

Una metodología para resolver sistemas de control con saltos markovianos^{*}

D. Gutierrez^{*} y E. F. Costa^{*}

^{*} Departamento de Matemática Aplicada e Estatística, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, C.P. 668,13560-970, São Carlos, SP, Brazil (e-mail: dgutip@icmc.usp.br, efcosta@icmc.usp.br).

Resumen. En este artículo, es presentado el problema alcanzabilidad para un sistema de control con saltos markovianos en tiempo discreto. Es desarrollado un algoritmo que determine todas las secuencias de modos de operación, que al ser visitadas por la cadena de Markov garanticen la solución para este problema. Mediante un sistema lineal asociado es posible determinar las estrategias de control. El algoritmo es de forma regresiva y en cada iteración incorpora restricciones para desconsiderar algunas secuencias, lo que reduce su costo computacional. Además, incluimos ejemplos numéricos de fácil implementación.

Keywords: Sistemas de control, Sistemas con saltos markovianos, Estructuras de sistemas dinámicos, Alcanzabilidad, Controlabilidad.

1. Introducción

$$\text{Posto}([B:AB:\dots:A^{n-1}B]) = n.$$

La dinámica de diversos sistemas electrónicos, mecánicos, térmico, económicos, etc, que aparecen en las más variadas áreas de la ciencia, pueden ser descritas a través de modelos matemáticos llamados *sistemas dinámicos*. En muchos casos, es preciso modificar su dinámica usando intervenciones (comúnmente llamadas de decisiones o controles), teniendo como objetivo alcanzar un comportamiento deseado; problemas de este naturaleza son denominados *problemas de control*.

Un problema de control relativamente común, consiste en verificar la restricción $x(\ell) = \bar{x}$, donde ℓ es un instante de tiempo pre-definido y \bar{x} es el alvo que deseamos alcanzar en aquel instante. Este problema es denominado *problema de alcanzabilidad* (PA) y cuando $\bar{x} = 0$ es denominado *problema de controlabilidad* (PC). El caso más simple para este tipo de problema es cuando el sistema es lineal e invariante en el tiempo, vea Hespanha (2009), donde el valor de $x(t) \in \mathcal{R}^n$ es influenciado por las matrices (A, B) y por los controles $u(t) \in \mathcal{R}^m$, donde $A \in \mathcal{R}^{n,n}$ e $B \in \mathcal{R}^{n,m}$. La dinámica de la variable de estado x es descrita por el sistema de control

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), t = 0, 1, 2, \dots \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

Existe una variedad de conceptos estructurales asociados con (1), tales como, *alcanzabilidad, controlabilidad, observabilidad, y constructibilidad*, junto con relaciones de dualidad existentes entre ellas, vea Antsaklis & Michel (2009). Por ejemplo los conceptos de alcanzabilidad y controlabilidad son verificados, siempre que

A pesar que el PA ya fue ampliamente estudiado para (1), existen casos más complejos cuya teoría aun no está completa. La principal motivación para estudiar sistemas más complejos es que (1) es poco válido en situaciones que presentan mudanzas abruptas, como las existentes en diversos procesos en la industria (vulnerabilidad a fallas y perturbaciones).

Un modelo que considera este tipo de comportamiento y viene consiguiendo resultados satisfactorios son los llamados *sistemas lineales con saltos markovianos*, o simplemente (SLSM). Estos sistemas, en vez de tener solamente un par de matrices, tienen dos colecciones de matrices. Considerando $I = \{1, 2, \dots, N\}$ el conjunto que almacena los modos de operación del sistema y representamos por $\mathbb{A} = (A_1, \dots, A_N)$ e $\mathbb{B} = (B_1, \dots, B_N)$ las colecciones de matrices comentadas anteriormente. En cada instante de tiempo t es escogida un par de matrices (A, B) , por ejemplo si $\theta(t) = 1$ tenemos que $x(t+1) = A_1x(t) + B_1u(t)$.

Así como su contraparte determinística, los sistemas con saltos markovianos tiene propiedades estructurales importantes, y cada vez son desarrollados nuevos conceptos que son trabajados en el grupo, veamos E. Costa, Do Val & Fragoso (2005), E. Costa, Manfrim & Do Val (2006), Gomez & E. Costa (2010) y Narvaez & E. Costa (2011) por citar algunos. En E. Costa, Manfrim & Do Val (2006) fue introducido el concepto de *alcanzabilidad débil* para SLSM con presencia de ruido aditivo $w(t)$. Además, de elaborar un test computacional llamado *test de W-alcanzabilidad*. En Narvaez & E. Costa (2011), es usado este concepto para sistemas sin ruido en la versión a tiempo continuo, y fue demostrado usando relaciones de dualidad via *observabilidad débil* y sus propiedades de invariancia. Recientemente, en Gutierrez & E. Costa

^{*} Agradecimientos a FAPESP proceso 2013/19380-8, CNPq procesos: 311290/2013-2 y 306466/2010-4, la PRPG-Universidade de São Paulo por los apoyos financieros y a CAPES por la beca de estudios.

