Función de Lyapunov Suave por descomposición SOS para el Diferenciador de Levant de Segundo Orden

Fernando A. Ortiz Ricardez *, **Tonámetl Sánchez** * **y Jaime A. Moreno** *

* *Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México 04510 México, D.F., México. (e-mail: fortizric@gmail.com, TSanchezR@iingen.unam.mx, JMorenoP@iingen.unam.mx).*

Resumen: En este trabajo se diseña una función de Lyapunov suave para el diferenciador de Levant de segundo orden. El método de construcción de la función de Lyapunov aprovecha la estructura del campo vectorial del sistema para elegir una función candidata. El campo vectorial, la función candidata y su derivada pertenecen a una clase especial de funciones homogéneas que denominamos Formas Generalizadas. Lo anterior permite utilizar la descomposición en Suma de Cuadrados (SOS) para verificar positividad de la función y la negatividad de su derivada. También se propone un nuevo juego de ganancias para el diferenciador y se estima el tiempo de convergencia de las trayectorias del sistema.

Palabras Clave: Control por Modos Deslizantes, Estabilidad de Lyapunov.

1. INTRODUCCIÓN

En el diseño de sistemas de control realimentados generalmente se requiere conocer plenamente las variables de estado que describen al sistema, sin embargo, en muchos casos no es posible medirlas todas. Es por ello que se necesitan observadores y diferenciadores. Una forma sencilla de estimar la derivada de una variable de estado es utilizar filtros paso alto. Sin embargo, la salida de estos filtros sólo puede ser una aproximación de la verdadera derivada de una señal en un ancho de banda limitado. Para aminorar este problema se ha propuesto el uso de observadores de alta ganancia (Khalil, 2002), aunque éstos presentan un fenómeno indeseable de sobreimpulso denominado "peaking". En teoría de Modos Deslizantes, el Diferenciador Robusto Exacto de primer orden (Levant, 1998), también conocido como algoritmo "Super–Twisting", proporciona teóricamente de forma exacta la primera derivada de una señal en tiempo finito.

Para obtener derivadas de orden superior, el uso de múltiples diferenciadores de primer orden en cascada se ha reportado inconveniente debido a la pérdida considerable de precisión (Levant, 2003). No obstante, en (Levant, 2003) se propuso un diferenciador por modos deslizantes para determinar derivadas de orden arbitrario de una señal dada. Este diferenciador lleva el error de diferenciación a cero en tiempo finito y no presenta la rápida pérdida de precisión que poseen los diferenciadores de primer orden en cascada. Otra característica de este sistema es su grado de homogeneidad negativo, lo que implica convergencia en tiempo finito si se verifica la estabilidad asintótica. La convergencia de este diferenciador se ha demostrado mediante métodos geométricos y propiedades de homogeneidad (Levant, 2003), (Levant, 2005). Las pruebas de convergencia ofrecidas en estos últimos trabajos son de poca utilidad para analizar propiedades del diferenciador, tales como robustez y tiempo de convergencia, debido a que no se emplean funciones de Lyapunov.

En el caso del diferenciador de segundo orden, se ha diseñado un función de Lyapunov en (Moreno, 2012). Sin embargo, esta función posee dos desventajas principales. La primera es que, aunque continua, no es diferenciable. La segunda es que para obtener ganancias del sistema se necesita resolver complicadas desigualdades no lineales en función de los coeficientes de la función y de los parámetros del sistema (las desigualdades se obtuvieron mediante una generalización de la desigualdad de Young). En este aspecto, es deseable contar con una función de Lyapunov diferenciable para aplicar el método directo de Lyapunov, y con ella evitar dificultades adicionales al usar funciones no diferenciables.

En (Nakamura et al., 2002) se ha probado la existencia de funciones de Lyapunov diferenciables y homogéneas para sistemas homogéneos con lado derecho discontinuo. Más aún, en (Sánchez y Moreno, 2014) se ha presentado una metodología para construir funciones de Lyapunov diferenciables para ciertos sistemas homogéneos. Como ejemplo, el procedimiento fue aplicado a los sistemas de segundo orden Super-Twisting y a un integrador doble con realimentación homogénea. Dicha metodología se sirve de la estructura del campo vectorial del sistema para elegir una función de Lyapunov candidata. Así, tanto el sistema como la función y su derivada pertenecen a una clase especial de funciones homogéneas. Esto permite que el

Reserva de Derechos No. EN TRÁMITE, ISSN. EN TRÁMITE

problema de probar la positividad de la función y la negatividad de su derivada a lo largo del campo se reduzca al problema algebraico de verificar la positividad de un conjunto de polinomios.

En este artículo, basándose en el moldeo de la función candidata propuesto en (Sánchez y Moreno, 2014), se diseña una función de Lyapunov diferenciable para el diferenciador de Levant de segundo orden. Es importante señalar que a diferencia de (Moreno, 2012), la positividad de la función y la negatividad de su derivada se determinan a través de su descomposición en polinomios expresables como Suma de Cuadrados (SOS). Esto facilita el diseño de los coeficientes de la función de Lyapunov y de las ganancias del diferenciador. La descomposición en SOS se resuelve mediante una herramienta informática denominada SOSTOOLS (Papachristodoulou et al., 2013). Con la función de Lyapunov obtenida, se estima una cota del tiempo de convergencia para el error de diferenciación.

