

# Control Óptimo de Tráfico Vehicular Urbano basado en un Esquema Estimador-Controlador

C. Portilla A. Marquez J. Espinosa

Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia  
(e-mail: { crportil, amarque, jjespino } @unal.edu.co).

---

Resumen: Este artículo presenta un esquema estimador-controlador para un modelo matemático lineal de tráfico vehicular (modelo de transmisión de celdas), basado en un modelo no lineal (modelo S), el cual cumple el papel de modelo ideal y de sistema real. Los resultados son obtenidos a través de simulación y determinan el desempeño tanto de la estimación de los parámetros del modelo lineal como de los controladores propuestos.

*Keywords:* Control de tráfico, estimación de parámetros, control predictivo, sistemas dinámicos, filtro de Kalman.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Los últimos 50 años han sido producto de grandes cambios sociales, culturales, económicos y tecnológicos, que han desembocado en la creación de un nuevo modelo de movilidad urbana y en el incremento de las distancias recorridas y de los tiempos de viaje diarios de las personas (Mollinedo, 2006). Esto debido a la congestión vehicular causada principalmente por factores como el aumento desmesurado del parque automotor, la insuficiencia y precariedad de las vías existentes o la deficiente gestión de la movilidad, entre otros. Además, dicha congestión trae consigo contaminación visual y auditiva que impacta negativamente en el bienestar de los ciudadanos (Zegeye et al., 2010).

Esta problemática deja en evidencia la necesidad de crear métodos que permitan administrar de mejor manera los recursos existentes (infraestructura vial), ya que no siempre es factible la ampliación de la malla vial. Para ello, el diseño de estrategias de control se ha acogido como una posible solución (van den Berg et al., 2006). Dentro de estas estrategias, el control óptimo se perfila como una alternativa en la gestión de tráfico vehicular, pues incorpora un modelo de predicción, restricciones explícitas y diferentes formulaciones de funciones objetivo (Kotsialos et al., 2002; Bellemans et al., 2006; Hegyi et al., 2005). En la actualidad es convencional el uso de modelos de tráfico no lineales para la descripción del tráfico vehicular urbano (Lin et al., 2009; van den Berg et al., 2003), sin embargo, cuando se usan en esquemas de control predictivo basado en modelo (MPC), pueden llegar a soluciones subóptimas (no se alcanza un óptimo global) o a inconvenientes en la implementación debido al alto costo computacional. En este sentido, se han propuesto algunos modelos lineales (Yang et al., 2010; Daganzo, 1995; Le et al., 2013; Dinopoulou et al., 2006), que describen de manera sencilla el comportamiento del tráfico, pero que necesitan ser validados para que representen de forma correcta la dinámica de una red en particular.

El objetivo de este artículo es comparar el desempeño de un esquema de control predictivo basado en modelo lineal (MPC) con un esquema no lineal (NMPC). Esto con el fin de demostrar que para intersecciones aisladas, el uso de modelos

sencillos (lineales) permiten estimar sus parámetros, disminuir la carga computacional, tener un buen desempeño y una fácil implementación.

El presente artículo se divide de la siguiente manera: en la sección 2 se introducen los modelos matemáticos, lineal y no lineal, que describen el comportamiento del tráfico vehicular para una intersección aislada. Luego, en la sección 3 se realiza la estimación de parámetros del modelo lineal con base en el modelo no lineal. Seguidamente, en la sección 4 se formulan los esquemas de control mediante la solución de problemas de optimización con restricciones. Finalmente, en las secciones 5 y 6 se presentan los resultados de simulación y las conclusiones.

## 2. MODELADO DE TRÁFICO VEHICULAR

En esta sección se presentan dos modelos relevantes de tráfico vehicular, con el fin de describir de manera dinámica el comportamiento del flujo de vehículos en una intersección aislada. Dichos modelos, lineales y no lineales, servirán como modelo de predicción en la formulación de controladores predictivos basados en modelo (MPC).

### 2.1 Modelo Basado en Redes Multiclase de Colas

El modelo basado en redes multiclase de colas (MMC) descrito por van Leeuwen y presentado en Le et al. (2013), se basa en la clasificación de diferentes elementos contenidos en una red vehicular. Para un ciclo de luces de tráfico  $n$ , en este modelo  $U(n)$  representa las fracciones de tiempo permitidas para la salida de vehículos y los estados  $X(n)$  están representados por la cantidad de vehículos presentes, de acuerdo a cuatro factores: el retardo ( $D$ ), la ruta ( $R$ ), la cola ( $Q$ ) y el sumidero ( $S$ ).

