**Memorias del XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático, CLCA 2014
Octubre 14-17, 2014. Cancún, Quintana Roo, México**

Estabilización Robusta de Sistemas Positivos

Horacio Leyva * **Francisco A. Carrillo** * **Griselda Quiroz** ** **Ricardo Femat** ***

* *Universidad de Sonora, Rosales and Transversal, Hermosillo, Sonora, México. (e-mail: hleyva@gauss.mat.uson.mx, carrillo@gauss.mat.uson.mx).*
** *Universidad Autónoma de Nuevo León, UANL, FIME, Av. Universidad S/N Ciudad Universitaria (e-mail: griselda.quirozcm@uanl.edu.mx)*
*** *Division de Matemáticas Aplicadas, IPICYT, Camino a la Presa San José 2055, Col. Lomas 4a sección C.P. 78216 San Luis Potosí, S.L.P., México., (e-mail: rfemat@ipicyt.edu.mx)*

Resumen: Con el objetivo de mejorar la tasa de estabilización de una familia de sistemas lineales, en este trabajo mostramos resultados que permiten abordar el problema de la estabilización deslizante de una familia de sistemas positivos parametrizados. Describimos dos aplicaciones de sistemas compartimentales como sistemas positivos, con control positivo acotado, y mostramos la ventaja de considerar un teorema de robustez para tal familia de sistemas.

Palabras clave: Robustez, Sistemas Positivos, Sistemas Compartimentales.

1. INTRODUCCIÓN

Muchos modelos económicos, físicos, biológicos, etc., involucran cantidades que se representan mediante variables positivas. Por ejemplo la concentración de substancias, el nivel de líquidos en tanques, la biomasa de una población, etc. Estos ejemplos pertenecen a la clase de sistemas positivos, donde las variables de estado y las condiciones iniciales son no negativas (ver (Rami y Tadeo, 2007)). En tales sistemas también pueden considerarse controles positivos, por ejemplo en reactores y procesos biológicos la acción de control está relacionada a caudales cuyo valor es estrictamente positivo. En este trabajo consideramos una familia de sistemas que satisfacen las hipótesis de la teoría de estabilidad para sistemas positivos, tales como los teoremas de Frobenius-Perron para matrices Metzler y el teorema de Gerschgorin aplicado a matrices compartimentales.

Consideremos el sistema lineal positivo con control positivo

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{1}$$

donde $x \in \mathbb{R}_+^n$ y $u \in [r_1, r_2] \subset \mathbb{R}_+$. Bajo tales condiciones de positividad para (1), presentamos un conjunto de resultados que permiten asegurar la existencia de equilibrios y la estabilidad robusta de tales soluciones de (1)) contenidas en el cono positivo $\mathbb{R}_+^n$.

2. SISTEMAS POSITIVOS

Considere el sistema lineal homogéneo en tiempo continuo

$$\dot{x} = Ax, \tag{2}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A continuación damos definiciones de conceptos con los que trabajaremos.

Definición 1. El sistema (2) es positivo si para cada condición inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}_+^n$, sucede que la solución correspondiente $x(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+^n$, para toda $t \geq t_0$.

Definición 2. La matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz Metzler si $a_{ij} \geq 0$, para $i \neq j$.

Es conocido que el sistema (2) es positivo si y sólo si A es Metzler. A este tipo de sistemas se les denomina positivos por que el cono positivo $\mathbb{R}_+^n$ es un conjunto invariante, ver (Bellman, 1970).

Definición 3. La matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es matriz Metzleriana si $a_{ij} \geq 0$, para $i \neq j$, y $a_{ii} < 0$ para $i = 1, ..., n$. Similarmente, un intervalo matriz $\mathbf{A}$ es llamado *matriz intervalo Metzleriana* si cada matriz $A \in \mathbf{A}$ es una matriz Metzleriana.

De forma que las matrices Metzlerianas son una clase particular de matrices Metzler.

Definición 4. La matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es Hurwitz si todos sus valores propios tienen parte real negativa.

Definición 5. Una matriz positiva (no negativa) es una matriz real cuyas entradas son positivas (no negativas).