(2014), fue adaptado este test para sistemas sin variable de salida $y(t)$ e demostrado de forma directa.

Garantizar que PA tenga solución, ya es un campo ampliamente estudiado en la literatura. Estos procedimientos dependen de la forma de verificar la restricción $x(\ell) = \bar{x}$. Por ejemplo, en Ehrhardt & Kliemann (1982) fue introducida la noción de *controlabilidad débil* para sistemas estocásticos no lineales a tiempo continuo, luego fue adaptado en Ji & Chizeck (1988) para la versión discreta de SLSM. En Czornik & Swiernak (2001) se mostraron las condiciones necesarias y suficientes de existencia del control en verificar la restricción en valor esperado. Posteriormente, en Czornik & Swiernak (2004) fue usado el concepto de controlabilidad directa y determinado el control en la forma $u(t) = f(\theta(0), \dots, \theta(t))x_0$.

Proponer una metodología para obtener soluciones de un PA es una tarea relativamente difícil. En Berger & Reis (2013) es propuesta la construcción progresiva de subespacios vectoriales para sistemas de la forma $Ex(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$. Para sistemas más complejos, resaltan los métodos desarrollados en sistemas chaveados, ampliamente estudiados en Sun, Ge & Lee (2001) en la versión discreta y en Sun (2007) en la versión continua. En Sun, Ge & Lee (2001), el procedimiento es construir subespacios regresivos, envolviendo $(mn)^n N$ operaciones lo que dificulta su implementación computacional, en este trabajo también es propuesto un criterio para reducir este costo operacional, pero el no es muy bueno para aplicaciones prácticas.

En este artículo, proponemos un algoritmo que determine secuencias (con probabilidad positiva) tipo $(i_0, \dots, i_{\ell-1})$ que al ser ejecutadas resuelvan el PA y sea posible determinar los controles $u(0), \dots, u(\ell-1)$ como es descrito en el Teorema 2 y que determina

$$\text{Prob}(x(\ell) = \bar{x}) \geq \text{Prob}(\theta(0) = i_0, \dots, \theta(\ell-1) = i_{\ell-1}).$$

En seguida, es posible determinar las estrategias de control mediante el teorema 2. También son caracterizados los conjuntos $\mathcal{V}_{i_0, \dots, i_{\ell-1}}(\bar{x})$ que almacenan los estados x que alcanzan \bar{x} , estos conjuntos pueden ser subespacios vectoriales o afines dependiendo del alvo escogido.

El algoritmo, puede ser implementado en una amplia variedad de programas sin necesidad de usar paquetes especializados en control. Esto radica en el hecho que ser regresivo (inspirado en programación dinámica) y que evita en cada iteración secuencias a no ser visitadas, permitiendo un menor costo computacional. También son presentados ejemplos que ilustran el algoritmo.

La organización del artículo es como sigue. En la sección 2, introducimos las notaciones usuadas, definimos el test de W-alcanzabilidad y formalizamos el problema de alcanzabilidad a ser estudiado. En la sección 3, proponemos la metodología y el algoritmo que determina las secuencias de modos de operación para un SLSM. En la sección 4, en base a dos ejemplos ilustramos el algoritmo y finalizamos el texto con algunas conclusiones.

2. Marco teórico

Siguiendo la notación de O. Costa, Fragoso & Marques (2005), sean las matrices $A \in \mathbb{C}^n$ e $B \in \mathbb{C}^{n,m}$, la cadena de

Markov $\theta(t)$ que suponemos como ergódica, la matriz de probabilidades de transición $P = [p_{i,j}]$ y la distribución de probabilidades $\pi_i(t) = \text{Prob}(\theta(t) = i)$.

El sistema de control foco de estudio para este artículo, es un SLSM de la forma

$$\begin{cases} x(t+1) &= A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t), t = 0, 1, \dots \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (2)$$

Como explicamos anteriormente, la cadena de Markov escoge en cada instante de tiempo t un único modo de operación $i \in I$. Así el valor de $x(t+1)$ es influenciado por las matrices (A_i, B_i) , siempre que verifiquemos $\theta(t) = i$.

En E. Costa, Manfrim & Do Val (2006), fue introducido el concepto de *alcanzabilidad débil* (*W-alcanzabilidad*), para SLSM que tienen la presencia de ruido aditivo.