En la Figura 1 se muestra un segmento vehicular urbano representado mediante el modelo multiclase de colas. En la Figura 1 pueden verse todas las clases  $D$ ,  $R$ ,  $Q$  y  $S$ , donde la clase -retardo ( $D$ )- representa el tráfico en flujo libre para la porción de la vía que solo tiene una opción de evolución; otra clase  $D$  o una clase  $R$ . La clase -ruta ( $R$ )- constituye la porción de la vía que se encuentra antes de las colas y que tiene la capacidad de dividir el flujo en diferentes colas. De igual manera la clase -cola

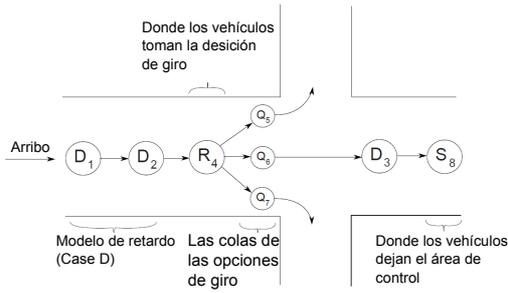


Figura 1. Segmento de una red mediante MMC (Le et al., 2013)

( $Q$ )- es una porción de la vía donde los vehículos esperan ser distribuidos en otro enlace de la vía; ya sea sumidero o retardo. Finalmente la clase -sumidero ( $S$ ) o receptor- aunque no tiene evolución hacia otra clase, sirve como contador de vehículos para determinar las preferencias de rutas de los usuarios. Cabe aclarar que todas las vías pueden ser multi-carril y cada clase  $k$  tiene asociada una capacidad máxima de vehículos  $c_k$ , excepto los sumideros.

Cada enlace  $j$  tiene asociado un flujo máximo  $f_j$  de salida que puede ir de  $s_j$  a  $d_j$  en una unidad de tiempo. De igual manera, una fracción de tiempo  $u_j(n)$ , es el tiempo que la intersección  $j$  está activa. De esta manera, es posible calcular el número de vehículos que dejan la clase  $s_j$  como  $f_j u_j(n)$ , en términos generales, el número de vehículos que abandonan una clase  $k$  cualquiera es:  $\sum_{j:s_j=k} f_j u_j(n)$ , mientras los vehículos que llegan a la clase  $k$  serán:  $\sum_{j:d_j=k} f_j u_j(n)$ . Además, se puede considerar un flujo de arribo a una clase en una unidad de tiempo, sin que este provenga de alguna clase definida, esto se denominará flujo de arribo ( $a_k(n)$ ).

De forma general en (1) la evolución dinámica del número de vehículos para cualquier clase  $k$  Le et al. (2013).

$$x_k(n+1) = x_k(n) + a_k(n) + \sum_{j:d_j=k} f_j u_j(n) - \sum_{j:s_j=k} f_j u_j(n) \quad (1)$$

## 2.2 Modelo S

Para la descripción del modelo S Lin et al. (2009) se definen dos estados en cada uno de los links; uno para representar el número de vehículos en el link  $\eta_{u,d}(k)$  y el otro para representar la dinámica del número de vehículos en cada una de las tres colas  $q_{u,d,o_i}(k)$ . De acuerdo con la Figura 2 se va a usar la siguiente notación: el par  $(u, d)$  representa el sentido de marcha de los vehículos por la vía entre un punto de referencia  $u$  hacia otro punto  $d$ . Por lo tanto, el modelo matemático que describe el comportamiento de tráfico urbano es determinado por las siguientes ecuaciones:

$$\eta_{u,d}(k+1) = \eta_{u,d}(k) + (\alpha_{u,d}^{\text{entrada}}(k) - \alpha_{u,d}^{\text{salida}}(k)) \quad (2)$$

$$q_{u,d,o_i}(k+1) = q_{u,d,o_i}(k) + (\alpha_{u,d,o_i}^{\text{arribo}}(k) - \alpha_{u,d,o_i}^{\text{salida}}(k)) \quad (3)$$

con  $i \in \{1, 2, 3\}$ , donde el flujo de entrada al link proviene de los vehículos de los links adyacentes dado por  $\alpha_{u,d}^{\text{entrada}} = \sum_{i \in I_{u,d}} \alpha_{i,u,d}^{\text{salida}}(k)$ . En tanto, el flujo de salida de cada link  $\alpha_{u,d}^{\text{salida}}(k) = \sum_{o \in O_{u,d}} \alpha_{u,d,o_i}^{\text{salida}}(k)$ , es igual a la cantidad de vehículos que salen a los links adyacentes.

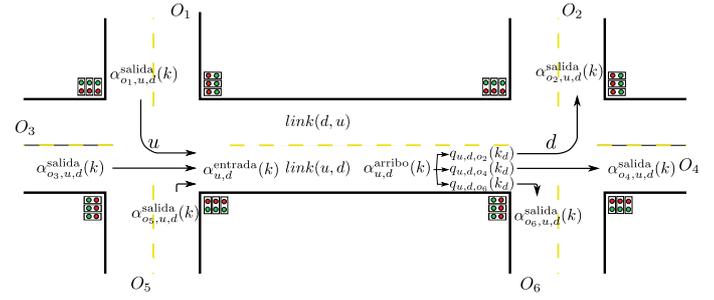


Figura 2. Dos intersecciones interconectadas en una red de tráfico urbano representada mediante las variables del modelo S