2.1 El Teorema de Frobenius-Perron para matrices Metzler

Teorema 1. Sea $A \in R^{n\times n}$ una matriz Metzler. Entonces, existen un número real μ_0 y un vector $x_0 \geq 0$ tal que se cumple lo siguiente:

a) $Ax_0 = \mu_0 x_0$,
b) Si $\mu \neq \mu_0$ es cualquier otro valor propio de A, entonces $\Re e(\mu) < \mu_0$.

Propiedad de la inversa de las matrices Metzler

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz Metzler. La matriz $-A^{-1}$ existe y es positiva si, y sólo si, A es Hurwitz (i.e. $\mu_0 < 0$).

Existen resultados para las matrices Metzler que establecen que para cualquier matriz Metzler A, su inversa A^{-1} existe y es positiva, si y sólo si, todos sus valores propios están dentro del semiplano complejo izquierdo (valores propios con parte real estrictamente negativa), i.e matrices Metzler que son a su vez Hurwitz. El siguiente teorema asegura que la estabilización de la dinámica controlada ocurra en $\mathbb{R}_+^n$.

Teorema 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz Metzler. La matriz $-A^{-1}$ existe y es positiva si, y sólo si, A es Hurwitz (i.e. $\mu_0 < 0$).

Las pruebas de los teoremas 1 y 2 pueden verse en (Bellman, 1970) y (Berman, Neumann y Stern, 1989).

3. ROBUSTEZ DE LA ESTABILIDAD DE UNA FAMILIA DE SISTEMAS LINEALES

3.1 La estabilidad Hurwitz robusta de matrices Metzlerianas

En esta sección agregamos algunas definiciones para abordar el teorema 12.6 del libro (Bhattacharyya, Chapellat y Keel, 1995).

Definición 6. Una matriz A es llamada *Matriz Metzleriana* si $a_{ii} < 0$ para toda i y $a_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$. Similarmente, una matriz de intervalo $\mathbf{A}$ es llamado una *matriz de intervalo Metzleriana* si cada matriz $A \in \mathbf{A}$ es una matriz Metzleriana

$$\mathbf{A} := \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : a_{ij}^- \leq a_{ij} \leq a_{ij}^+ , \text{ para toda } i,\, j \right\}$$

que incluye a las matrices Metzlerianas de cota inferior A^- y de cota superior A^+:

$$A^- := \begin{pmatrix} a_{11}^- & \cdots & a_{1n}^- \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^- & \cdots & a_{nn}^- \end{pmatrix} \quad A^+ := \begin{pmatrix} a_{11}^+ & \cdots & a_{1n}^+ \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^+ & \cdots & a_{nn}^+ \end{pmatrix}.$$

Podemos representar un elemento $A_\varepsilon \in \mathbf{A}$ mediante la notación $A^- \leq A_\varepsilon \leq A^+$, donde ε es un parámetro escalar, $\varepsilon \in [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, tal que

$$A^- = A + \alpha C \quad \text{y} \quad A^+ = A + \beta C,$$

donde C es una matriz no negativa.

En el siguiente teorema, el término $A(k)$ denota la submatriz principal de A, que consiste de las primeras k columnas y renglones.

Teorema 3. *Una Matriz Metzleriana $A \in R^{n \times n}$ es Hurwitz estable para toda $A \in [A^-, A^+]$ si y sólo si A^+ es Hurwitz estable. Una condición equivalente es que todos los menores principales de $-A^+$ son positivos,* i.e. $\det[-A^+(k)] > 0$ para $k = 1, ..., n$.

De acuerdo al teorema anterior, tenemos que la matriz A_ε es Metzleriana y Hurwitz para cualquier $\varepsilon \in [\alpha, \beta]$.

Estabilidad deslizante de una familia robusta de sistemas lineales

En esta sección consideramos una matriz Metzleriana A_ε, y un intervalo de matrices Metzlerianas $\mathbf{A}$, tal que $A^- \leq A_\varepsilon \leq A^+$, con A^+ *Hurwitz estable.* Sea el sistema de control positivo