Definición 1. (W-alcanzabilidad). Decimos que (2) es un sistema W-alcanzable si y solamente si existe $r \geq 1$ tal que

$$E\{\Gamma(r, 0) | \theta(0) = i\} > 0, \text{ para cada } i \in I,$$

donde $\Gamma(r, 0) = \sum_{\ell=0}^{r-1} \phi(r, \ell + 1)B_{\theta(\ell)}B'_{\theta(\ell)}\phi(r, \ell + 1)'$ y $\phi(r, \ell) = A_{\theta(r-1)}A_{\theta(r-2)} \cdots A_{\theta(\ell)}$.

Escribiendo por $X_i(\ell) = E\{\Gamma(\ell, 0) \cdot 1_{\theta(\ell)=i}\}$, mediante los resultados de esperanza condicionada, descritos en Cinlar (1975), construimos las matrices

$$W_i(r) = [X_i(1) : X_i(2) : \dots : X_i(r)], \quad i \in I. \quad (3)$$

Mediante el teorema de Cayley-Hamilton, reducimos esta colección de matrices para $r = n^2 N$ y que denominaremos matrices de W-alcanzabilidad, definidas como:

$$\mathbb{W}(n^2 N) = \{W_1(n^2 N), \dots, W_N(n^2 N)\}.$$

Teorema 1. (Teste de W-alcanzabilidad). Dizemos que el sistema (2) es W-alcanzable si y solamente si

$$\text{Rank}(W_i(n^2 N)) = n, \quad \forall i \in I.$$

La demostración del Teorema 1 puede ser encontrada en Gutierrez & E. Costa (2014), y es realizada usando solo herramientas de álgebra lineal y de probabilidades.

Conforme explicamos anteriormente, es posible crear diversas variantes al problema de alcanzabilidad, ellas dependen del criterio usado para alcanzar el alvo. Puede ser, en valor esperado $E\{x(\ell)\} = \bar{x}$, visita a una vecindad e convergencia quasi-siempre $P(|x(\ell) - \bar{x}| < \epsilon) = 1$, en tiempo finito o infinito, etc.

Problema de Alcanzabilidad (PA) Dado \bar{x} , determinar una secuencia $(i_0, i_1, \dots, i_{\ell-1})$ tal que para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$, exista un control $u(t) = f(x(t), \theta(t))$, $0 \leq t \leq \ell-1$ que verifique

$$\text{Prob}(x(\ell) = \bar{x}) \geq \text{Prob}(\theta(0) = i_0, \dots, \theta(\ell-1) = i_{\ell-1}).$$

Cuando $\bar{x} = 0$, le denominamos *Problema de Controlabilidad* (PC). Es interesante comentar que tenemos indicios numéricos, que W-alcanzabilidad es una condición necesaria que garantiza la existencia de soluciones para el PA, sin embargo la prueba de este resultado no es tema para el presente artículo.

3. Metodología

En base a las notaciones y definiciones descritas anteriormente, en esta sección presentamos la metodología para obter secuencias de modos que lleven a obter la solución de un PA. Primero representamos los conjuntos alcanzables y sus propiedades asociadas, y posteriormente presentamos el algoritmo para generar las secuencias de modos.

3.1. Conjuntos alcanzables regresivos y propiedades

Para cada $i \in I$, denotemos por $\beta_i = \text{Im}(B_i)$. Dado un conjunto L y un operador lineal M , denotamos por $M^{-1}(L)$ a la imagen inversa de M en L , el cual existe independientemente que M sea inversa. Escribimos por $\text{CA}(a_1, \dots, a_\ell)$ (similarmente CL) para la combinación afin (lineal) de los vectores a_1, \dots, a_ℓ , osea

$$\text{CA}(a_1, \dots, a_\ell) = \left\{ x = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i a_i : \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = 1 \text{ e } \lambda_i \in \mathcal{R} \right\},$$

y CL es definida de manera similar, sin la restricción de suma unitária en λ_i . Decimos que \mathcal{A} es un subespacio afin, cuando existe un conjunto de vectores a_1, \dots, a_ℓ que cumplan $\mathcal{A} = \text{CA}(a_1, \dots, a_\ell)$, y analogamente para subespacios lineales (que son generados por combinaciones lineales de vectores). Notemos que un subespacio lineal puede ser visto como un caso particular de un subespacio afin, para el cual alguno de los vectores a_1, \dots, a_ℓ es nulo.