El flujo de salida mostrado en (4) depende de las condiciones físicas de la vía, específicamente del valor mínimo entre la capacidad de la intersección, el número de vehículos esperando y/o llegando, y el espacio disponible en el flujo de salida del siguiente link:

$$\alpha_{u,d,o_i}^{\text{salida}}(k) = \min \left\{ \frac{\mu_{u,d,o_i} g_i(k)}{c_d}, \frac{q_{u,d,o_i}(k)}{c_d} + \alpha_{u,d}^{\text{arribo}}(k), \frac{\beta_{u,d,o_i}(k)(C_{d,o_i} - \eta_{d,o_i}(k))}{c_d} \right\} \quad (4)$$

donde  $c_d$ ,  $\mu_{u,d,o_i}$ ,  $g_i(k)$ ,  $\beta_{u,d,o_i}(k)$ ,  $\eta_{d,o_i}(k)$  y  $C_{d,o_i}$  representan el ciclo de tiempo, flujo máximo de salida de vehículos por carril, el tiempo de la señal en verde en el paso  $k$ , la fracción de vehículos que van a seguir en cada dirección dentro del link, el número de vehículos en el link  $(d, o)$  en el paso  $k$  y la capacidad del link  $(d, o)$  respectivamente.

Para la variable de estado  $q_{u,d,o_i}(k)$ , el flujo de vehículos que llega a cada una de las colas proviene de una fracción ( $\beta_{u,d,o}$ ) del flujo total de vehículos que entran al link ( $\alpha_{u,d}^{\text{entrada}}(k)$ ):

$$\alpha_{u,d,o_i}^{\text{arribo}}(k) = \beta_{u,d,o_i} \alpha_{u,d}^{\text{arribo}}(k) \quad (5)$$

donde el flujo que entra en el link  $(u, d)$  que va a arribar a la cola de las colas después de un tiempo de espera de  $\tau(k)c_d + \gamma(k)$ , es:

$$\alpha_{u,d}^{\text{arribo}}(k) = \frac{c_d - \gamma(k)}{c_d} \alpha_{u,d}^{\text{entrada}}(k - \tau(k)) + \frac{\gamma(k)}{c_d} \alpha_{u,d}^{\text{entrada}}(k - \tau(k) - 1) \quad (6)$$

$$\text{con } \tau(k) = \text{floor} \left\{ \frac{C_{u,d} - q_{u,d}(k) l_{\text{veh}}}{N_{u,d}^{\text{lane}} v_{u,d}^{\text{libre}} c_d} \right\} \text{ y } \gamma(k) = \text{rem} \left\{ \frac{C_{u,d} - q_{u,d}(k) l_{\text{veh}}}{N_{u,d}^{\text{lane}} v_{u,d}^{\text{libre}} c_d} \right\},$$

donde  $l_{\text{veh}}$ ,  $N_{u,d}^{\text{lane}}$ ,  $C_{u,d}$  y  $v_{u,d}^{\text{libre}}$  representan respectivamente: la longitud promedio de los vehículos, el número de carriles en el link  $(u, d)$ , la capacidad del link  $(u, d)$  y el flujo libre promedio. Con el número de vehículos esperando en la cola del link  $(u, d)$   $q_{u,d}(k) = \sum_{o \in O_{u,d}} q_{u,d,o_i}(k)$ . De esta manera, con (2) - (6) se describe completamente el Modelo S Lin et al. (2009) para intersección vehicular aislada.

## 3. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

Con el fin de simular en lazo abierto el modelo lineal (1), se hace necesario validar sus dinámicas por medio de la identificación de parámetros, tomando como sistema de referencia el

modelo S (2) – (6), pues este ha sido validado exitosamente Lin et al. (2009). Para este fin se usa el filtro de Kalman, el cual permite estimar variables asumiendo incertidumbre de modelado y ruido en las mediciones.

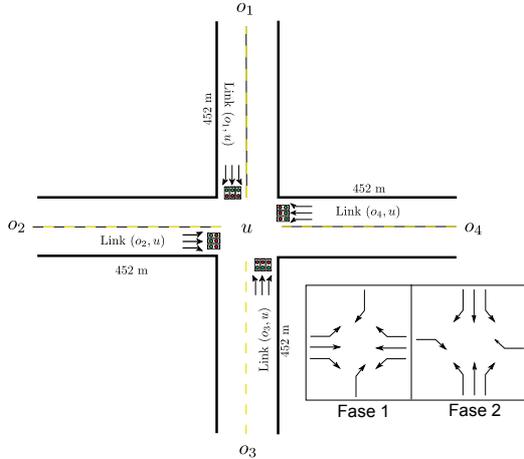


Figura 3. Intersección aislada de una red de tráfico urbano y fases de semáforo

La Figura 3 muestra una intersección aislada típica ( $u$ ), compuesta por 4 links de origen  $O = \{o_1, o_2, o_3, o_4\}$ , los cuales permiten la entrada de vehículos desde la red de tráfico a la intersección ( $u$ ). Además, se consideran 4 links  $L_u = \{(o_1, u), (o_2, u), (o_3, u), (o_4, u)\}$ , los cuales conectan el conjunto de orígenes ( $O$ ) con la intersección ( $u$ ). Además se presentan las fases para el conjunto señales de semáforo de la intersección  $u$ , donde se muestran las combinaciones de sentidos de giro permitidos. Las señales de semáforo asociadas a la fase 1 se denotan como  $g_u^{F1}(k)$ , y las señales de semáforo asociadas a la fase 2 se denotan como  $g_u^{F2}(k)$ . Teniendo en cuenta que el tiempo total de la señal en verde, de las fases mostradas en la Figura 3, es exactamente el tiempo de ciclo del semáforo ( $c_d$ ), es posible relacionar estas variables como sigue:

$$g_u^{F2}(k) = c_d - g_u^{F1}(k) \quad (7)$$

Tabla 1. Parámetros Modelo S

Parámetro	Valor nominal	Parámetro	Valor
$c_d$	60 (s)	$\mu_{u,d,o_i}$	1.800 (veh/h/carril)
$\beta_{u,d,o_i}(k)$	1/3	$C_{u,d}$	64 (veh/carril)
$l_{veh}$	7 (m)	$N_{u,d}^{lane}$	3
$v_{libre}$	60 (km/h)	$g_u^{F1}(k)$	31 (s)

En la Tabla 1 se condensan los parámetros típicos que contempla el modelo S Lin et al. (2009) para una intersección.

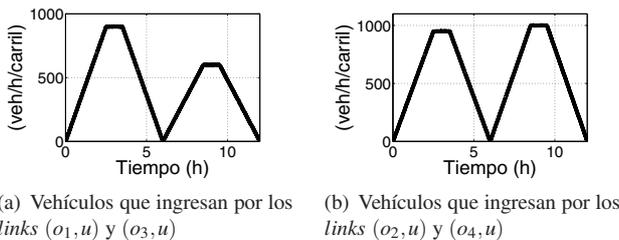


Figura 4. Perfiles de demanda de vehículos de la intersección  $u$   
 Partiendo de la notación definida en la Figura 3, se definen los perfiles de demanda de vehículos que ingresan a la intersección

$u$  como se muestran en la Figura 4; estos tienen una tendencia trapezoidal para periodos de 6 h en 12 h de simulación. Se asume la respuesta obtenida con el modelo S como el sistema real (planta) y se validan mediante simulación todos los modelos descritos. Para lograrlo se deben reescribir las ecuaciones de los modelos de tráfico vehicular como se muestra en (8), con el fin de estimar los parámetros necesarios a través de la formulación general del Filtro de Kalman Kalman (1960).

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + B_w \omega_k \\ y_k &= Cx_k + v_k \end{aligned} \quad (8)$$

donde  $\omega_k \sim (0, Q)$  y  $v_k \sim (0, R)$  son la incertidumbre de modelado y de medición respectivamente. De manera general, el filtro de Kalman se ejecuta en dos pasos: predicción y corrección ejecutándose cíclicamente Kalman (1960). La predicción se encarga de proyectar en el tiempo los estados estimados y de la covarianza del error, en tanto la corrección actualiza la ganancia de Kalman, los estados estimados y dicha covarianza.

A continuación se presenta la estimación de parámetros, la validación y la simulación de los modelos propuestos en el Capítulo 2.

### 3.1 Estimación de parámetros del modelo multiclase de Colas

La intersección aislada mostrada en la Figura 3, se representa gráficamente en la Figura 5 por medio del modelo multiclase de colas. Con el fin de simular el MMC y teniendo en cuenta a (1), se describe a manera de ejemplo el modelo que representa al link  $(o_1, u)$  en la ecuación (9).

$$\begin{aligned} x_{D_1}(k+1) &= x_{D_1}(k) + a_{D_1}(k) - u_1(k)f_1 \\ x_{R_2}(k+1) &= x_{R_2}(k) + u_1(k)f_1 - u_2(k)f_2 - u_3(k)f_3 - u_4(k)f_3 \\ x_{Q_3}(k+1) &= x_{Q_3}(k) + u_2(k)f_2 - g_u(k)f_{o_1,u} \\ x_{Q_4}(k+1) &= x_{Q_4}(k) + u_3(k)f_3 - g_u(k)f_{o_1,u} \\ x_{Q_5}(k+1) &= x_{Q_5}(k) + u_4(k)f_4 - g_u(k)f_{o_1,u}. \end{aligned} \quad (9)$$

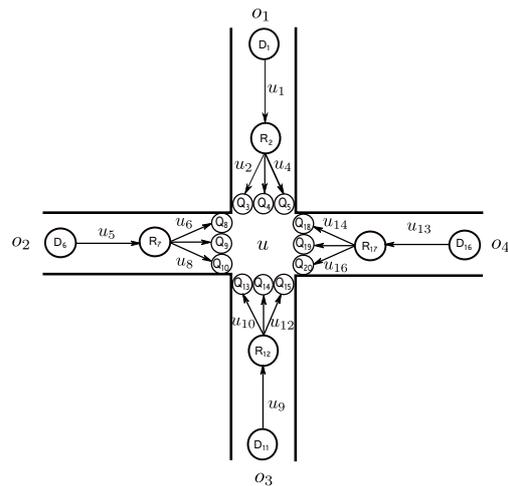


Figura 5. Intersección aislada modelada mediante MMC

En este sentido, para el modelo completo el vector  $F = [f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15}, f_{16}, f_{o_1,u}, f_{o_2,u}, f_{o_3,u}, f_{o_4,u}]$  es el flujo de máxima saturación, es decir 5400 (veh/h),  $A = [a_{D_1}(k), a_{D_6}(k), a_{D_{11}}(k), a_{D_{16}}(k)]$  es el vector de demanda que corresponde al perfil mostrado en la Figura 4 (cabe aclarar que la demanda es por cada uno de los tres carriles),  $g_u(k)$  es la señal de verde del semáforo que