$$\dot{x} = A_\varepsilon x + bu, \tag{3}$$

donde $x, b \in \mathbb{R}_+^n$ y $u \in [r_1, r_2]$, con $0 \leq r_1 < r_2$. De acuerdo a los teoremas de Frobenius Perron para matrices Metzler, tenemos que el punto de equilibrio $\bar{x}_\varepsilon = -A_\varepsilon^{-1} b\bar{u} \in \mathbb{R}_+^n$, es positivo, tal que la dinámica de (3) con $u = \bar{u}$ es asintóticamente estable; cualquier solución que inicie en $\mathbb{R}_+^n$ tiende asintóticamente al punto de equilibrio $\bar{x}_\varepsilon$ para cualquier valor fijo de $\varepsilon \in [\alpha, \beta]$. Puede probarse que los sistemas positivos del tipo (3) son no controlables, sin embargo cabe preguntarnos ¿Es posible mejorar la tasa de estabilización al considerar $u \in [r_1, r_2]$ en lugar del valor constante $u = \bar{u}$?, en esta sección damos una respuesta positiva a la pregunta mediante un modo deslizante que mejora la tasa de estabilización.

Consideremos el sistema positivo (3), con matriz Metzleriana $A_\varepsilon \in \mathbf{A}$, para $\varepsilon \in [\alpha, \beta]$. En los dos trabajos de (Leyva, Carrillo, Quiroz y Femat, 2013) mostramos condiciones suficientes para tener un modo deslizante definido en un segmento de hiperplano contenido en $\mathbb{R}_+^n$. Si consideramos un vector constante $L_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n$, podemos representa un segmento de hiperplano que pasa por el punto de equilibrio positivo $\bar{x}(\varepsilon)$, mediante la igualdad

$$L_\varepsilon (x - \bar{x}_\varepsilon) = 0,$$

de manera que se cumplen las condiciones deslizamiento expresadas con el par de desigualdades:

$$L_\varepsilon (A_\varepsilon x + b r_1) < 0 \quad \text{para } x \in \mathbb{R}_+^n \text{ tales que } L_\varepsilon x > 0$$

$$L_\varepsilon (A_\varepsilon x + b r_2) > 0 \quad \text{para } x \in \mathbb{R}_+^n \text{ tales que } L_\varepsilon x < 0$$

Con la igualdad $L_\varepsilon \dot{x} = 0$ definimos $u_{eq\varepsilon}$. Es decir,

$$L_\varepsilon (A_\varepsilon x + b u_{eq\varepsilon}) = 0,$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} u_{eq\varepsilon} &= -\frac{L_\varepsilon A_\varepsilon x}{L_\varepsilon b} \\ &= -\frac{P_\varepsilon^T x}{P_\varepsilon^T (-A_\varepsilon)^{-1} b} > 0. \end{aligned}$$

donde $A_\varepsilon^T L_\varepsilon^T = -P_\varepsilon$, con $P_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n$. De manera que la dinámica deslizante es representada por

$$\dot{x} = A_{eq\varepsilon} x$$

con matriz Metzler $A_{eq\varepsilon}$ dada por

$$A_{eq\varepsilon} = A_\varepsilon + b \left(\frac{P_\varepsilon^T}{P_\varepsilon^T (-A_\varepsilon^{-1}) b} \right).$$

Bajo estas condiciones, es conocido que mediante la aplicación del control

$$u(\varepsilon) = \begin{cases} r_1 & \text{si } L(\varepsilon)(x - \overline{x}(\varepsilon)) > 0 \\ u_{\mathrm{eq}\varepsilon} & \text{si } L(\varepsilon)(x - \overline{x}(\varepsilon)) = 0 \\ r_2 & \text{si } L(\varepsilon)(x - \overline{x}(\varepsilon)) < 0 \end{cases} \tag{4}$$

tendremos que cualquier solución $x(t, \varepsilon)$ que inicia fuera del hiperplano $L(\varepsilon)(x - \bar{x}(\varepsilon)) = 0$, alcanza al hiperplano en tiempo finito y converge bajo un deslizamiento al punto de equilibrio $\bar{x}(\varepsilon)$. Para una descripción más extensa de esta estabilización deslizante, recomendamos ver los dos trabajos de (Leyva, Carrillo, Quiroz y Femat, 2013).

4. APLICACIONES

Para algunos sistemas positivos del tipo (3) es posible determinar un intervalo de matrices **A**, de manera que una diferencia $\beta - \alpha$ grande equivale a "más robustez" en la estabilidad del sistema $\dot{x} = A_\varepsilon x$. A continuación planteamos dos aplicaciones, en cada una calculamos los elementos de robustez y describimos el sistema de control. En las memorias [13] y [14] exponemos la estabilización mediante un deslizamiento de ambas aplicaciones para el caso $\varepsilon = 0$, de manera que ahora mostramos la viabilidad de la estabilización deslizante para cualquier valor $\varepsilon \in [\alpha, \beta]$.

