

## Control Adaptable Pasivo para un Sistema de Dos Tanques en Cascada <sup>★</sup>

González-Olvera, Marcos A. <sup>\*</sup>  
Olivar-Domínguez, Emmanuel <sup>\*\*</sup> Tang, Yu <sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Colegio de Ciencia y Tecnología, Plantel San Lorenzo Tezonco. Ciudad de México, México  
(marcos.angel.gonzalez@uacm.edu.mx)

<sup>\*\*</sup> Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Colegio de Ciencia y Tecnología, Plantel San Lorenzo Tezonco. Ciudad de México, México  
(emmanuel.olivar@estudiante.uacm.edu.mx)

<sup>\*\*\*</sup> Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería  
(tang@unam.mx)

---

**Resumen** En este trabajo se presenta un controlador adaptable basado en pasividad para un sistema de dos tanques en cascada, en el cual se asume que uno de los parámetros de la planta es desconocido, y se desarrolla la prueba de estabilidad y convergencia del controlador. Se muestran resultados tanto en simulación y experimentales para demostrar la efectividad del controlador propuesto.

*Keywords:* Control adaptable, sistemas no lineales, control por pasividad.

---

### 1. INTRODUCCIÓN

Dentro de las estrategias de control propuestas en la literatura, el control adaptable provee de técnicas aplicables a sistemas en los cuales, si bien la estructura del sistema es conocida, todos o algunos de sus parámetros son desconocidos, ya sea por su naturaleza variante en el tiempo [Landau et al. 1998]. En estos casos, los controladores con parámetros constantes suelen ser más conservadores y sus dinámicas menos flexibles que sus contrapartes adaptables, donde el mismo cambio de parámetros permite compensar e incluso conocer el valor de aquellos que son desconocidos.

En este sentido, en la literatura se reportan diversas estrategias de control adaptable [Khalil and Grizzle 1996, Ortega et al. 1998], desde el control adaptable en línea como fuera de línea. Sin embargo, la búsqueda de algoritmos no solamente adaptables, sino que añadan flexibilidad y robustez a las estrategias de control, ha llevado a proponer algoritmos que explotan las propiedades de pasividad en su diseño. En [Flores-Pérez et al. 2014], se realiza un análisis muy completo de los diversos esquemas de control adaptable basado en pasividad, así como

un estudio de su aplicación general cuando los parámetros son lineales con respecto del regresor, o incluso cuando éstos pueden ser acotados mediante funciones monótonicamente crecientes y existe un control *ideal* que logre la tarea de control. Algunos ejemplos son las estrategias basadas en el gradiente [Ortega et al. 1998] y el gradiente compuesto [Slotine and Li 1989], incluyendo el novedoso algoritmo proporcional-integral [Ortega et al. 1998, Tyukin et al. 2007] que añade grados de libertad a la regla de adaptación de parámetros.

En este trabajo se muestra la aplicación de estos algoritmos en el caso particular de un sistema de dos tanques en cascada, tanto en simulación como en resultados experimentales en una plataforma física. En la sección II se describe el sistema y la parametrización empleada, describiendo en la Sección III el algoritmo adaptable pasivo empleado para su control. En la sección IV se muestran los resultados en simulación y experimentales, mostrando la efectividad del algoritmo. Finalmente, en la Sección V se dan las conclusiones del trabajo.

### 2. SISTEMA DE DOS TANQUES EN CASCADA

El sistema de dos tanques en cascada, mostrado en la Fig. 1, consiste de dos almacenadores de líquido cilíndricos de área seccional uniforme  $A$ . El primer tanque recibe un flujo de líquido  $u(t)$ , el cual a través de un orificio de área seccional  $a_1$  situado en la base inferior vierte líquido al segundo tanque, el cual a su vez lo vierte a un almacenador a través de un segundo orificio de área

---

<sup>★</sup> Los autores desean expresar su agradecimiento por su apoyo a: la Secretaría de Ciencia, Tecnología e Innovación del Distrito Federal y a la Universidad Autónoma de la Ciudad de México mediante los proyectos UACM-PI2014-65, UACM-PI2013-25; a la Universidad Nacional Autónoma de México a través del proyecto PAPIIT-IN-113615 y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

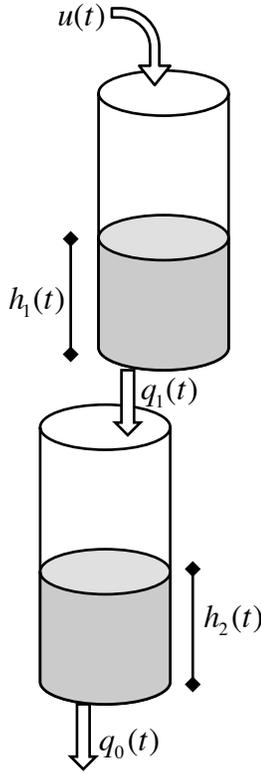


Figura 1. Sistema de dos tanques en cascada

seccional  $a_2$ . El primer tanque a su vez tiene la opción de desfogar directamente el flujo al tanque principal con un orificio de área seccional regulable, el cual no se considera para este trabajo.