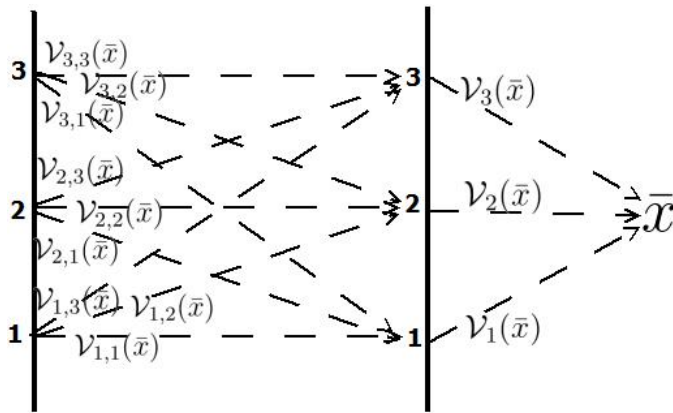


Figura 1. Construcción de los conjuntos alcanzables regresivos para 3 modos de operación.

Representamos por $\mathcal{V}_i(\bar{x})$ a el conjunto de estados que alcanzan el alvo \bar{x} mediante el modo i , osea:

$$\mathcal{V}_i(\bar{x}) = \{x \in \mathcal{R}^n : A_i x \in \beta_i - \bar{x}\}. \quad (4)$$

Analogamente, representamos por $\mathcal{V}_i(L)$ a el conjunto de estados que alcanzan el conjunto L .

$$\mathcal{V}_i(L) = \{x \in \mathcal{R}^n : A_i x \in L + \beta_i\} \quad (5)$$

Si la secuencia de modos $\{i_0, i_1, \dots, i_{\ell-1}\}$ tiene probabilidad positiva, então via (4) y (5) escribimos por

$$\mathcal{V}_{i_0, i_1, \dots, i_{\ell-1}}(\bar{x}) := \mathcal{V}_{i_0}(\mathcal{V}_{i_1, i_2, \dots, i_{\ell-1}}(\bar{x})) \quad (6)$$

a los conjuntos que denominamos conjuntos alcanzables regresivos. En la figura 1, ilustramos la construcción de los conjuntos definidos en (6).

Lema 1. Si L es un subespacio afin, entonces tomando $v_1, v_2 \in \mathcal{V}_i(L)$, tenemos $\text{CA}(v_1, v_2) \in \mathcal{V}_i(L)$, osea, $\mathcal{V}_i(L)$ tambien es un subespacio afin. Em particular, (6) es un subespacio afin.

Demostración: Consideremos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{R}$ que cumplan $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Sean los controles u_1 y u_2 los asociados a v_1 e v_2 respectivamente. Entonces $A_i v_j + B_i u_j \in L$, $j = 1, 2$. Como L es afin, cumple

$$A_i \left(\sum_{j=1}^2 \lambda_j v_j \right) + B_i \left(\sum_{j=1}^2 \lambda_j u_j \right) = \sum_{j=1}^2 \lambda_j (A_i v_j + B_i u_j) \in L.$$

Por consiguiente $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \mathcal{V}_i(L)$. Para mostrar la segunda afirmación, el procedimiento es por inducción. Como $\mathcal{V}_{i_{\ell-1}}(\bar{x})$ es afin, de la primeira afirmación $\mathcal{V}_{i_{\ell-2}, i_{\ell-1}}(\bar{x})$ también es afin. Finalmente, se $\mathcal{V}_{i_1, i_2, \dots, i_{\ell-1}}(\bar{x})$ es afin, entonces $\mathcal{V}_{i_0, i_1, \dots, i_{\ell-1}}(\bar{x})$ también es afin.

Es interesante comentar del lema 1, que $\mathcal{V}_i(L)$ es un subespacio afin, aunque también puede ser un subespacio lineal. Esto sucede cuando alguno (o ambos) estados v_1, v_2 es el origen. Situación opuesta no ocurre, osea, un subespacio lineal L não genera en $\mathcal{V}_i(L)$ un subespacio afin.

Lema 2. Si L es un subespacio lineal, entonces $\mathcal{V}_i(L)$ también es un subespacio lineal. En particular para $\bar{x} = 0$, (6) es un subespacio lineal.

Demostración: El procedimiento es análogo al lema 1, basta sustituir combinaciones afines por combinaciones lineales y eliminando la restricción de suma unitária en los parámetros λ .

3.2. Algoritmos

Supongamos que existen vectores v_1, v_2, \dots, v_q tales que $L = \text{CA}(v_1, v_2, \dots, v_q)$, podemos construir $\mathcal{V}_i(L)$ baseado en el siguiente lema.

Lema 3. Si $L = \text{CA}(v_1, v_2, \dots, v_q)$, entonces

$$\mathcal{V}_i(L) = \text{CA}(V),$$

donde V es determinado por el algoritmo 1.