4.1 El caso de mezcla con dos tanques

La descripción del problema es el siguiente:

Dos tanques, A y B, contienen V_1 y V_2 litros de salmuera y en los cuales se disolvieron inicialmente a y b libras de sal respectivamente. Ambos tanques están conectados, habiéndo un flujo f_2 de salmuera del tanque A al B y un flujo f_3 del tanque B al A. Además, del exterior hay un flujo f_1 con u libras de sal por litro hacia el tanque A, y del tanque B hay un flujo f_4 hacia el exterior; por determinar la cantidad de sal $x_i(t)$ presente en el tanque i.

Como sistema del tipo (1) nos queda

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

con $0 < f_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Al considerar volumenes constantes V_1 y V_2 tenemos que $f_2 = f_3 + f_4$ y $f_1 = f_4$, tal que $f_3 < f_2$.

Analizando el sistema a lazo abierto

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

con $V_1 = V_2 = V$, podemos considerar las matrices

$$A^- := \frac{1}{V} \begin{pmatrix} -2f_2 + f_3 & f_3 \\ f_2 & -2f_2 + f_3 \end{pmatrix}$$

y

$$A^+ = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(f_2 + f_3) & f_3 \\ f_2 & -\frac{1}{2}(f_2 + f_3) \end{pmatrix}$$

tenemos que $A^- \leq A_\varepsilon \leq A^+$, donde

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \frac{1}{V} \begin{pmatrix} -f_2 & f_3 \\ f_2 & -f_2 \end{pmatrix} + \varepsilon \frac{1}{V} \begin{pmatrix} f_2 - f_3 & 0 \\ 0 & f_2 - f_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{V} \begin{pmatrix} -(f_2 - \varepsilon f_2 + \varepsilon f_3) & f_3 \\ f_2 & -(f_2 - \varepsilon f_2 + \varepsilon f_3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con $tr(A_\varepsilon) = -\frac{2}{V}(f_2 - \varepsilon f_2 + \varepsilon f_3) < 0$ y $\det(A_\varepsilon) = \frac{1}{V^2}(f_2 - f_3)\left(f_2 - 2\varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_2 - \varepsilon^2 f_3\right) > 0$ para $\varepsilon \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$. Es decir, A_ε es Hurwitz y Metzleriana para $\varepsilon \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$, de acuerdo al teorema 12.6 de Batt., tenemos que las soluciones $x(t, x_0, \varepsilon)$ del sistema

$$\dot{x} = A_\varepsilon x$$

son asintóticamente estables: si $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$, entonces $x(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^n$ para toda $t \geq 0$ y cualquier valor fijo de $\varepsilon \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

4.2 El Modelo de la Insulina

Hasta ahora se han propuesto varios modelos matemáticos para la dinámica glucosa-insulina en la terapia de la diabetes tipo 1; sin embargo el modelo de Sorensen es uno de los más aceptados por su completez en la representación del metabolismo de la glucosa, con un enfoque compartimental (ver (Sorensen, 1985)). El uso del modelo de Sorensen para propósitos de control se ha discutido en (ver (Quiroz y Femat, 2007)); ahí se presenta una breve discusión acerca de la estructura del modelo. El modelo se divide en tres subsistemas: glucosa, insulina y razones de glucagón metabólico. El subsistema de la glucosa es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales en ocho dimensiones, mientras que el subsistema de la insulina es lineal en siete dimensiones. Ambos sistemas están acoplados por el subsistema no lineal de razones de glucagón metabólico. Es importante observar que el modelo de Sorensen ya ha sido validado y los parámetros involucrados son conocidos.

