\dot{x} = \begin{cases} \tilde{A}_1 x + \tilde{b}_1, & \text{si } x_1 < 0, \\ \tilde{A}_2 x + \tilde{b}_2, & \text{si } x_1 > 0, \end{cases} \tag{9}$$

donde

$$\tilde{A}_1 = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \tilde{c}_3 \\ \tilde{c}_4 & 0 & \tilde{c}_6 \end{pmatrix}, & \text{si } \delta_1 = -c_5, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tilde{c}_2 & \tilde{c}_3 \\ \tilde{c}_4 & \tilde{c}_5 & \tilde{c}_6 \end{pmatrix}, & \text{si } \delta_1 = \dfrac{c_1}{c_3}, \text{ con } c_3 \neq 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \tilde{c}_3 \\ 0 & \tilde{c}_5 & \tilde{c}_6 \end{pmatrix}, & \text{si } \delta_1 = \dfrac{c_4}{c_6}, \text{ con } c_6 \neq 0. \end{cases}$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \tilde{d}_1 & \tilde{d}_2 & 0 \\ \tilde{d}_4 & \tilde{d}_5 & \tilde{d}_6 \end{pmatrix}, & \text{si } \delta_2 = -d_3, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \tilde{d}_2 & \tilde{d}_3 \\ \tilde{d}_4 & \tilde{d}_5 & \tilde{d}_6 \end{pmatrix}, & \text{si } \delta_2 = \dfrac{d_1}{d_2}, \text{ con } d_2 \neq 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \tilde{d}_1 & \tilde{d}_2 & \tilde{d}_3 \\ 0 & \tilde{d}_5 & \tilde{d}_6 \end{pmatrix}, & \text{si } \delta_2 = \dfrac{d_4}{d_5} \text{ con } d_5 \neq 0. \end{cases}$$

Así, tenemos nueve posibles combinaciones para el sistema en forma normal (9).

5.1 Conexiones heteroclínicas

Considere la siguiente familia de SLPPD's con dos parámetros

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1 x + b_1, & \text{si } x_1 < 0, \\ A_2 x + b_2, & \text{si } x_1 > 0, \end{cases} \tag{10}$$

donde

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & -\alpha_2 \\ b_{13}^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b_{22}^2 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_3 & 0 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha_1}{b_{13}} \\ b_{13} \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{22} \\ \frac{\alpha_1}{b_{22}} \end{pmatrix}$

con $b_{13} > 0$, $b_{22} < 0$, $b_{13} + b_{22} > 0$, y

$$\alpha_1 = b_{13}^2 + b_{13} b_{22} + b_{22}^2 > 0$$
$$\alpha_2 = \frac{b_{22}}{b_{13}}(b_{13} + b_{22}) < 0$$
$$\alpha_3 = \frac{b_{13}}{b_{22}}(b_{13} + b_{22}) < 0.$$

Esta familia tiene un ciclo heteroclínico alrededor del origen, el cual es una singularidad Teixeira ya que $b_{13} b_{22} < 0$; ver (Colombo et al. (2010), Jeffrey et al. (2009)).
Los espectros de las matrices A_1 y A_2 son

$$\sigma(A_1) = \{b_{13}, b_{22}, -(b_{13} + b_{22})\} = \sigma(A_2)$$

Los puntos de equilibrio de los campos vectoriales en los semiespacios $\{x_1 < 0\}$ y $\{x_1 > 0\}$ son respectivamente

$p_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{b_{13}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $p_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{b_{22}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

El espacio propio inestable de p_1 intersecta al espacio propio estable de p_2 en el punto

$q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Sigma_c$,

y el espacio propio inestable de p_2 intersecta al espacio propio estable de p_1 en el punto

$q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b_{22}}{b_{13}} \\ \frac{b_{13}}{b_{22}} \end{pmatrix} \in \Sigma_c$, ver Figura 3.

Observación 2. Es importante notar que el campo deslizante en esta familia siempre tiene un único equilibrio, aunque esto no es fundamental para la creación del ciclo heteroclínico.

5.2 Conexiones homoclínicas

Considere la siguiente familia de SLPPD's con dos parámetros

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1 x + b_1, & \text{si } x_1 < 0, \\ A_2 x + b_2, & \text{si } x_1 > 0, \end{cases} \tag{11}$$

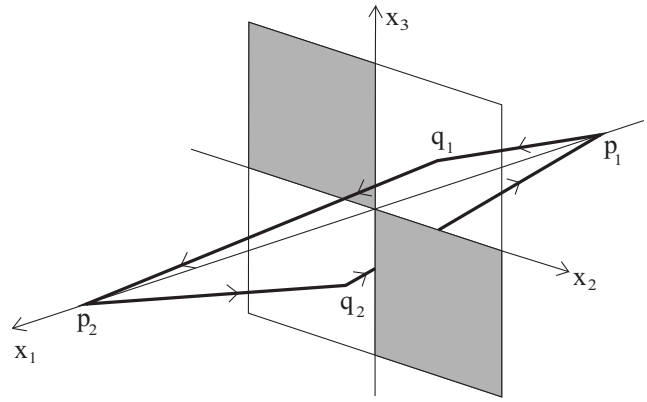

Figura 3. Esquema del ciclo heteroclínico para la familia (10).

donde $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{12} \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con $b_{12} + c_3 > 0$.