Demostración: Por construcción (paso 3), V es un conjunto de estados que tienen una estrategia de control que alcanza algun elemento de L , osea $V \in \mathcal{V}_i(L)$. Por el lema 1, notamos de inmediato que $\text{CA}(V) \subset \mathcal{V}_i(L)$. Falta apenas mostrar que $\mathcal{V}_i(L) \subset \text{CA}(V)$; si negamos ello, y asumiendo que que existe por lo menos $w \in \mathcal{V}_i(L)$ que no pertenesca a $\text{CA}(V)$, entonces del lema 1 nuevamente obtenemos $\text{CA}(\{V, w\}) \in \mathcal{V}_i(L)$ y por lo cual existe algun \bar{w} ortogonal a V y que verifica el sistema lineal dado en el paso 3 y que incluimos en V .

La propuesta principal del artículo es construir subespacios afines o vectoriales de forma regresiva hasta completar el espacio total \mathcal{R}^n . Una vez, sea valido para alguna secuencia con probabilidad positiva, calculamos las estrategias de control mediante el siguiente teorema.

Algoritmo 1 Cálculo de $\mathcal{V}_i(L)$.

Paso 1: Inicie con $V = \{\emptyset\}$ y hacer $j = 1$.

Paso 2: Hacer $M = [A_i \dot{B}_i]$, $m = v_j$ y $p = 1$.

Paso 3: Resolver $M \begin{bmatrix} w_p \\ u \end{bmatrix} = m$, atendiendo $w_p \neq 0$, y adicione w_p en V . Si no existe tal solución adicione $w_p = 0$ en V y pase al paso 5. Si no existe solución independiente del valor de w_p , mantenga V inalterado y pase al paso 5.

Paso 4: Adicione una última fila $[w'_p \dot{0} \dots 0]$ en M y un zero en la última posición de M (para forzar ortogonalidad de w_p con el vector w_{p+1} a ser calculado en el siguiente paso). Incremente p y retorne al paso 3.

Paso 5: Si $j < q$, incremente j y retorne al paso 2, caso contrario pare.

Teorema 2. Se $\mathcal{R}^n = \mathcal{V}_{i_0, i_1, \dots, i_{\ell-1}}(\bar{x})$ entonces la secuencia $(i_0, i_1, \dots, i_{\ell-1})$ con probabilidad positiva, genera una solución al PA. Considerando $U = [u(\ell-1)', \dots, u(0)']'$, las estrategias de control son determinadas al resolver

$$[B_{i_{\ell-1}} \dot{\dots} \dot{\phi}(\ell, 1) B_{i_0}] U = \bar{x} - \phi(\ell, 0) x_0.$$

Demostración: Basta proceder por inducción e ir construyendo los sistemas para cada modo de operación.

Algoritmo 2 Algoritmo generador de secuencias (AGS)

Entrada: El alvo $\bar{x} \in \mathcal{R}^n$ y horizonte $\ell \geq N$.

Salida. $S_k, k = 1, 2, \dots, \ell$.

Iteración 1: Hacer $I_{\ell-1} = I$, y para cada modo $i_{\ell-1}$ en $I_{\ell-1}$.

Calcular $\mathcal{V}_{i_0}(\bar{x})$.

Si algún modo $i_{\ell-1}$ verifica $\mathcal{V}_{i_{\ell-1}}(\bar{x}) = \emptyset$, hacer.

$$I_{\ell-1} = I_{\ell-1} - \{i_{\ell-1}\}$$

Finalmente, $S_1 = I_{\ell-1}$.

Iteración k: Siendo $k \geq 2$, hacer $I_{\ell-k} = I$, y para cada secuencia $(i_{\ell-k}, \dots, i_{\ell-1})$ en $I_{\ell-k} \times \dots \times I_{\ell-1}$.

Calcular $\mathcal{V}_{i_{\ell-k}, \dots, i_{\ell-1}}(\bar{x})$.

Si alguna secuencia de modos $(i_{\ell-k}, \dots, i_{\ell-1})$ verifica $\mathcal{V}_{i_{\ell-k}, \dots, i_{\ell-1}}(\bar{x}) = \mathcal{R}^n$, almacenarla en S_k .

Finalmente, $I_{\ell-k} \times \dots \times I_{\ell-1} := I_{\ell-k} \times \dots \times I_{\ell-1} - S_k$.

4. Ejemplos ilustrativos

En busca de presentar la idea de AGS de una forma simple y didáctica, consideramos las matrices $\mathbb{A} = (A_1, A_2, A_3)$ e $\mathbb{B} = (B_1, B_2, B_3)$. Dado $\alpha \in (0, \pi/2)$, definimos

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

e

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Denotemos $v_\alpha = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ y $\theta_{-\alpha} = \theta - \alpha$. Ilustramos el AGS, primero para el problema de controlabilidad y luego para el problema de alcanzabilidad.

4.1. El problema de controlabilidad

Sea $\bar{x} = (0, 0)$, $I = \{1, 2, 3\}$ y $\ell = 4$.