Este artículo está organizado como sigue: La Sección II provee dos teoremas como contribuciones principales, el primero se refiere a la función de Lyapunov resultante de la descomposición en SOS realizada. El segundo trata sobre el tiempo finito de convergencia y la robustez del error de diferenciación. La prueba del primer teorema es constructiva y se desarrolla de la Sección III a la Sección IV. Las Secciones V y VI contienen la prueba del segundo teorema. Finalmente, en la Sección VII se muestran algunas simulaciones.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y RESULTADO PRINCIPAL

Considere una señal $\sigma(t) \in \mathbb{R}$ con tercera derivada temporal acotada, es decir, $|\sigma^{(3)}(t)| \leq \Delta$, $\forall t \geq 0$ con $0 < \Delta \in \mathbb{R}$. Para estimar en tiempo finito y de manera exacta la primera y segunda derivada de la señal $\sigma(t)$, en (Levant, 2003) se propone el sistema de tercer orden

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= -k_1 \lfloor s_1 - \sigma(t) \rceil^{\frac{2}{3}} + s_2, \\ \dot{s}_2 &= -k_2 \lfloor s_1 - \sigma(t) \rceil^{\frac{1}{3}} + s_3, \\ \dot{s}_3 &= -k_3 \lfloor s_1 - \sigma(t) \rceil^{0}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde s_1, s_2 y s_3 corresponden a los estimados de las señales $\sigma(t)$, $\sigma^{(1)}(t)$ y $\sigma^{(2)}(t)$. Con ganancias $k = [k_1, k_2, k_3]^T \in \mathbb{R}^3$ diseñadas apropiadamente, los estimados s_1, s_2 y s_3, convergen a $\sigma(t)$, $\sigma^{(1)}(t)$ y $\sigma^{(2)}(t)$, $\forall t \geq T$, donde T es el tiempo de convergencia. Tanto en (1) como en el resto del artículo se emplea la siguiente notación: para una variable real $x \in \mathbb{R}$ y un número racional $\rho \in \mathbb{Q}$, $\lfloor x \rceil^{\rho} \triangleq |x|^{\rho} \cdot \operatorname{sign}(x)$. Por tanto, $\lfloor x \rceil^{1} = \lfloor x \rceil = x$ y $\lfloor x \rceil^{0} = \operatorname{sign}(x)$.

Tal como en (Moreno, 2012), definiendo los errores de diferenciación $x_i \triangleq s_i - \sigma^{(i-1)}(t)$, $i = 1, 2, 3$ se obtiene a partir de (1) la siguiente dinámica

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\, k_1 \lfloor x_1 \rceil^{\frac{2}{3}} + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\, k_2 \lfloor x_1 \rceil^{\frac{1}{3}} + x_3, \\ \dot{x}_3 &= -\, k_3 \lfloor x_1 \rceil^{0} + \pi(t), \end{aligned} \tag{2}$$

donde la función $\pi(t)$ está dada por el negativo de la tercera derivada de la señal σ, es decir $\pi(t) = -\sigma^{(3)}(t)$, note que $|\pi(t)| \leq \Delta$. Debido a que $\pi(t)$ es una función incierta, en adelante se considerará como una perturbación. Así, (2) puede asociarse a la inclusión diferencial $\dot{x} \in F(x)$ debido a su campo vectorial discontinuo e incierto. Las soluciones de esta inclusión diferencial se entienden en el sentido de Filipov (Fillipov, 1988). Dado que el conjunto de campos vectoriales $F(x)$ es homogéneo, se enuncian las definiciones de homogeneidad ponderada para funciones y sistemas con lado derecho discontinuo (Levant, 2005) (véase (Baccioti y Rosier, 2005) para sistemas continuos). Se dice que una función $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es *homogénea de grado* q si $V(\kappa^{r_1} x_1, \ldots, \kappa^{r_n} x_n) = \kappa^q V(x)$, $\forall \kappa \in \mathbb{R}, \kappa > 0$ con el vector de pesos de homogeneidad $r = [r_1, \ldots, r_n] \in \mathbb{R}^n$. Una inclusión $\dot{x} \in F(x) = [f_1(x), \ldots, f_n(x)]^T$ con el conjunto de campos vectoriales $F(x) \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$ se dice que es *homogénea de grado* q si cada componente f_i, $\forall i = 1, \ldots, n$, es homogénea de grado $q + r_i$, esto es $f_i(\kappa^{r_1} x_1, \ldots, \kappa^{r_n} x_n) = \kappa^{q+r_i} f_i(x), \forall \kappa > 0$.

Note que (2) es homogéneo de grado -1 con pesos de homogeneidad $r = [3, 2, 1]$. Como (2) es homogéneo, es posible proponer una función de Lyapunov candidata homogénea, ya que en (Nakamura et al., 2002) se ha probado la existencia de funciones de Lyapunov homogéneas para inclusiones diferenciales. Las funciones homogéneas poseen características útiles, una de ellas es la posibilidad de reescalar la función evaluada en un punto de su dominio para determinar todos los valores de su imagen. Otra propiedad es su no acotamiento radial, que implica la extensión global de cualquier resultado de estabilidad local. Con objeto de aplicar el método directo de Lyapunov, se pretende encontrar una función de Lyapunov homogénea diferenciable, la cual permita probar la estabilidad asintótica del origen de (2). Como (2) es homogéneo de grado negativo, la estabilidad asintótica de su origen equivale a estabilidad en tiempo finito (Levant, 2005). Además, una función de Lyapunov homogénea puede permitir estimar el tiempo de convergencia. Resumiendo, si se encuentra una función de Lyapunov homogénea diferenciable para (2), se puede garantizar convergencia global en tiempo finito del origen del sistema.

Basado en el moldeo de una función de Lyapunov candidata dado en (Sánchez y Moreno, 2014), se pretende diseñar una función de Lyapunov suave mediante descomposición en SOS, para con ella asegurar que las trayectorias de (2) convergen en tiempo finito a cero con un juego de ganancias propuesto. Adicionalmente, se busca ofrecer un estimado de la cota del tiempo de convergencia. El resultado principal de este artículo son los dos teoremas siguientes.