De esta forma, partiendo de la ley de Bernoulli para el flujo de líquidos a través de orificios pequeños, el modelo del sistema está dado por

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{A}\sqrt{|x_1|} - \frac{c_3}{A}\sqrt{|x_1|} + \frac{1}{A}u(t) \\ \frac{c_1}{A}\sqrt{|x_1|} - \frac{c_2}{A}\sqrt{|x_2|} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

donde  $x_1 = h_1$ ,  $x_2 = h_2$  son las alturas de los tanques,  $c_1 = a_1\sqrt{2g}$ ,  $c_2 = a_2\sqrt{2g}$ ,  $c_3 = a_3\sqrt{2g}$  y  $g$  la aceleración originada a la gravedad.

### 3. CONTROL ADAPTABLE PASIVO

Si no se permite el desfogue del primer tanque hacia el principal, entonces  $c_3 = 0$ . De esta forma, del sistema (1), considerando la parametrización  $\theta_1 = \frac{c_1}{A}$ ,  $\theta_2 = \frac{c_2}{A}$  se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -\theta_1\sqrt{x_1} + \frac{1}{A}u(t) \\ \theta_1\sqrt{x_1} - \theta_2\sqrt{x_2} \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} -\theta_1\sqrt{x_1} \\ \theta_1\sqrt{x_1} - \theta_2\sqrt{x_2} \end{pmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{A} \\ 0 \end{pmatrix}}_{g(x)}u(t), \\ y &= h(x) = \sqrt{x_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Definiendo el difeomorfismo  $z = T(x)$ :

$$z_1 = h(x) = \sqrt{x_2}, \quad (3)$$

$$z_2 = L_f h(x) = -\frac{\theta_2}{2} + \frac{\theta_1}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}, \quad (4)$$

resulta en el sistema transformado

$$\dot{z} = A_c z + B_c \gamma(x) (u(t) - \alpha(x)), \quad (5)$$

con la salida definida por

$$y(t) = h(x) = \sqrt{x_2}, \quad (6)$$

donde

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^2 h(x)}{L_g L_f h(x)}, \quad (7)$$

$$= -\frac{A\sqrt{x_1}(\theta_1(x_1 + x_2) - \theta_2\sqrt{x_1 x_2})}{x_2}, \quad (8)$$

$$= -\theta_2 A \frac{x_1}{\sqrt{x_2}} + \theta_1 A \left( \frac{x_1^{3/2}}{x_2} + \sqrt{x_1} \right), \quad (9)$$

$$\gamma(x) = L_f h(x), \quad (10)$$

$$= \frac{\theta_1}{4A\sqrt{x_1 x_2}}, \quad (11)$$

$$(12)$$

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Para el diseño de control, se define a la realimentación de estados *ideal*, asumiendo todos los parámetros conocidos:

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \alpha(x) + \frac{1}{\gamma(x)}v(t), \\ &= \theta_2 \phi_1(x) + \theta_1 \phi_2(x) + \frac{1}{\gamma(x)}v(t), \end{aligned} \quad (14)$$

donde

$$\phi_1(x) = -A \frac{x_1}{\sqrt{x_2}} \quad (15)$$

$$\phi_2(x) = \theta_1 A \left( \frac{x_1^{3/2}}{x_2} + \sqrt{x_1} \right) \quad (16)$$

Sin embargo, si el parámetro  $\theta_2$  es desconocido, entonces el controlador se define mediante la estimación  $\hat{\theta}_2$ ,

$$u(t) = \hat{\theta}_2(t)\phi_1(x) + \phi_2(x) + \frac{1}{\gamma(x)}v(t), \quad (17)$$

con lo cual el sistema en lazo cerrado resultante es

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{pmatrix} z_2 \\ \gamma(x) \left( \hat{\theta}_2\phi_1 + \phi_2(x) - \theta_2\phi_1(x) - \phi_2(x) + \frac{1}{\gamma(x)}v(t) \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_2 \\ \tilde{\theta}_2\gamma(x)\phi_1(x) + v(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con  $\tilde{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta_2$ .