estará determinada por las fase de la Figura 3,  $U(k) = [u_1(k), u_2(k), u_3(k), u_4(k), u_5(k), u_6(k), u_7(k), u_8(k), u_9(k), u_{10}(k), u_{11}(k), u_{12}(k), u_{13}(k), u_{14}(k), u_{15}(k), u_{16}(k)]$  es el vector de parámetros que deben ser estimados y que corresponde a la fracción de flujo máximo que interactúa entre las celdas. Para este fin, se asume que  $U(k)$  son estados no medidos cuya dinámica es:

$$U(k+1) = U(k) + \omega_U(k) \quad (10)$$

donde  $\omega_U(k)$  es la incertidumbre de modelado del parámetro  $U(k)$ . De esta manera, las ecuaciones (9)–(10) pueden presentarse en espacio de estados de la forma (8), con el fin de obtener una estimación de los parámetros consignados en (10), a través de la medición del número total de vehículos en cada *link*. Los resultados de simulación en lazo abierto son presentados en las Figuras 6–8 y fueron realizados teniendo en cuenta el modelo S Lin et al. (2009), cuyas condiciones de simulación y parámetros fueron descritos en la introducción de la sección 3.

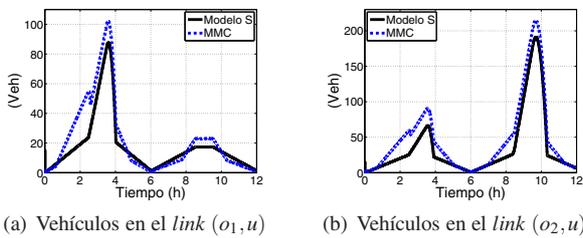


Figura 6. Número de vehículos representados con MMC.

La comparación del número de vehículos estimados y medidos en los *links*  $(o_1, u)$  y  $(o_2, u)$  se muestran en la Figura 6, donde el modelo lineal (MMC) sigue la tendencia de los datos reales (Modelo S). En la Figura 7 se muestran las estimaciones del número de vehículos que se encuentran en las colas de los 3 carriles; *links*  $(o_1, u)$  y  $(o_2, u)$ .

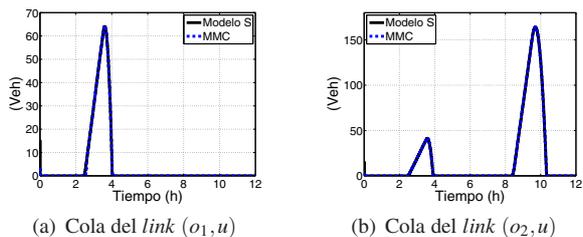
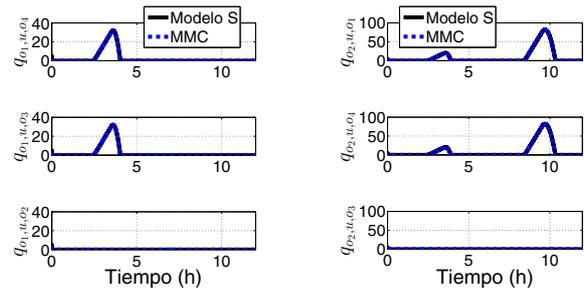


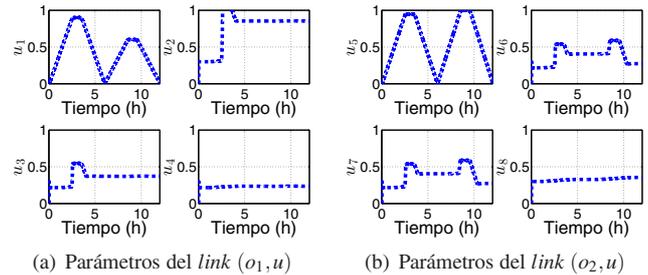
Figura 7. Total de vehículos en colas representados con MMC.

De manera individual, en las Figuras 8(a)–8(b) se muestran las estimaciones del número de vehículos en cada una de las colas de los *links*  $(o_1, u)$  y  $(o_2, u)$ , mostrando un comportamiento acorde al perfil de flujo de vehículos de entrada y a las fases de semáforos planteadas. Finalmente, en las Figuras 9(a)–9(b) se evidencian los parámetros estimados en los *links*  $(o_1, u)$  y  $(o_2, u)$ . Se puede ver que los estados  $u_1$  y  $u_5$  asociados a las celdas de retardo  $D_1$  y  $D_6$ , respectivamente, tienen un perfil similar a las demandas de la Figura 4. Por otro lado, los estados  $u_4$  y  $u_8$  se mantienen en un valor constante, pues están relacionados con los vehículos que giran hacia la derecha ( $q_{o_1, u, o_2}$  y  $q_{o_2, u, o_3}$ ), cuyo semáforo se permanece en verde (Ver Figura 4) y por lo tanto no hay acumulación (ver Figura 8).