Iteración 1: Hacer $I_3 = I$, y para cada $i_3 \in I_3$, calculamos $\mathcal{V}_{i_3}(0)$ para almacenarlos en

i_3	$\mathcal{V}_{i_3}(0)$
1	$\text{span}\{e_1\}$
2	$\text{span}\{e_2\}$
3	\emptyset

Como $\mathcal{V}_3(0) = \emptyset$, actualizamos $I_3 = \{1, 2\}$.

Iteración 2: Hacer $I_2 = I$, e para cada $(i_2, i_3) \in I_2 \times I_3$, calculamos $\mathcal{V}_{i_2, i_3}(0)$ para almacenarlos en

i_2	$\mathcal{V}_{i_2, 1}(0)$	$\mathcal{V}_{i_2, 2}(0)$
1	$\text{span}\{e_1\}$	\mathcal{R}^2
2	\mathcal{R}^2	$\text{span}\{e_2\}$
3	$\text{span}\{v_\alpha\}$	$\text{span}\{v_\alpha^\perp\}$

De la tabla, tenemos que $S_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$ y actualizamos $I_2 \times I_3 = \{(1, 1), (3, 1), (3, 2), (2, 2)\}$. Además se verifica $\mathcal{V}_{1,1}(0) = \mathcal{V}_1(0)$ y $\mathcal{V}_{2,2}(0) = \mathcal{V}_2(0)$.

Iteración 3: Hacer $I_1 = I$, e para cada $(i_1, i_2, i_3) \in I_1 \times I_2 \times I_3$, calculamos $\mathcal{V}_{i_1, i_2, i_3}(0)$ para almacenarlos en

i_1	$\mathcal{V}_{i_1, 1, 1}(0)$	$\mathcal{V}_{i_1, 3, 1}(0)$	$\mathcal{V}_{i_1, 3, 2}(0)$	$\mathcal{V}_{i_1, 2, 2}(0)$
1	$\text{span}\{e_1\}$	\mathcal{R}^2	\mathcal{R}^2	\mathcal{R}^2
2	\mathcal{R}^2	\mathcal{R}^2	\mathcal{R}^2	$\text{span}\{e_2\}$
3	$\text{span}\{v_\alpha\}$	$\text{span}\{v_{2\alpha}\}$	$\text{span}\{v_{2\alpha}^\perp\}$	$\text{span}\{v_\alpha^\perp\}$

De la tabla, tenemos que

$S_3 = \{(1, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 2, 2), (2, 1, 1), (2, 3, 1), (2, 3, 2)\}$ y actualizamos

$$I_1 \times I_2 \times I_3 = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 1, 1), \dots, (3, 3, 1), (3, 3, 2), (3, 2, 2)\}.$$

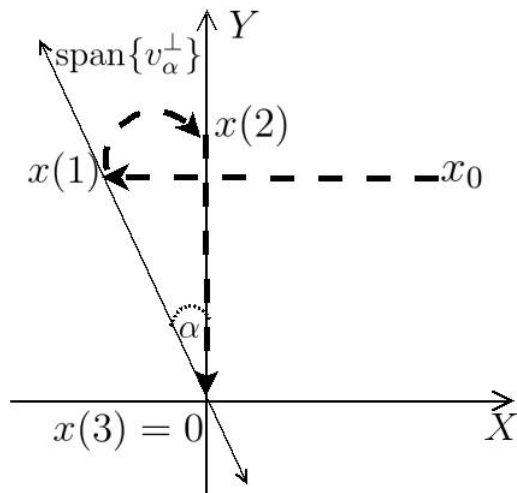


Figura 2. Dinámica de la variable x via la secuencia $(1, 3, 2)$, $x(1) = A_1 x_0 + B_1 u(0)$, $x(2) = A_3 x(1) + B_3 u(1)$ e $0 = A_2 x(2) + B_2 u(2)$.

Las estrategias de control son obtenidas via el teorema 2. Por ejemplo para la secuencia $(1, 3, 2)$, ilustramos su dinámica en la figura 2 e para esta esta secuencia construimos el sistema.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos \alpha \\ 1 & 0 & -\sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(3) \\ u(2) \\ u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\ x_1 \sin \alpha - x_2 \cos \alpha \end{bmatrix},$$

y obtenemos $u(2) = -x_2 \sec \alpha$, $u(1)$ puede ser cualquier valor real e $u(0) = -x_1 - x_2 \tan \alpha$.

Finalmente el control para cada secuencia en S_3 son dadas en la siguiente tabla.