Teorema 2.1. Considere $\pi(t) = 0$, $\forall t \geq 0$. La función homogénea diferenciable $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} V(x) =& \alpha_1 |x_1|^{\frac{5}{3}} - \bar{\alpha}_{12} \lfloor x_1 \rceil \lfloor x_2 \rceil + \alpha_2 |x_2|^{\frac{5}{2}} + \\ & -\bar{\alpha}_{23} \lfloor x_2 \rceil \lfloor x_3 \rceil^3 + \alpha_3 |x_3|^5, \end{aligned} \tag{3}$$

con coeficientes $\alpha = [\alpha_1, \bar{\alpha}_{12}, \alpha_2, \bar{\alpha}_{23}, \alpha_3]^T$

$$\alpha_1 = 2.5838,\ \bar{\alpha}_{12} = 1.725,\ \alpha_2 = 0.695,$$
$$\bar{\alpha}_{23} = 1.3898,\ \alpha_3 = 8.0329, \tag{4}$$

es función de Lyapunov para (2) *con parámetros* $k = [k_1, k_2, k_3]^T$

$$k_1 = 5,\ k_2 = 3,\ k_3 = 0.02. \tag{5}$$

Dado que el grado homogéneo de (2) es negativo y (3) garantiza estabilidad asintótica, se puede asegurar la estabilidad en tiempo finito. Aunque el Teorema 2.1 es válido sólo para $\pi(t) = 0$, la estabilidad en tiempo finito al origen de (2) se mantiene para ciertas $\pi(t) \neq 0$ tal como se enuncia en el siguiente lema.

Lema 2.1. Sean α *y* k *como en el Teorema 2.1. Las trayectorias de* (2) *convergen al origen en tiempo finito para toda* $\pi(t)$ *tal que* $|\pi(t)| \leq \Delta_0 = 0.009$.

En los casos en que $\pi(t)$ es acotada pero no satisface la restricción $|\pi(t)| \leq \Delta_0$ se puede aplicar el teorema abajo enunciado. En dicho teorema se da un procedimiento para determinar las ganancias del diferenciador que garantizan la convergencia de las trayectorias al origen en tiempo finito.

Teorema 2.2. Considere $|\pi(t)| \leq \Delta$, $\forall t \geq 0$. *Dado el par* (α, k) *del Teorema 2.1 y* Δ_0 *del Lema 2.1, las trayectorias de* (2) *convergen al origen en tiempo finito con*

$$\bar{k} = [\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3]^T = diag(L^{1/3}, L^{2/3}, L)k, \tag{6}$$

donde $L = \Delta/\Delta_0$. *Más aún, la función*

$$V(x) = \alpha_{1s}\,|x_1|^{\frac{5}{3}} - \bar{\alpha}_{12s}\,\lfloor x_1 \rceil\,\lfloor x_2 \rceil + \alpha_{2s}\,|x_2|^{\frac{5}{2}} + \\ -\bar{\alpha}_{23s}\,\lfloor x_2 \rceil\,\lfloor x_3 \rceil^3 + \alpha_{3s}\,|x_3|^5\,, \tag{7}$$

es una función de Lyapunov para (2) *con los coeficientes escalados* $\bar{\alpha} = [\alpha_{1s}, \bar{\alpha}_{12s}, \alpha_{2s}, \bar{\alpha}_{23s}, \alpha_{3s}]^T$ *dados por*

$$\bar{\alpha} = diag(L^{-5/3}, L^{-2}, L^{-5/2}, L^{-4}, L^{-5})\alpha.$$

El tiempo de convergencia al origen de (2) *se puede estimar como*

$$T(x_0) \leq \frac{V^{1-\delta}(x_0)}{\gamma(1-\delta)}\,, \quad \delta = 4/5\,,\ \gamma > 0\,. \tag{8}$$

En particular para el par (α, k) dado por (4) y (5), $0 < \gamma \leq 7.3 \times 10^{-3}$. Las pruebas de estos teoremas se dan en las secciones siguientes.

3. FUNCIÓN CANDIDATA DE LYAPUNOV

De acuerdo a (Sánchez y Moreno, 2014), si un sistema $\dot{x} = f(x)$ pertenece a una clase particular de funciones denominadas *Formas Generalizadas* (FG), entonces la función de Lyapunov candidata se elige de modo que también sea de este tipo. Esta clase de funciones se define a continuación: Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función homogénea de grado m con vector de pesos de homogeneidad $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{Q}^n$. F es una FG si sólo contiene sumas y productos de términos de los siguientes tipos:

$$\alpha|x_k|^{\rho}\,, \quad \alpha\lfloor x_k \rceil^{\rho}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,,\ \rho \in \mathbb{Q}\,.$$

Como función de Lyapunov candidata, se comienza con la FG

$$V(x) = \alpha_1|x_1|^{\frac{m}{r_1}} - \bar{\alpha}_{12}\lfloor x_1 \rceil^{\rho_0}\lfloor x_2 \rceil^{\rho_1} + \alpha_2|x_2|^{\frac{m}{r_2}} + \\ - \bar{\alpha}_{23}\lfloor x_2 \rceil^{\rho_2}\lfloor x_3 \rceil^{\rho_3} + \alpha_3|x_3|^{\frac{m}{r_3}}\,. \tag{9}$$

El sistema (2) es homogéneo de grado -1 con pesos de homogeneidad $r = [r_1, r_2, r_3] = [3, 2, 1]$. El cumplimiento de las condiciones para diferenciabilidad y homogeneidad para (9), y las condiciones necesarias para los términos univariable de signo definido de $W(x) = -(\partial V(x)/\partial x)\dot{x} = -\dot{V}$ reportados en (Sánchez y Moreno, 2014), se satisfacen con $m = 5$, $\rho_0, \rho_1, \rho_2 = 1$ y $\rho_3 = 3$. Entonces, $W(x)$ queda

$$W(x) = (\tfrac{5}{3}\alpha_1 k_1 - \bar{\alpha}_{12}k_2)|x_1|^{\frac{4}{3}} - (\tfrac{5}{3}\alpha_1 + \bar{\alpha}_{12}k_1)\lfloor x_1 \rceil^{\frac{2}{3}}x_2$$

$$+\tfrac{5}{2}\alpha_2 k_2\lfloor x_1 \rceil^{\frac{1}{3}}\lfloor x_2 \rceil^{\frac{3}{2}} + \bar{\alpha}_{12}|x_2|^2 + \bar{\alpha}_{12}x_1x_3 - \tfrac{5}{2}\alpha_2\lfloor x_2 \rceil^{\frac{3}{2}}x_3$$

$$-3\bar{\alpha}_{23}(k_3 - \pi(t)\lfloor x_1 \rceil^0)\lfloor x_1 \rceil^0 x_2|x_3|^2 - \bar{\alpha}_{23}k_2\lfloor x_1 \rceil^{\frac{1}{3}}\lfloor x_3 \rceil^3 \\ +(\bar{\alpha}_{23} + 5\alpha_3\lfloor x_1 \rceil^0\lfloor x_3 \rceil^0(k_3 - \pi(t)\lfloor x_1 \rceil^0))|x_3|^4\,. \tag{10}$$