Un enfoque típico del control de glucosa en la terapia de la diabetes tipo 1, consiste en diseñar una función u(t) para controlar la medida de la señal de salida de ésta, es decir, la concentración de glucosa en el tejido vascular periférico (en la piel). El objetivo de control sobre la concentración de glucosa se alcanza por el suministro exógeno de insulina en la ruta subcutánea (señal de control) definido por el diseño de u(t). En este artículo se propone una estabilización del subsistema de la insulina. Esta intención, obedece a la necesidad de controlar la infusión de insulina; esto es que, no es suficiente obtener la concentración de glucosa sobre tasas fisiológicas normales, sino que se debe controlar la infusión de insulina con que se logra esta normalización de la concentración de la glucosa, con el fin de reducir los excesos en las dosis de la aplicación de la insulina para prevenir una hiperinsulinemia y con ello un coma diabético.

Aquí proponemos un algoritmo para el control de la insulina, basado en una estabilización rápida de un sistema lineal de la forma

$$\dot{x} = Ax$$

con

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{173}{100} & \frac{173}{100} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{227}{500} & -\frac{3151}{1000} & 0 & \frac{909}{1000} & \frac{727}{1000} & \frac{53}{50} & 0 \\ 0 & \frac{153}{200} & -\frac{153}{200} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{47}{500} & \frac{189}{500} & -\frac{789}{1000} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1411}{1000} & 0 & 0 & -\frac{367}{200} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{709}{500} & 0 & 0 & 0 & -\frac{937}{500} & \frac{91}{200} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & -\frac{111}{1000} \end{pmatrix}$$

(9)

y $x(t) = \left(x_1(t)\ x_2(t) \cdots x_7(t) \right)^T$ donde las entradas $x_i(t)$ representan la concentración de insulina en el cerebro, las arterias, intestinos, hígado, riñón, venas periféricas (piel), compartimentos de órganos periféricos, respectivamente. Este subsistema es usado para diseñar un control estabilizante de acuerdo a la metodología usada de manera estándar. El problema de estabilización supone la infusión de insulina exógena en el tejido subcutáneo, esto es, que la ecuación de balance de masa de concentración de insulina en las venas periféricas $\dot{x}_6(t)$ es modificado por la adición de la entrada u, tal que el sistema de control queda de la forma $\dot{x} = Ax + bu$, con el vector $bu = \left(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1.418u\ 0 \right)^T$. De manera que al fijar un valor apropiado de $\bar{u}$, obtenemos el punto de equilibrio donde las entradas de representan niveles aceptables de insulina en los órganos respectivos. Por ejemplo, si $\bar{u} = 23.349$, entonces

$$\bar{x} = \left(\tfrac{21\,379}{1000}\ \ \tfrac{21\,379}{1000}\ \ \tfrac{21\,379}{1000}\ \ \tfrac{12\,789}{1000}\ \ \tfrac{16\,439}{1000}\ \ \tfrac{4019}{125}\ \ \tfrac{14\,483}{1000} \right)^T.$$

5. ROBUSTEZ DE LA ESTABILIDAD DE UNA FAMILIA DE SISTEMAS LINEALES

Cabe la pregunta, si los valores nominales de las componentes de la matriz A corresponden al sistema real (el cuerpo humano del insulino dependiente); cualquier aseveración sobre la estabilidad del sistema puede verse alterada si modificamos una de las entradas. En esta sección mostramos un resultado de robustez para una familia de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

El resultado de robustez que aplicamos aquí es para los sistemas lineal del tipo (1) con matriz Metzleriana, una clase particular de matrices Metzler.

Consideremos el teorema 3 para describir un tipo robustez de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{173}{100} & \frac{173}{100} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{227}{500} & -\frac{3151}{1000} & 0 & \frac{909}{1000} & \frac{727}{1000} & \frac{53}{50} & 0 \\ 0 & \frac{153}{200} & -\frac{153}{200} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{47}{500} & \frac{189}{500} & -\frac{789}{1000} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1411}{1000} & 0 & 0 & -\frac{367}{200} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{709}{500} & 0 & 0 & 0 & -\frac{937}{500} & \frac{91}{200} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & -\frac{111}{1000} \end{pmatrix},$$

al aumentar ligeramente las entradas no nulas de A, obtenemos la matriz

$$A^+ = A + \frac{1}{200}C$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{171}{100} & \frac{18}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{31}{10} & 0 & 1 & \frac{73}{100} & \frac{11}{10} & 0 \\ 0 & \frac{77}{100} & -\frac{76}{100} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & -\frac{78}{100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{18}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{185}{100} & \frac{46}{100} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix},$$

donde A^+ es Hurwitz, ya que $\det\left[-A^+(k)\right] > 0$ para $k = 1, ..., n$.