(a) Colas del *link*  $(o_1, u)$  (b) Colas del *link*  $(o_2, u)$

Figura 8. Vehículos en las colas representados con MMC.



(a) Parámetros del *link*  $(o_1, u)$  (b) Parámetros del *link*  $(o_2, u)$

Figura 9. Estimación de parámetros del MMC.

De esta manera, se han estimado y validado los parámetros necesarios para que el MMC represente dinámicamente el comportamiento de los vehículos en una intersección aislada.

A continuación se analiza el desempeño de la estimación propuesta, con el fin de cuantificar la capacidad del MMC de representar el sistema real (Modelo S). El anterior análisis se realizó con base en la información obtenida en las Figuras 6–8, no obstante, es necesario cuantificar el desempeño de cada estimador, para lo cual se usa la sumatoria de la norma del error al cuadrado (ver (11)) como indicador.

$$E = \sum_{k=0}^{T_s} \frac{\|x(k) - \hat{x}(k)\|^2}{T_s} \quad (11)$$

donde  $T_s$  es el número de pasos totales de simulación,  $x(k)$  son los estados reales y  $\hat{x}(k)$  los estados estimados. Para el estado  $N_u$  el error de estimación es de 2.784,8 y para el estado  $Q_u$  el error es de 5.8.

#### 4. FORMULACIÓN DE ESQUEMAS DE CONTROL

En esta sección se formulan matemáticamente dos esquemas de control predictivo, basados en modelo (MPC), un caso no lineal (NMPC) para el Modelo S y un caso lineal (MPC) para el MMC. Debido a que el Modelo S es considerado la planta (o sistema real) y al mismo tiempo modelo de predicción, se toma como referencia ideal para comparar el desempeño del otro controlador.

##### 4.1 MPC basado en el modelo S (S-MPC)

Para la formulación del MPC se asume que el modelo descrito en la sección 2.2 puede escribirse de la siguiente manera:

$$x(k+1) = f_c(x(k), u(k)) \quad (12)$$

$$y(k) = g_c(x(k), u(k)) \quad (13)$$

donde  $x(k)$  es el vector de estados del sistema,  $u(k)$  es el vector de entradas que contiene el tiempo efectivo de verde de cada semáforo de la intersección  $u$ ,  $f_c(\cdot)$  es el modelo descrito por (2) – (6) y  $g_c(\cdot)$  es la función de salida del sistema.

En esta sección se considera el objetivo de minimizar el tiempo total de viaje (TTS) de los usuarios de la red, lo cual es equivalente a disminuir el número de vehículos en la red. De esta manera, el problema de optimización no lineal con restricciones presentado en (14)–(15), permite reducir el TTS. Para (14)–(15),  $U_k = [u(k)^T, \dots, u(k+N_p-1)^T]^T$  es una secuencia de control,  $\eta(t)$  es el número total de vehículos en el instante  $t$  y  $N_p$  es el horizonte o ventana de predicción. En (15) se restringe el número de vehículos  $\eta_{u,d}(k)$  entre cero y la capacidad máxima del link ( $C_{u,d}$ ), además el número de vehículos en las colas  $q_{u,d,o}(k)$  debe ser positivo y la señal de control  $g_{u,d,o}(k+t-1)$  debe estar entre cero y el tiempo de ciclo ( $c_d$ ) y mantenerse constante después del horizonte de control  $N_u$ . Para cada instante  $k$  se resuelve el problema de optimización formulada en (14)–(15), obteniendo como resultado una secuencia de control  $U_k$  cuyo primer componente ( $u(k)$ ) es aplicado al sistema.

$$\min_{U_k} \sum_{t=k}^{k+N_p} \sum_{\xi \in u} \eta_{\xi}(t) \quad (14)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x(k+t+1) &= f_c(x(k+t), u(k+t)) \\ x(k) &= x_k, \quad 0 \leq \eta_{u,d}(k+t) \leq C_{u,d} \\ 0 &\leq q_{u,d,o}(k+t), \quad 0 \leq g_{u,d,o}(k+t-1) \leq c_d \\ g_{u,d,o}(k+t-1) &= g_{u,d,o}(k+t) \quad \forall t \in N_u, \\ t &= 1, \dots, N_p, \xi \in u, \end{aligned} \quad (15)$$

#### 4.2 MPC Basado en MMC (MPC-MMC)

Con base en (1) y en el modelo completo presentado en (9), se asume que el MMC tiene una representación en espacios de estados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_k(n+1) &= Ax_k(n) + Bu_k(n) \\ y_k(n) &= Cx_k(n) \end{aligned} \quad (16)$$