Primero se considera el caso $\pi(t) = 0$. Entonces, (9) y (10) pueden reescribirse

$$V(x) = \alpha_1|x_1|^{\frac{5}{3}} - \bar{\alpha}_{12}\lfloor x_1 \rceil\lfloor x_2 \rceil + \alpha_2|x_2|^{\frac{5}{2}} - \bar{\alpha}_{23}\lfloor x_2 \rceil\lfloor x_3 \rceil^3 \\ +\alpha_3|x_3|^5\,, \tag{11}$$

$$W(x) = \beta_1|x_1|^{\frac{4}{3}} - \beta_2\lfloor x_1 \rceil^{\frac{2}{3}}x_2 + \beta_3\lfloor x_1 \rceil^{\frac{1}{3}}\lfloor x_2 \rceil^{\frac{3}{2}} + \beta_4|x_2|^2 + \\ +\beta_5 x_1x_3 - \beta_6\lfloor x_2 \rceil^{\frac{3}{2}}x_3 - \beta_7\lfloor x_1 \rceil^0 x_2|x_3|^2 + \\ -\beta_8\lfloor x_1 \rceil^{\frac{1}{3}}\lfloor x_3 \rceil^3 + \beta_9|x_3|^4\,, \tag{12}$$

donde los coeficientes $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8, \beta_9$ son

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (\tfrac{5\alpha_1}{3}k_1 - \bar{\alpha}_{12}k_2), & \beta_2 &= (\tfrac{5\alpha_1}{3} + \bar{\alpha}_{12}k_1), \\ \beta_3 &= \tfrac{5\alpha_2}{2}k_2, & \beta_4 &= \bar{\alpha}_{12}, \\ \beta_5 &= \bar{\alpha}_{12}, & \beta_6 &= \tfrac{5\alpha_2}{2}, \\ \beta_7 &= 3\bar{\alpha}_{23}k_3, & \beta_8 &= \bar{\alpha}_{23}k_2, \\ \beta_9 &= (\bar{\alpha}_{23} + 5\alpha_3 k_3\lfloor x_1x_3 \rceil^0). \end{aligned} \tag{13}$$

Observando (11) y (12), es necesario que α_1, $\bar{\alpha}_{12}$, α_2, $\bar{\alpha}_{23}$, $\alpha_3 > 0$ para que V y W sean positivas definidas. De igual forma, de (13) se observa que es necesario que $\beta_1, \beta_9 > 0$. Ahora se requiere probar la positividad definida de (11) y (12).

4. VALIDACIÓN DE CANDIDATA MEDIANTE SUMA DE CUADRADOS

Las FG son, como su nombre sugiere, generalizaciones de funciones homogéneas llamadas Formas Algebraicas, o simplemente *Formas*, cuya definición es: Una función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se denomina forma si $F(z)$ es un polinomio homogéneo de grado $q \in \mathbb{N}$, esto es $F(\kappa z_1, \ldots, \kappa z_n) = \kappa^q F(z_1, \ldots, z_n), 0 < \kappa \in \mathbb{R}$.

Si una forma F (de grado q par) se puede expresar como una Suma de Cuadrados (SOS), es decir, $F = \sum_i f_i^2$ para un conjunto finito de formas f_i, entonces evidentemente F es positiva semidefinida. El problema de la representación en SOS es muy antiguo y existe una amplia literatura en su tratado. Sin embargo, en (Parrilo, 2000) se expone que encontrar una representación en SOS

para una forma F puede tratarse mediante la resolución de una desigualdad lineal matricial (LMI). La idea es expresar F como una representación cuadrática matricial (SMR) $F = \xi(z)^T Q \xi(z)$. Las entradas del vector $\xi(z)$ contienen monomios de grado $q/2$. Si la matriz Q es positiva semidefinida, entonces F puede expresarse como una SOS.

Dado que (11) y (12) son FG pero no formas, para revisar su positividad definida mediante una descomposición en SOS, se les aplica el cambio de variables $|x_i| = z_i^{2r_i}$, con lo cual $|x_1| = z_1^6$, $|x_2| = z_2^4$, $|x_3| = z_3^2$. El cambio de variable está dado por los pesos de homogeneidad de (2) y se emplea para asegurar que las formas resultantes sean de grado par, lo cual es una condición necesaria para su descomposición SOS.

Tras el cambio, (11) y (12) quedan expresadas como conjuntos de formas $V_i(z)$ y $W_j(z)$; $i, j = 1, \ldots, 2^n$, cuyos dominios están en $\mathbb{R}^n$. Observe que habrá máximo 2^n formas distintas asociadas a (11), dependiendo del octante del estado $x \in \mathbb{R}^n$ considerado. En este caso (11) es simétrico respecto al origen, así que habrá máximo 2^{n-1} formas asociadas. Así, (11) equivale a $V_1(z)$ para $x_1, x_2, x_3 > 0$ y $x_1, x_2, x_3 < 0$; a $V_2(z)$ para $x_1 < 0, x_2, x_3 > 0$ y $x_1 > 0, x_2, x_3 < 0$; a $V_3(z)$ para $x_1, x_2 > 0, x_3 < 0$ y $x_1, x_2 < 0, x_3 > 0$; a $V_4(z)$ para $x_1, x_3 > 0, x_2 < 0$ y $x_1, x_3 < 0, x_2 > 0$, donde