(i_1, i_2, i_3)	$u(0)$	$u(1)$	$u(2)$
(1, 2, 2)	$-x_1$	$-x_2$	0
(2, 1, 1)	$-x_2$	$-x_1$	0
(1, 3, 1)	$x_2 \cot \alpha - x_1$	0	$-x_2 \csc \alpha$
(1, 3, 2)	$-x_2 \tan \alpha - x_1$	0	$-x_2 \sec \alpha$
(2, 3, 1)	$x_1 \tan \alpha - x_2$	0	$-x_1 \sec \alpha$
(2, 3, 2)	$-x_1 \cot \alpha - x_2$	0	$-x_1 \csc \alpha$

Iteración 4: Hacer $I_0 = I$ e para cada $(i_0, i_1, i_2, i_3) \in I_0 \times I_1 \times I_2 \times I_3$, calculamos $\mathcal{V}_{i_0, i_1, i_2, i_3}(0)$. Como son 18 las opciones a ser evaluados, mostramos solamente las secuencias que alcanzan el origen.

$$S_4 = \{(1, 2, 2, 2), (1, 3, 1, 1), (1, 3, 2, 2), \dots (2, 1, 1, 1), (2, 3, 1, 1), (2, 3, 2, 2)\}.$$

Notemos en S_4 que los tres primero indices de cada secuencia ya fueron evaluados en S_3 , isto indica que basta hacer $u(3) = 0$ para conservar el estado en el origen. Representamos todas las combinaciones posibles en la figura 3.

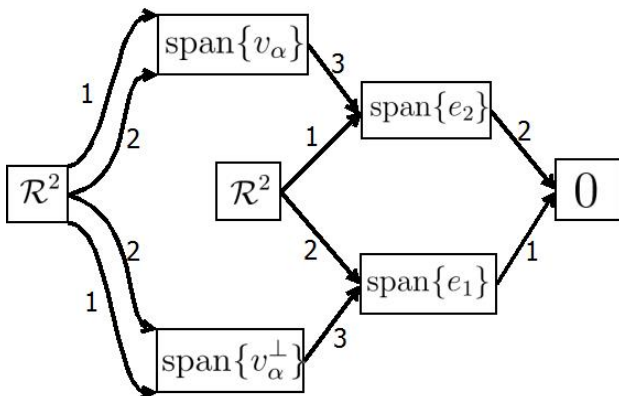


Figura 3. Representación de las secuencias y subespacios lineales que resuelven el problema de controlabilidad.

4.2. El problema de alcanzabilidad

Consideremos $\bar{x} = x_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ con $\theta > \alpha$ y $\ell = 3$.

Iteración 1: Hacer $I_2 = I$, y para cada $i_2 \in I_2$, calculamos $\mathcal{V}_{i_2}(x_\theta)$ para almacenarlos en

i_2	$\mathcal{V}_{i_2}(x_\theta)$
1	$x_2 = \sin \theta$
2	$x_1 = \cos \theta$
3	$x_{\theta - \alpha}$

De la tabla, mantenemos $I_2 = I$.

Iteración 2: Hacer $I_1 = I$, y para cada $(i_1, i_2) \in I_1 \times I_2$, calculamos $\mathcal{V}_{i_1, i_2}(x_\theta)$ para almacenarlos en

i_1	$\mathcal{V}_{i_1, 1}(x_\theta)$	$\mathcal{V}_{i_1, 2}(x_\theta)$	$\mathcal{V}_{i_1, 3}(x_\theta)$
1	$x_2 = \sin \theta$	\mathcal{R}^2	$x_2 = \sin \theta_{-\alpha}$
2	\mathcal{R}^2	$x_1 = \cos \theta$	$x_1 = \cos \theta_{-\alpha}$
3	$x_\theta + \text{span}\{v_\alpha\}$	$x_\theta + \text{span}\{v_\alpha^\perp\}$	$x_{\theta - \alpha}$

De la tabla $S_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$, logo actualizamos

$$I_1 \times I_2 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

Notemos que $\mathcal{V}_{1,1}(x_\theta) = \mathcal{V}_1(x_\theta)$ y $\mathcal{V}_{2,2}(x_\theta) = \mathcal{V}_2(x_\theta)$.

Iteración 3: Hacer $I_0 = I$, y para cada $(i_0, i_1, i_2) \in I_0 \times I_1 \times I_2$, calculamos $\mathcal{V}_{i_0, i_1, i_2}(x_\theta)$. Como son 21 opciones a ser evaluadas, presentamos solamente las secuencias que alcanzan x_θ .

$$S_3 = \{(1, 2, 2), (1, 2, 3), (2, 1, 1), (2, 1, 3), \dots (1, 3, 1), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 3, 2)\}$$