Al definir  $v(t) = -k_s s + \dot{y}_r$ , donde  $s = \dot{y} - \dot{y}_r$ ,  $k_s > 0$ ,  $y_r$  la señal de referencia obtenida a partir de  $\dot{y}_r = \dot{y}_d - \lambda e$ ,  $\lambda > 0$ , con  $e = y(t) - y_d(t)$  la señal de error, se obtiene la dinámica en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{pmatrix} z_2 \\ \gamma(x) \left( \hat{\theta}_2\phi_1 + \phi_2(x) - \theta_2\phi_1(x) - \phi_2(x) + \frac{1}{\gamma(x)}v \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_2 \\ \tilde{\theta}_2\gamma(x)\phi_1(x) - k_s s + \dot{y}_r \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

A partir de la definición de  $s$ , se obtiene

$$\dot{s} = \tilde{\theta}_2\gamma(x)\phi_1(x) - k_s s. \quad (20)$$

De esta forma, se busca la existencia de un algoritmo pasivo desde  $s \rightarrow -\gamma(x)\phi_1(x)\tilde{\theta}$  [Flores-Pérez et al. 2014] tal que cumpla con la condición

$$-\int_0^t s\gamma(x)\phi_1(x)\tilde{\theta}_2 d\tau \geq -\beta, t > 0, \beta > 0, \quad (21)$$

Con base en que exista un algoritmo tal que cumpla con (21), se define la función positiva definida,

$$V(s, \tilde{\theta}_2) = \frac{1}{2}s^2 + \beta - \int_0^t s\gamma(x)\phi_1(x)\tilde{\theta}_2 d\tau > 0, \quad (22)$$

cuya derivada en el tiempo es

$$\dot{V} = -k_s s^2 \leq 0 \quad (23)$$

Dado que por definición

$$s = \dot{y} - \dot{y}_r = \dot{y} - (\dot{y}_d - \lambda e) \quad (24)$$

$$= (\dot{y} - \dot{y}_d) + \lambda e \quad (25)$$

$$= \dot{e} + \lambda e \quad (26)$$

Entonces,  $s \in L_2 \Rightarrow e \in L_2 \cap L_\infty$ ,  $\dot{e} \in L_2$ , en consecuencia,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$ . Si además  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e} = 0$  entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e} = 0$ . Si además  $\tilde{\theta} \in L_\infty$ , entonces como  $\dot{s} \in L_\infty$  y asumiendo la existencia del algoritmo pasivo descrita previamente, entonces por el Lema de Barbalat,  $\lim_{t \rightarrow \infty} s = 0$ .

Del resultado anterior, y así como se menciona en Flores-Pérez et al. [2014], se pueden elegir diversos algoritmos adaptables que cumplan con la condición (21), siendo uno de ellos el algoritmo adaptable proporcional-integral, basado en el presentado por Tyukin et al. [2007].

### 3.1 Algoritmo pasivo Proporcional-Integral

Un algoritmo que cumple con (21) está dado por la (18)descomposición de  $\hat{\theta}_2$  en un término proporcional y uno integral, ambos dependientes de  $s$ :

$$\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_{2-I}(t) + \hat{\theta}_{2-P}(s), \quad (27)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{2-P} &= -\delta_P \gamma(x)\phi_1(x)s, \\ \dot{\hat{\theta}}_{2-I} &= -\delta_I \gamma(x)\phi_1(x)s; \end{aligned} \quad (28)$$

y  $\tilde{\theta}_2 = \tilde{\theta}_{2-I} + \tilde{\theta}_{2-P}$  con el error de parámetros  $\tilde{\theta}_{2-I} = \hat{\theta}_{2-I} - \theta_{2-I}$ ,  $\tilde{\theta}_{2-P} = \hat{\theta}_{2-P}$ .

Se define la función positiva definida

$$V_2 = \frac{1}{2\delta_I} \tilde{\theta}_{2-I}^2. \quad (29)$$

Al derivar se obtiene

$$\dot{V}_2 = \frac{1}{\delta_I} (-\delta_I \gamma(x)\phi_1(x)s)\tilde{\theta}_{2-I} \quad (30)$$

$$= \tilde{\theta}_{2-I} \gamma(x)\phi_1(x)s = -(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_{2-P})\gamma(x)\phi_1(x)s \quad (31)$$

$$= -\tilde{\theta}_2 \gamma(x)\phi_1(x)s - \delta_P \gamma^2(x)\phi_1^2(x)s^2 \quad (32)$$

$$\leq -\tilde{\theta}_2 \gamma(x)\phi_1(x)s \quad (33)$$

Por lo tanto, el algoritmo (28) es pasivo de  $s \rightarrow -\gamma(x)\phi_1(x)\tilde{\theta}_2$ , en consecuencia, cumple con la condición (21).