$$\begin{aligned}
V_1(z) &= \alpha_1 z_1^{10} - \bar{\alpha}_{12} z_1^6 z_2^4 + \alpha_2 z_2^{10} - \bar{\alpha}_{23} z_2^4 z_3^6 + \alpha_3 z_3^{10},\\
V_2(z) &= \alpha_1 z_1^{10} + \bar{\alpha}_{12} z_1^6 z_2^4 + \alpha_2 z_2^{10} - \bar{\alpha}_{23} z_2^4 z_3^6 + \alpha_3 z_3^{10},\\
V_3(z) &= \alpha_1 z_1^{10} - \bar{\alpha}_{12} z_1^6 z_2^4 + \alpha_2 z_2^{10} + \bar{\alpha}_{23} z_2^4 z_3^6 + \alpha_3 z_3^{10},\\
V_4(z) &= \alpha_1 z_1^{10} + \bar{\alpha}_{12} z_1^6 z_2^4 + \alpha_2 z_2^{10} + \bar{\alpha}_{23} z_2^4 z_3^6 + \alpha_3 z_3^{10}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Las formas $W_j(z)$ son también simétricas respecto al origen, así que también hay 2^{n-1} formas asociadas. Por tanto (12) equivale a $W_1(z)$ para $x_1, x_2, x_3 > 0$ y $x_1, x_2, x_3 < 0$; a $W_2(z)$ para $x_1 < 0, x_2, x_3 > 0$ y $x_1 > 0, x_2, x_3 < 0$; a $W_3(x)$ para $x_1, x_3 > 0, x_2 < 0$ y $x_1, x_3 < 0, x_2 > 0$; a $W_4(z)$ para $x_1, x_2 > 0, x_3 < 0$ y $x_1, x_2 < 0, x_3 > 0$, donde

$$\begin{aligned}
W_1(z) &= \beta_1 z_1^8 - \beta_2 z_1^4 z_2^4 + \beta_3 z_1^2 z_2^6 + \beta_4 z_2^8 + \beta_5 z_1^6 z_3^2 +\\
&\quad -\beta_6 z_2^6 z_3^2 - \beta_7 z_2^4 z_3^4 - \beta_8 z_1^2 z_3^6 + \beta_9 z_3^8,\\
W_2(z) &= \beta_1 z_1^8 + \beta_2 z_1^4 z_2^4 - \beta_3 z_1^2 z_2^6 + \beta_4 z_2^8 - \beta_5 z_1^6 z_3^2 +\\
&\quad -\beta_6 z_2^6 z_3^2 + \beta_7 z_2^4 z_3^4 + \beta_8 z_1^2 z_3^6 + \beta_9 z_3^8,\\
W_3(z) &= \beta_1 z_1^8 + \beta_2 z_1^4 z_2^4 - \beta_3 z_1^2 z_2^6 + \beta_4 z_2^8 + \beta_5 z_1^6 z_3^2 +\\
&\quad +\beta_6 z_2^6 z_3^2 + \beta_7 z_2^4 z_3^4 - \beta_8 z_1^2 z_3^6 + \beta_9 z_3^8,\\
W_4(z) &= \beta_1 z_1^8 - \beta_2 z_1^4 z_2^4 + \beta_3 z_1^2 z_2^6 + \beta_4 z_2^8 - \beta_5 z_1^6 z_3^2 +\\
&\quad +\beta_6 z_2^6 z_3^2 - \beta_7 z_2^4 z_3^4 + \beta_8 z_1^2 z_3^6 + \beta_9 z_3^8.
\end{aligned} \tag{15}$$

Las restricciones $\alpha_1, \bar{\alpha}_{12}, \alpha_2, \bar{\alpha}_{23}, \alpha_3 > 0$ dadas son suficientes para cumplir que $V_4(z) > 0$. Se requiere determinar valores para α y β que aseguren que el resto de las formas de (14) y (15) sean positivas definidas. La descomposición en SOS solo garantiza positividad semidefinida. Para probar positividad definida, se introducen las restricciones

- $\bar{V}_1(z) = V_1(z) - \epsilon \|z\|_{10}^{10} \geq 0$,
- $\bar{V}_2(z) = V_2(z) - \epsilon \|z\|_{10}^{10} \geq 0$,
- $\bar{V}_3(z) = V_3(z) - \epsilon \|z\|_{10}^{10} \geq 0$,
- $\bar{W}_1(z) = W_1(z) - \epsilon \|z\|_{8}^{8} \geq 0$,
- $\bar{W}_2(z) = W_2(z) - \epsilon \|z\|_{8}^{8} \geq 0$,
- $\bar{W}_3(z) = W_3(z) - \epsilon \|z\|_{8}^{8} \geq 0$,
- $\bar{W}_4(z) = W_4(z) - \epsilon \|z\|_{8}^{8} \geq 0$,
- $\bar{\alpha}_{12}, \bar{\alpha}_{12} \geq 0$,

al programa semidefinido ejecutado por el paquete SOSTOOLS. Dicho paquete no obtiene (en general) matrices definidas para alguna SMR factible, por lo que se asigna un sesgo $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ para asegurar la positividad definida de las SMR calculadas para las formas (14) y (15). Se pueden proponer los parámetros k para que SOSTOOLS compute los coeficientes α que hacen factible el conjunto de LMI. El problema también puede resolverse de manera inversa, es decir, proponer α y calcular k. Con $\epsilon = 0.01$ y fijando $k_1 = 5$, $k_2 = 3$, y $k_3 = 0.02$, la solución entregada por SOSTOOLS para $\alpha = [\alpha_1, \bar{\alpha}_{12}, \alpha_2, \bar{\alpha}_{23}, \alpha_3]^T$ es

$$\alpha = [2.5838,\ 1.725,\ 0.695,\ 1.3898,\ 8.0329]^T. \tag{16}$$

Con los coeficientes (16) y el sesgo de ϵ, la matrices Q_i de las representaciones $V_i(z) = \xi^T Q_i \xi$ de las formas (14), y las matrices Q_j de las representaciones $W_j(z) = \xi^T Q_j \xi$ de las formas (15) son positivas definidas. Por tanto, las formas (14) y (15) pueden escribirse como SOS. El Apéndice muestra la representación en SOS de $\bar{V}_2(z)$.