Es posible considerar como objetivo de control la minimización del número de vehículos en todas las celdas de la intersección  $u$ , así como los cambios de la señal de verde del semáforo, de la siguiente manera

$$\min_{U(k)} \sum_{t=n}^{n+T_p} x_k(t)^T Q x_k(t) + \Delta U_k(t)^T R \Delta U_k(t) \quad (17)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x_k(n+t+1) &= Ax_k(n+t) + Bu_k(n) \\ x_k(n) &= x_k, \quad 0 \leq x_k(n) \\ 0 &\leq u_k(n+t-1) \leq 1, \quad t = 1, \dots, N_p \end{aligned} \quad (18)$$

donde  $T$  es el operador transpuesto,  $Q$  y  $R$  son matrices en cuya diagonal se establecen los pesos de cada variable, además  $\Delta U_k(n) = U_k(n) - U_k(n-1)$ . La optimización entrega como

resultado una secuencia de acciones de control, de la cual se escoge el primer término, es decir  $u_k(n)$  para ser aplicado al sistema. El problema presentado en (17)–(18) se resuelve para cada paso  $n$ .

## 5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Las simulaciones se realizaron con *Simulink 8.0, Matlab 2012b* y el *toolbox* de optimización incorporado, usando *fmincon* para la solución de los problemas de optimización no lineales y *quadprog* para los lineales. Teniendo en cuenta el caso de estudio mostrado en la Figura 3, se simuló el sistema teniendo en cuenta un esquema general estimación-control y un esquema de tiempo fijo (con los parámetros convencionales de la Tabla 1), que servirá como punto de comparación. En este tipo de esquemas, el estimador mide las variables necesarias para estimar los parámetros de cada modelo, y estos son transferidos al controlador, quien se encarga de encontrar las acciones de control óptimas (señal del semáforo) que permitan la solución del problema de optimización planteado, este tiempo de verde del semáforo ingresa finalmente a la intersección aislada que se describe mediante el modelo S. En las Figuras 10(a)– 10(b) se muestra la comparación del número de vehículos en los links ( $o_1, u$ ) y ( $o_2, u$ ), para los esquemas de control propuestos.

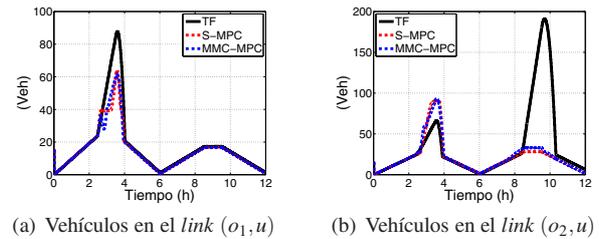


Figura 10. Comparación del número de vehículos en intersección  $u$  para los esquemas de control descritos.

En las Figuras 11(a)– 11(b) se compara el tamaño de cada una de las colas de los links ( $o_1, u$ ) y ( $o_2, u$ ) para cada uno de los esquemas de control propuestos. En la Figura 11(b) se presentan dos picos de acumulación de vehículos en la cola, que coinciden con los picos de demanda mostrados en la Figura 4. El primer pico se presenta a las 3 (h), donde el esquema de tiempo fijo (TF) llega a 40 (veh) para los carriles de flujo congestionado. En el segundo pico (6 (h)) se presenta la demanda máxima que soporta el sistema, donde las diferencias entre los esquemas son mayores. Es necesario recordar que en las fases de los semáforos para la intersección  $u$  (ver Figura 3), los giros a la derecha son permitidos en todo el tiempo de ciclo  $c_d$ , por lo tanto en este caso no se generan colas en los carriles asociados a este sentido de giro.

La Figura 12 muestra las acciones de control para cada configuración presentada. La señal de tiempo de verde del semáforo de la fase 1 y de la fase 2 se describen en las Figuras 12(a)–12(b), siendo la una el complemento de la otra, a fin de repartirse el tiempo de ciclo del semáforo (60 s).

Aunque gráficamente fue posible analizar algunas características de los resultados obtenidos, se deben usar algunos índices de desempeño a fin de cuantificar las diferencias entre los esquemas propuestos. Para ello, se presenta en (19) el tiempo total

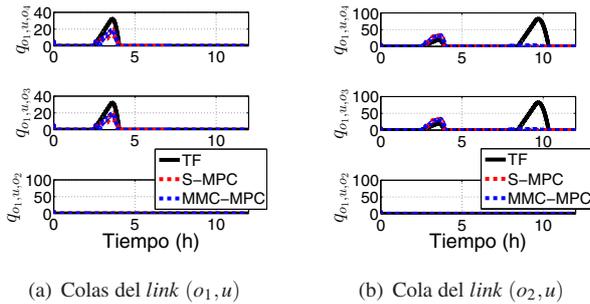


Figura 11. Comparación del número de vehículos en las colas de la intersección  $u$  para los esquemas de control descritos

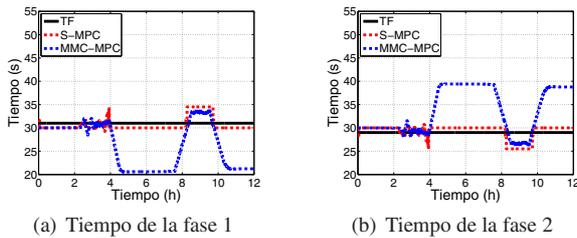


Figura 12. Comparación del tiempo de verde de los semáforos para los esquemas de control descritos.