## 4. RESULTADOS

### 4.1 Resultados en simulación

Para los resultados en simulación se emplean los parámetros del sistema de tanques de Quanser *Two-Tank System*, con los parámetros  $A = 15,52 \text{ cm}^2$ ,  $a_1 = a_2 = 0,1781 \text{ cm}^2$ . El controlador se diseñó empleando  $k_s = 1$ ,  $\lambda = 0,1$ ,  $\delta_I = 10$ ,  $\delta_P = 10$ , considerando una altura deseada  $h_{2-d}(t) = 2 \sin(0,1t) + 8 \text{ [cm]}$  y un flujo máximo de  $u_{max} = 40 \text{ [cm}^3/\text{s]}$ . Con estos parámetros, el valor real de  $\theta_2 = 0,5083$ . En la Fig. 2 se muestran los resultados obtenidos, donde se puede notar que el parámetro  $\hat{\theta}_2$  converge al valor real, mientras que el sistema permanece estable y la salida tiende en forma asintótica a la referencia. Por su parte, en la Fig. 3 se muestra el resultado del controlador cuando se aplica un cambio en el parámetro real del 20% en  $t_1 = 260 \text{ s}$ ,

donde se aprecia que el algoritmo reconstruye el cambio en el parámetro y vuelve a converger, y el error vuelve a tender a cero.

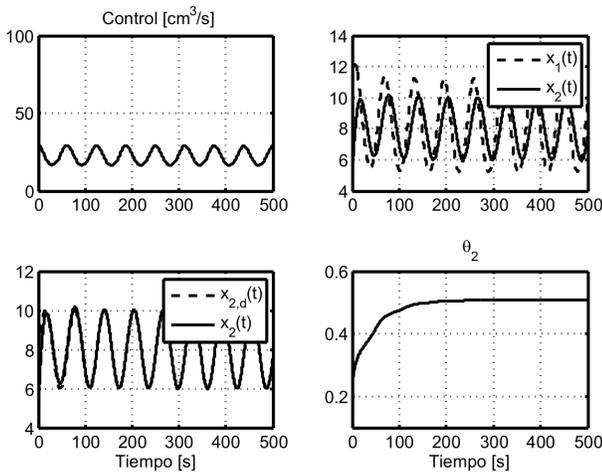


Figura 2. Resultados en simulación del algoritmo adaptable pasivo PI

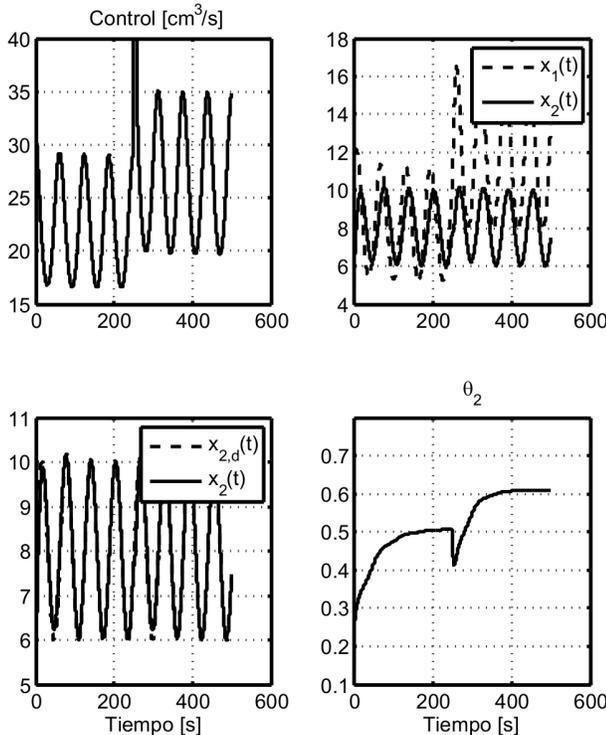


Figura 3. Resultados en simulación del algoritmo adaptable pasivo PI con cambio de parámetro.

#### 4.2 Resultados experimentales

El mismo algoritmo empleado en las simulaciones fue implementado en una plataforma experimental, empleando para ello el software *LabView* con un tiempo de muestreo uniforme de  $50\text{ms}$ . Los resultados en la plataforma experimental se muestran en la Fig. 4. Dado el ruido y

perturbaciones presentes en el sistema, se puede apreciar que la señal de control resulta saturada entre los valores mínimo y máximo, presentando conmutaciones de alta frecuencia entre ellos. Con fines de presentación, la señal de control se muestra filtrada en la Fig. 4.b. En esta plataforma experimental se puede apreciar cómo la señal de salida deseada es seguida por el sistema.