Los resultados de esta sección son válidos sólo en el caso $\pi(t) = 0$ y prueban el Teorema 2.1. Las siguientes dos secciones prueban el Lema 2.1 y el Teorema 2.2, los cuales tratan el caso perturbado general $\pi(t) \neq 0$.

5. CONSIDERACÍON DE CASO PERTURBADO

Ahora se busca una cota máxima Δ_0 para $|\pi(t)| \leq \Delta_0$ tal que (10) sea todavía positiva definida. Esto se logra considerando los factores $(k_3 \pm \Delta_0)$ en los términos de (10) donde $\pi(t)$ está involucrada, para así identificar cuál de los dos factores implica el caso en que (10) es menos positiva. Con esto, se evalúa (10) en la superficie de una esfera de radio $r = 1$ centrada en $x = 0$ aplicando el cambio de coordenadas

$$x_1 = r\sin(\phi)\cos(\theta), x_2 = r\sin(\phi)\sin(\theta), x_3 = r\cos(\phi).$$

El ángulo acimutal varía $0 \leq \theta < 2\pi$ y el ángulo cenital se extiende $0 \leq \phi \leq \pi$. Del último término de (10), una condición necesaria para su positividad definida es $(\bar{\alpha}_{23} - 5\alpha_3(k_3 + \Delta_0) > 0)$. Con esto y el par (α, k) determinado, la cota nominal se restringe $\Delta_0 < 0.014$. Entonces se busca un valor para la cota nominal Δ_0 en $0 < \Delta_0 < 0.014$. Se recurre a una prueba gráfico-numérica sobre la esfera ya mencionada. Probando $\Delta_0 = 0.009$, se evalúa (10) cada 0.5 grados en ambos intervalos de θ y ϕ, para ambos casos $(k_3 \pm \Delta_0)$, obteniendo 720×360 valores para cada caso. El caso menos positivo para (10) es cuando sus términos perturbados contienen el factor $(k_3 - \Delta_0)$. Con la cota elegida $\Delta_0 = 0.009$, la positividad de (10) se mantiene, siendo su valor mínimo de 0.0196. El valor mínimo para (11) es de 0.3866.

Así, se prueba el Lema 2.1, pues se ha establecido una cota Δ_0 para la perturbación $\pi(t)$, de modo que si $|\pi(t)| \leq \Delta_0$,

el sistema (2) sigue teniendo como función de Lyapunov a (11). Esta prueba gráfica es válida debido a que (11) y (10) son homogéneas, con lo cual, su positividad definida localmente es válida de manera global en el estado $x \in \mathbb{R}^n$.

El difeomorfismo $y = Lx, 0 < L \in \mathbb{R}$ se aplica al sistema (2) con objeto de robustecerlo contra perturbaciones $\pi(t)$ acotadas como $|\pi(t)| \leq \Delta$, de modo que $\Delta \geq \Delta_0$. Este difeomorfismo se emplea también en (Levant, 2003) para obtener el escalamiento de ganancias del diferenciador. Con esto, la versión escalada de (2) es

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -L^{1/3}k_1\lfloor y_1\rceil^{\frac{2}{3}} + y_2 \\ \dot{y}_2 &= -L^{2/3}k_2\lfloor y_1\rceil^{\frac{1}{3}} + y_3 \\ \dot{y}_3 &= -Lk_3\lfloor y_1\rceil^{0} + L\pi(t). \end{aligned} \tag{17}$$

Los escalamientos del Teorema 2.2 resultan $\bar{k}_1 = L^{\frac{1}{3}}k_1$, $\bar{k}_2 = L^{\frac{2}{3}}k_2$, $\bar{k}_3 = Lk_3$; donde $L = \Delta/\Delta_0$. La diferencia respecto a los escalamientos hechos por (Levant, 2003) es que ahí se asigna $L = \Delta$, esto es, se considera $\Delta_0 = 1$. El difeomorfismo $y = Lx$ aplicado a la función de Lyapunov (11), permite obtener los coeficientes escalados $\bar{\alpha} = [\alpha_{1s}, \bar{\alpha}_{12s}, \alpha_{2s}, \bar{\alpha}_{23s}, \alpha_{3s}]^T$ dados en el Teorema 2.2.

6. ESTIMACIÓN DEL TIEMPO DE CONVERGENCIA

Para estimar la cota del tiempo de convergencia, se resuelve la desigualdad diferencial $\dot{V} \leq -\gamma V^{\delta}(x)$, donde $0 < \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ y $\delta < 1$. Como $W(x) = -\dot{V}$, la desigualdad se expresa $W(x) \geq \gamma V^{\delta}(x)$. De acuerdo al Lema de Comparación (véase (Khalil, 2002)[p. 102]), la cota superior del tiempo de convergencia es

$$T(x_0) \leq \frac{V^{1-\delta}(x_0)}{\gamma(1-\delta)}, \tag{18}$$

donde $x_0 = x(t_0)$. La constante $\delta = 4/5$ porque V^{δ} y W deben ser homogéneas de grado 4. Para calcular la constante γ, se establece la función $F(x) = W(x)/V^{4/5}(x)$ y se encuentra su mínimo como cota superior para γ. $F(x)$ es homogénea de grado 0, entonces sus puntos críticos permanecen inalterados ante cualquier escalamiento de su argumento. Esto también es verdad considerando el difeomorfismo $y = Lx$ en $F(x)$. La constante γ se ha calculado hallando numéricamente el mínimo valor de $F(x)$ en el mallado de la gráfica sobre la misma esfera de radio 1 usada antes. Se ha encontrado que $\gamma \leq 7.3 \times 10^{-3}$. Con esto, se obtiene el tiempo de convergencia enunciado en el Teorema 2.2.