gastado (TTS) y en (??) el número total de vehículos en las colas (QT).

$$TTS = \sum_{k=1}^{T_s} \eta(k)c_d, \quad QT = \sum_{k=1}^{T_s} \sum_{\xi \in u} q_{\xi}(k) \quad (19)$$

donde  $T_s$  es el número total de pasos de simulación,  $c_d$  es el tiempo de ciclo del semáforo y  $\eta(k)$  es el número total de vehículos en el tiempo  $k$ . Finalmente, en la Tabla 2 se condensan los resultados de los índices de desempeño (TTS y TQ) para cada uno de los esquemas de control planteados. Para los dos índices calculados, el esquema S-MPC obtuvo el mejor desempeño, sin embargo, el esquema basado en el MMC solo tiene una diferencia del 2.26% para el TTS y el 11.29% para el QT.

Tabla 2. Desempeño de los esquemas de control

Índice de Desempeño	Configuración	Valor	Diferencia
TTS	S-MPC	852.83	--
	MMC-MPC	872.11	2.26%
QT	S-MPC	10.45	--
	MMC-MPC	11.63	11.29%

## 6. CONCLUSIONES

En este artículo se revisaron algunos modelos lineales de tráfico para intersecciones aisladas, se estimaron mediante filtros de Kalman los parámetros necesarios para ser validados en una red representada dinámicamente mediante el modelo S. Finalmente, se formularon y compararon 2 esquemas de MPCs centralizados. El trabajo siguiente a este reporte es validar el modelo S a través de simulaciones microscópicas en SUMO (Simulation of Urban MObility).

## AGRADECIMIENTOS

Agradecimiento especial al Proyecto Colciencias 111856934640 contrato 941-2012 - Modelamiento y Control de tráfico urbano en la ciudad de Medellín- Convocatoria 569.

## REFERENCIAS

- Bellemans, T., De Schutter, B., and De Moor, B. (2006). Model predictive control for ramp metering of motorway traffic: A case study. *Control Engineering Practice*, 14(7), 757–767. doi:10.1016/j.conengprac.2005.03.010.
- Daganzo, C.F. (1995). The cell transmission model, part ii: Network traffic. *Transportation Research Part B: Methodological*, 29(2), 79 – 93.
- Dinopoulou, V., Diakaki, C., and Papageorgiou, M. (2006). Applications of the urban traffic control strategy {TUC}. *European Journal of Operational Research*, 175(3), 1652 – 1665.
- Hegyi, A., De Schutter, B., and Hellendoorn, H. (2005). Model predictive control for optimal coordination of ramp metering and variable speed limits. *Transportation Research Part C*, 13(3), 185–209. doi:10.1016/j.trc.2004.08.001.
- Kalman, R.E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering*, 82, 35 – 45. doi:doi: 10.1115/1.3662552.
- Kotsialos, A., Papageorgiou, M., Diakaki, C., Pavlis, Y., and Middelham, F. (2002). Traffic flow modeling of large-scale motorway networks using the macroscopic modeling tool metanet. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 3(4), 282–292.
- Le, T., Vu, H., Nazarathy, Y., Vo, B., and Hoogendoorn, S. (2013). Linear-quadratic model predictive control for urban traffic networks. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 80(0), 512 – 530.
- Lin, S., De Schutter, B., Xi, Y., and Hellendoorn, J. (2009). A simplified macroscopic urban traffic network model for model-based predictive control. In *In Proceedings of the 12th IFAC Symposium Control Transportation Systems*, volume 1, 286–291. Redondo Beach(CA), USA.
- Mollinedo, C. (2006). Movilidad urbana sostenible: un reto para las ciudades del siglo xxi. *Economía, Sociedad y Territorio*, 6(22), 283–321.
- van den Berg, A., Hegyi, A., De Schutter, B., and Hellendoorn, J. (2003). A macroscopic traffic flow model for integrated control of freeway and urban traffic networks. In *42nd IEEE Conference on Decision and Control, VOLS 1-6, Proceedings, 2774–2779*. 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Maui, HI, DEC 09-12, 2003.
- van den Berg, M., De Schutter, B., and Hellendoorn, H. (2006). Effects of on-ramp and off-ramp metering on queue forming in urban traffic networks. In *Proceedings of the 11th IFAC Symposium on Control in Transportation Systems*, 223–250. Delft, Netherlands.
- Yang, J., Zhang, L., Chen, Y., and Shi, L. (2010). Modeling and control of signaling split in urban traffic network based on hybrid systems. In *Natural Computation (ICNC), 2010 Sixth International Conference on*, volume 7, 3497–3502.
- Zegeye, S., De Schutter, B., Hellendoorn, J., and Breunese, E. (2010). Integrated macroscopic traffic flow and emission model based on METANET and VT-micro. In *Models and Technologies for Intelligent Transportation Systems*, volume 19, 86–89,. Delft University of Technology, Proceedings of the International Conference on Models and Technologies for Intelligent Transportation Systems, Rome, Italy.