Por otra parte, en la Fig. 5 se muestran los resultados experimentales al modificar la apertura  $a_2$  en el sistema en  $t = 260\text{s}$ . En este caso, se puede apreciar cómo el parámetro varía tras aplicar la variación de  $a_2$  y cómo, en la Fig. 5.a, la altura recupera el valor de la salida deseada.

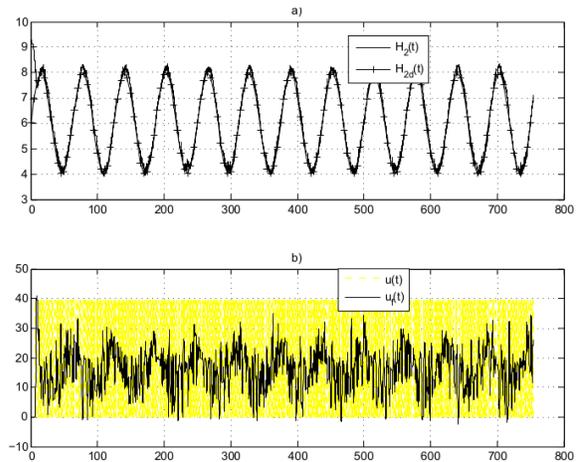


Figura 4. Resultados experimentales del algoritmo adaptable pasivo PI

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se mostró el diseño de un control adaptable pasivo para el sistema de dos tanques en cascada, donde el parámetro del segundo tanque se asume desconocido. Se comprobó que el algoritmo proporcional-integral es pasivo desde una variable dependiente del error de seguimiento hacia una función dependiente del error de parámetros y el regresor. Se mostraron resultados en simulación y experimentales que demuestran la efectividad del algoritmo propuesto, así como las técnicas de diseño que a partir del mismo pueden aplicarse.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento por su apoyo a: la Secretaría de Ciencia, Tecnología e Innovación del Distrito Federal y a la Universidad Autónoma de la Ciudad de México mediante los proyectos UACM-PI2014-65, UACM-PI2013-25; a la Universidad Nacional Autónoma de México a través del proyecto PAPIIT-IN-113615 y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

## REFERENCIAS

Flores-Pérez, A., Grave, I., and Tang, Y. (2014). Comparative analysis of passive algorithms in adaptive

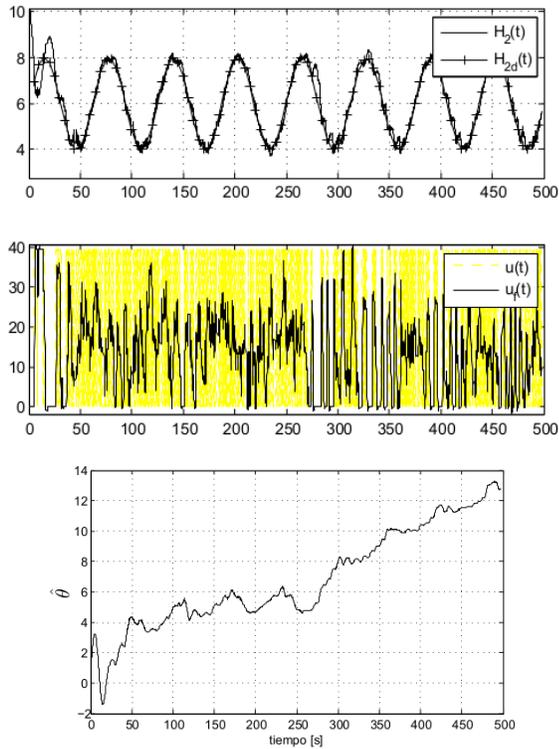


Figura 5. Resultados experimentales del algoritmo adaptable pasivo PI con perturbación en  $t = 260s$ .

control. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 28(10), 1043–1053.

Khalil, H.K. and Grizzle, J. (1996). *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall New Jersey.

Landau, I.D., Lozano, R., M'Saad, M., et al. (1998). *Adaptive control*, volume 51. Springer Berlin.

Ortega, R., Loria, A., Nicklasson, P.J., and Sira-Ramirez, H. (1998). *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: mechanical, electrical and electromechanical applications*. Springer.

Slotine, J.J.E. and Li, W. (1989). Composite adaptive control of robot manipulators. *Automatica*, 25(4), 509–519.

Tyukin, I.Y., Prokhorov, D.V., and van Leeuwen, C. (2007). Adaptation and parameter estimation in systems with unstable target dynamics and nonlinear parametrization. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 52(9), 1543–1559.