7. SIMULACIONES

Tómese por ejemplo (2) con $\pi(t) = 8\sin(2t)$, con lo cual $\Delta = 8$. De acuerdo al Teorema 2.2, los parámetros escalados que logran estabilización en tiempo finito de (2) son $\bar{k}_1 = 48.075$, $\bar{k}_2 = 277.3445$, $\bar{k}_3 = 17.7778$. Las simulaciones para este caso se presentan en la Fig. 1 con condiciones iniciales $x_1, x_2, x_3 = 5$. Los parámetros k de (1) y (2) escritos en términos de los coeficientes $\lambda_0 = 1.1$,

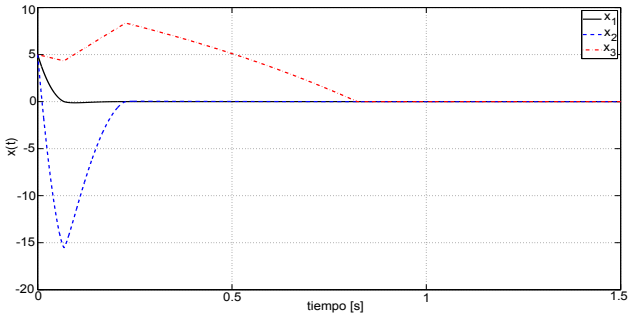

Fig. 1. Error de diferenciación con parámetros propuestos

$\lambda_1 = 1.5$ y $\lambda_2 = 3$ propuestos en (Levant, 2003) son $k_1 = \lambda_2$, $k_2 = \lambda_1\lambda_2^{1/2}$, $k_3 = \lambda_0$.

La simulación fue hecha utilizando el resolvedor Runge–Kuta (ode4) de Simulink con periodo fijo de integración $T_s = 2\mu s$. Un acercamiento de la simulación hecha con las ganancias propuestas (Fig. 1) cuando el error converge a cero se presenta en la Fig. 2. En la Fig. 3 se realiza el mismo acercamiento para una simulación con $T_s = 20\mu s$. De la Fig. 2 y la Fig. 3 puede observarse que la precisión del diferenciador con las ganancias propuestas, coincide con la dependencia del periodo de integración T_s, de acuerdo al Teorema 7 reportado en (Levant, 2003).

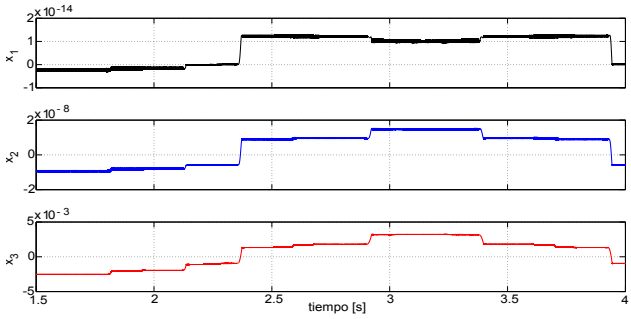

Fig. 2. Errores tras convergencia con $T_s = 2\mu s$

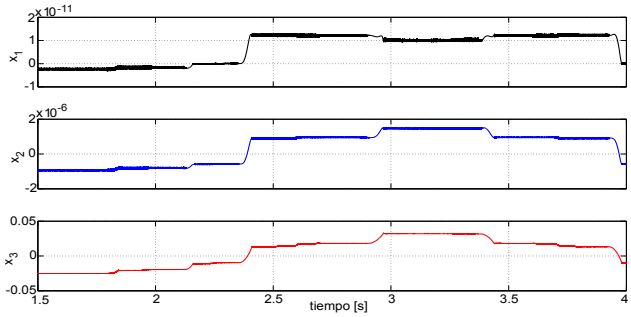

Fig. 3. Errores tras convergencia con $T_s = 20\mu s$

8. CONCLUSIONES

Empleando la fase de moldeo del método de (Sánchez y Moreno, 2014) a la función de Lyapunov candidata y encontrándole una representación en SOS, se ha diseñado una función de Lyapunov homogénea y diferenciable para el diferenciador de Levant de segundo orden. El proceso

de diseño es relativamente simple y permite, además de obtener funciones de Lyapunov, proponer distintos juegos de parámetros para el diferenciador con la ayuda del paquete SOSTOOLS. Mediante la función de Lyapunov obtenida se ha estimado una cota del tiempo de convergencia. En las simulaciones se he verificado la dependencia de la precisión respecto al periodo de integración reportada en (Levant, 2003).

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo por parte de PAPIIT-UNAM (Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica), proyecto IN113614; Fondo de Colaboración II-FI UNAM, proyecto IISGBAS-122-2014; y CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología), proyecto 241171, CVU: 557079 y CVU: 371652.

REFERENCIAS

Baccioti, A. y Rosier, L. (2005). *Liapunov Functions and Stability in Control Theory.* Springer. 2nd ed., pp. 181-191.

Fillipov, A. (1988). *Differential equations with discontinuous right hand side.* Kluwer, The Netherlands.

Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems.* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 3rd ed., pp. 610-623.

Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34, 379–384.

Levant, A. (2003). Higher order sliding modes: differentiation and output feedback control. *Int. J. of Control*, 76, 924–941.

Levant, A. (2005). Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41, 823–830.

Moreno, J.A. (2012). Lyapunov Function for Levant's Second Order Differentiator. *51st. IEEE CDC.*

Nakamura, H., Yamashita, Y., y Nishitani, H. (2002). Smooth Lyapunov Functions for Homogeneous Differential Inclusions. *SICE Annual Conference*, 1974–1979.

Papachristodoulou, A., Anderson, J., Valmorbida, G., Prajna, S., Seiler, P., y Parrilo, P.A. (2013). *SOSTOOLS: Sum of squares optimization toolbox for MATLAB.* `http://arxiv.org/abs/1310.4716`.