Los espectros de las matrices A_1 y A_2 son respectivamente

$$\sigma(A_1) = \{-1, -1, 1\} \text{ y } \sigma(A_2) = \{0, i, -i\}$$

En la mitad del espacio $\{x_1 < 0\}$ ya que A_1 es invertible, el sistema tiene un único punto de equilibrio el cual es un punto silla, esto es $p_1 = \begin{pmatrix} -(b_{12} + c_3) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, y en la mitad del espacio $\{x_1 > 0\}$ el sistema tiene el continuo de puntos de equilibrio $\Delta = \{x \in \Sigma : x_3 = 0\}$. De hecho, el conjunto Δ es un conjunto de equilibrios frontera de (11).
El espacio propio inestable de p_1 intersecta a Σ en $q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Sigma_c$ y una solución sobre el espacio propio estable de p_1 intersecta a Σ en $q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \Sigma_c$.

El flujo en la mitad del espacio $\{x_1 > 0\}$ está determinado por

$$\phi_t(x) = e^{tA_2} x = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ -\sin t & 1 & -1 + \cos t \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix} x$$

Así, $\phi_t(q_1) = q_2$ en $t = \pi$. De esta manera, hemos completado la órbita homoclínica, es decir, si tomamos una condición inicial $p_0 \approx p_1$ sobre el espacio propio inestable de p_1, entonces $\psi_{t_1}(p_0) = q_1$, $\phi_\pi(q_1) = q_2$ y $\psi_t(p_2) \to p_1$, cuando $t \to \infty$. Para observar la órbita homoclínica, hacemos $b_{12} = 1$ y $c_3 = 0$. Ver Figura 4.

6. CONCLUSIONES

Se mostró mediante una forma normal, que es posible obtener familias de SLPPD's con conexiones globales para el caso en que éstos sistemas presenten un único PDT. De la misma forma, se pueden obtener familias de SLPPD's

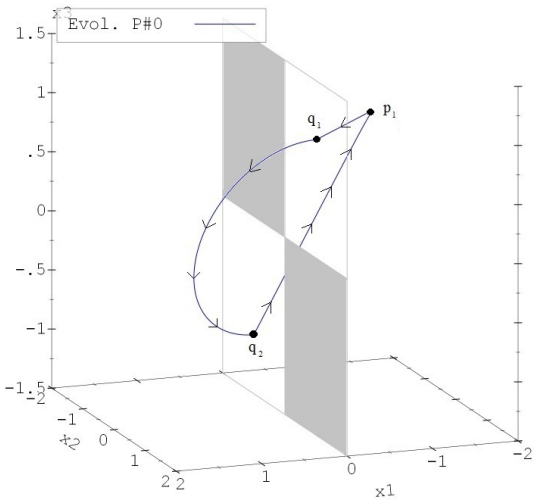

Figura 4. Órbita homoclínica para $b_{12} = 1$ y $c_3 = 0$.

con conexiones globales para el caso en que los sistemas no posean un único PDT. Más aún, es posible encontrar familias de SLPPD's con conexiones globales deslizantes (ó pseudo-conexiones globales (Kuznetsov et al. (2003))), ya que mediante las formas normales se obtienen expresiones canónicas para los campos de deslizamiento. Así, se puede conectar de alguna manera la dinámica deslizante con la dinámica de cruce y obtener dinámicas más complejas.

AGRADECIMIENTOS

El autor Juan Castillo agradece el apoyo de CONACYT: No. de beca 205856.

REFERENCIAS

Carmona V., Fernández-Sánchez F., Teruel A. E. Existence of a Reversible T-Point Heteroclinic Cycle in a Piecewise Linear Version of the Michelson System. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 7 (2008), 1032-1048.

Carmona V., Fernández-Sánchez F., García-Medina E., Teruel A. E. Existence of homoclinic connections in continuous piecewise linear systems, *Chaos 20*, 013124 (2010).

Castillo J., Verduzco F., Comer E., Femat R. La Bifurcación de Hopf en una Clase de Sistemas Lineales por Pedazos. *Memorias del XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático*, CLCA 2014.

Colombo A., di Bernardo M., Fossas E., Jeffrey M. R. Teixeira singularities in 3D switched feedback control systems. *Systems & Control Letters*, 59 (2010), 615-622.

Colombo A., di Bernardo M., Hogan S. J., Jeffrey M. R. Bifurcations of piecewise smooth flows: perspectives, methodologies and open problems. *Physica D*, 241 (2012), 1845-1860.

di Bernardo M., Budd C. J., Champneys A. R., Kowalczyk P. Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications. *Springer*, (2008).

Filippov A. F. Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides. *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, (1988).

Guckenheimer, P. Holmes. Nonlinear oscillations, Dynamical systems, and bifurcations of vector fields. *Applied Mathematical Sciences*, (1993).

Jeffrey M. R., Colombo A. The two-fold singularity of discontinuous vector fields. *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, 8 (2009), 624-640.

Kuznetsov Yu. A. , Rinaldi S., Gragnani A. One parameter bifurcations in planar Filippov systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13 (2003), 2157-2188.