$$\det\left[-A^+(1)\right] = \frac{171}{100}, \quad \det\left[-A^+(2)\right] = \frac{4401}{1000},$$
$$\det\left[-A^+(3)\right] = \frac{83\,619}{25\,000}, \quad \det\left[-A^+(4)\right] = \frac{2440\,341}{1250\,000},$$
$$\det\left[-A^+(5)\right] = \frac{60\,102\,567}{25\,000\,000},$$
$$\det\left[-A^+(6)\right] = \frac{718\,468\,299}{500\,000\,000},$$
$$\det\left[-A^+(7)\right] = \frac{8052\,561}{156\,250\,000}.$$

Definamos la matriz $C = (c_{ij})$, con

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } a_{ij} \neq 0 \\ 0 \text{ si } a_{ij} = 0 \end{cases},$$

es decir

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

el teorema 3 nos asegura que la matriz $A + \varepsilon C$ es Hurwitz para cualquier valor de ε tal que $-\frac{1}{20} < \varepsilon < \frac{1}{200}$, donde podemos considerar que

$$A^- := A + \left(-\frac{1}{20}\right)C$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{89}{50} & \frac{42}{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{101}{250} & -\frac{3201}{1000} & 0 & \frac{859}{1000} & \frac{677}{1000} & \frac{101}{100} & 0 \\ 0 & \frac{143}{200} & -\frac{163}{200} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{250} & \frac{41}{125} & -\frac{839}{1000} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1361}{1000} & 0 & 0 & -\frac{377}{200} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{171}{125} & 0 & 0 & 0 & -\frac{481}{250} & \frac{81}{200} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{161}{1000} \end{pmatrix},$$

donde $a^-_{76} = 0$.

6. CONCLUSIONES

Mediante resultados conocidos de la teoría de control deslizante, sistemas lineales positivos y teoremas de estabilidad, mostramos que es posible diseñar una estabilización robusta de una familia de sistemas lineales.

REFERENCES

Horacio Leyva C., Julio Solis-Daun y Rodolfo Suárez. Global CLF Stabilization of Systems with Control Inputs Constrained to an Hyperbox. SIAM J. Control Optim. Vol. 51, No. 1, pp. 745-766. China, December 16-18, 2009.

M. Ait Rami and F. Tadeo. Controller Synthesis for Positive Linear Systems With Bounded Controls, IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs, Vol. 54, No. 2, February 2007.

P.D. Leenheer and D. Aeyels, Stabilization of positive linear systems, Systems Control Lett., 44 (2001) 259-271.

R. Bellman, Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill, New York, 1970.

A. Berman, M. Neumann and I. Stern (1989). Nonnegative matrices in the Dynamics Systems. John-Wiley, New York.

D.G. Luenberger (1979). Introduction to Dynamic Systems. John Wiley, New York.

R.F. Brammer. Controllability in linear autonomous systems with positive controllers. SIAM J. Control, 10.1972.

L. Farina y S. Rinaldi, Positive Linear Systems: Theory and applications. John Wiley & Sons, 2000.

S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, L.H. Keel, 1995. Robust Control, The Parametric Approach, by Prentice Hall PTR;

Gallardo Hernández, A.G., et al. High-order sliding-mode control for blood glucose: Practical relative degree approach. Control Engineering Practice (2013). http://dx.doi.org/10.1016/j.conengprac.2012.11.01

Sorensen J.T. A Physiologic Model of Glucose Metabolism in Man and its Use to Design and Asses Imbroved Insulin Therapies for Diabetes I. PhD Thesis MIT, USA. (1985).

Quiroz G. and Femat R. On hyperglycemic glucose basal levels in Type 1 Diabetes Mellitus from analysis. Mathematical Biosciences 210, 554-575. (2007).

H. Leyva, F.A. Carrillo, G. Quiroz, R. Femat. Estabilización vía Modos Deslizantes con Control Positivo. Memorias del Congreso Nacional de Control Automático AMCA 2013.

Rapid insulin stabilization via sliding modes control for T1DM therapy. Memorias del Congreso Nacional de Control Automático AMCA 2013. (2013).