Parrilo, P. (2000). *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization.* PhD Thesis, CALTECH, pp. 37-44, Pasadena, CA, USA.

Sánchez, T. y Moreno, J.A. (2014). A Constructive Lyapunov Function Design Method For A Class Of Homogeneous Systems. *53rd. IEEE CDC.*

APÉNDICE

Las formas f_i entregadas por SOSTOOLS (tras omitir monomios con coeficientes ínfimamente pequeños) que conforman $\bar{V}_2 = \sum_{i=1}^{21} f_i^2(z)$ son:

$$f_1 = 1.53529z_1^5 - 0.276422z_1^3z_2^2 - 0.0353655z_1z_2^4 + \\ - 0.298662z_1^3z_3^2 - 0.0915513z_1z_2^2z_3^2 - 0.203565z_1z_3^4$$

$$f_2 = 1.22187z_1^4z_2 - 0.145783z_1^2z_2^3 - 0.0804419z_2^5 + \\ - 0.15415z_1^2z_2z_3^2 - 0.0158148z_2^3z_3^2 - 0.053141z_2z_3^4$$

$$f_3 = -0.276422z_1^5 + 1.43367z_1^3z_2^2 - 0.311637z_1z_2^4 + \\ - 0.0587725z_1^3z_3^2 - 0.106952z_1z_2^2z_3^2 - 0.0420564z_1z_3^4$$

$$f_4 = -0.145783z_1^4z_2 + 1.21042z_1^2z_2^3 - 0.254061z_2^5 + \\ - 0.132024z_1^2z_2z_3^2 - 0.0265716z_2^3z_3^2 - 0.00990449z_2z_3^4$$

$$f_5 = -0.0353655z_1^5 - 0.311637z_1^3z_2^2 + 0.880035z_1z_2^4 + \\ - 0.0532604z_1^3z_3^2 - 0.213421z_1z_2^2z_3^2 - 0.0805798z_1z_3^4$$

$$f_6 = -0.0804419z_1^4z_2 - 0.254061z_1^2z_2^3 + 0.711406z_2^5 + \\ - 0.0258593z_1^2z_2z_3^2 - 0.298887z_2^3z_3^2 - 0.133662z_2z_3^4$$

$$f_7 = 1.23425z_1^4z_3 - 0.138351z_1^2z_2^2z_3 - 0.00896988z_2^4z_3 + \\ - 0.201889z_1^2z_3^3 - 0.036396z_2^2z_3^3 - 0.250923z_3^5$$

$$f_8 = 1.30225z_1^3z_2z_3 - 0.224477z_1z_2^3z_3 - 0.177863z_1z_2z_3^3$$

$$f_9 = -0.138351z_1^4z_3 + 1.32921z_1^2z_2^2z_3 - 0.166641z_2^4z_3 + \\ - 0.114195z_1^2z_3^3 - 0.0894394z_2^2z_3^3 - 0.155897z_3^5$$

$$f_{10} = -0.224477z_1^3z_2z_3 + 1.08192z_1z_2^3z_3 - 0.238226z_1z_2z_3^3$$

$$f_{11} = -0.00896988z_1^4z_3 - 0.166641z_1^2z_2^2z_3 + \\ + 0.898731z_2^4z_3 - 0.0290335z_1^2z_3^3 + \\ - 0.319801z_2^2z_3^3 - 0.381767z_3^5$$

$$f_{12} = -0.298662z_1^5 - 0.0587725z_1^3z_2^2 - 0.0532604z_1z_2^4 + \\ + 1.37496z_1^3z_3^2 - 0.0947425z_1z_2^2z_3^2 - 0.0911732z_1z_3^4$$

$$f_{13} = -0.15415z_1^4z_2 - 0.132024z_1^2z_2^3 - 0.0258593z_2^5 + \\ + 1.3869z_1^2z_2z_3^2 - 0.100227z_2^3z_3^2 - 0.0959015z_2z_3^4$$

$$f_{14} = -0.0915513z_1^5 - 0.106952z_1^3z_2^2 - 0.213421z_1z_2^4 + \\ - 0.0947425z_1^3z_3^2 + 1.34118z_1z_2^2z_3^2 - 0.112071z_1z_3^4$$

$$f_{15} = -0.0158148z_1^4z_2 - 0.0265716z_1^2z_2^3 - 0.298887z_2^5 + \\ - 0.100227z_1^2z_2z_3^2 + 1.22191z_2^3z_3^2 - 0.187141z_2z_3^4$$

$$f_{16} = -0.201889z_1^4z_3 - 0.114195z_1^2z_2^2z_3 - 0.0290335z_2^4z_3 + \\ + 1.4332z_1^2z_3^3 - 0.0320549z_2^2z_3^3 - 0.265108z_3^5$$

$$f_{17} = -0.177863z_1^3z_2z_3 - 0.238226z_1z_2^3z_3 + 1.3582z_1z_2z_3^3$$

$$f_{18} = -0.036396z_1^4z_3 - 0.0894394z_1^2z_2^2z_3 - 0.319801z_2^4z_3 + \\ - 0.0320549z_1^2z_3^3 + 1.35711z_2^2z_3^3 - 0.280079z_3^5$$

$$f_{19} = -0.203565z_1^5 - 0.0420564z_1^3z_2^2 - 0.0805798z_1z_2^4 + \\ - 0.0911732z_1^3z_3^2 - 0.112071z_1z_2^2z_3^2 + 1.40639z_1z_3^4$$

$$f_{20} = -0.053141z_1^4z_2 - 0.00990449z_1^2z_2^3 - 0.133662z_2^5 + \\ - 0.0959015z_1^2z_2z_3^2 - 0.187141z_2^3z_3^2 + 1.3915z_2z_3^4$$

$$f_{21} = -0.250923z_1^4z_3 - 0.155897z_1^2z_2^2z_3 - 0.381767z_2^4z_3 + \\ - 0.265108z_1^2z_3^3 - 0.280079z_2^2z_3^3 + 2.76426z_3^5$$