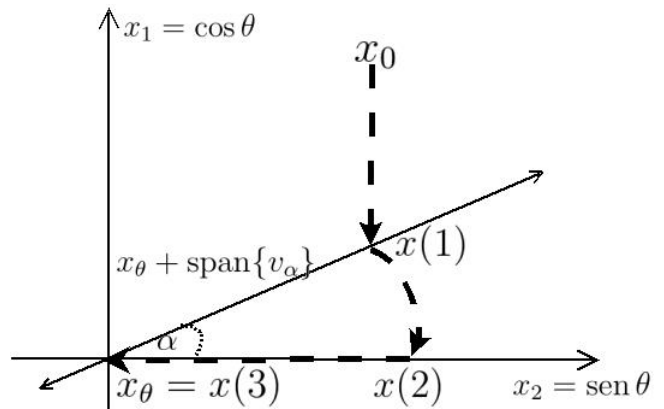


Figura 4. Dinámica de la variable x via la secuencia $(2, 3, 1)$, $x(1) = A_2 x_0 + B_2 u(0)$, $x(2) = A_3 x(1) + B_3 u(1)$ e $0 = A_1 x(2) + B_1 u(2)$.

Por ejemplo para la secuencia $(2, 3, 1)$, ilustramos su dinámica en la figura 4 e para esta secuencia construimos el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(3) \\ u(2) \\ u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + \cos \theta \\ x_1 \sin \alpha - x_2 \cos \alpha + \sin \theta \end{bmatrix}$$

y obtenemos $u(2) = -x_1 \sec \alpha + \sec \alpha \cos \theta_\alpha$, $u(2)$ puede ser cualquier valor real y $u(0) = -x_1 - x_2 \tan \alpha$. Finalmente el control para cada secuencia en S_3 es descrita en la tabla.

$u(0)$	$u(1)$	$u(2)$
$\cos \theta - x_1$	$\sin \theta - x_2$	0
$\cos \theta_\alpha - x_1$	$\sin \theta_\alpha - x_2$	0
$\sin \theta - x_2$	$\cos \theta - x_1$	0
$\sin \theta_\alpha - x_2$	$\cos \theta_\alpha - x_1$	0
$x_2 \cot \alpha - x_1 + C_1$	0	$D_1 - x_2 \csc \alpha$
$-x_2 \tan \alpha - x_1 + C_2$	0	$D_2 - x_2 \sec \alpha$
$x_1 \tan \alpha - x_2 + C_3$	0	$D_3 - x_1 \sec \alpha$
$-x_1 \cot \alpha - x_2 + C_4$	0	$D_4 - x_1 \csc \alpha$

donde

$$C_1 = -\frac{\sin \theta}{\sin \alpha}, C_2 = \frac{\cos \theta}{\cos \alpha}, C_3 = \frac{\sin \theta}{\cos \alpha}, C_4 = \frac{\cos \theta}{\cos \alpha}$$

y

$$D_1 = \frac{\sin \theta_\alpha}{\sin \alpha}, D_2 = \frac{\sin \theta_\alpha}{\cos \alpha}, D_3 = \frac{\cos \theta_\alpha}{\cos \alpha}, D_4 = \frac{\cos \theta_\alpha}{\sin \alpha}$$

Resumimos todas las posibles combinaciones que resuelven el problema de alcanzabilidad en la figura 5.

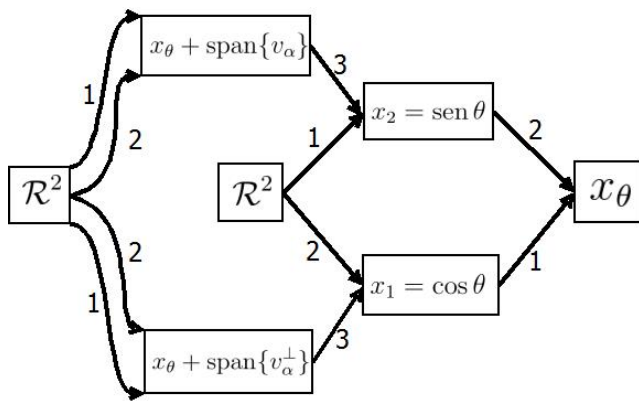


Figura 5. Representación de las secuencias y subespacios afines que resuelven el problema de alcanzabilidad.

5. Conclusiones

En este artículo es presentado una metodología práctica para determinar secuencias de índices (modos de operación) que hacen posible resolver PA y PC. Es descrito un algoritmo que genere estas secuencias mediante de forma regresiva y calcula las estrategias de control al resolver un sistema de ecuaciones que facilita su implementación. Esta metodología es ilustrada en dos ejemplos de forma clara y didáctica.

El número de subespacios afines encontrado por el algoritmo puede crecer de forma geométrica, esto podría dificultar su implementación para casos con dimensión relativamente grande; por otro lado, el método permite la incorporación de restricciones del tipo “modos a ser desconsiderados/evitados”, que evidentemente disminuye el costo computacional del problema y posibilita un tiempo finito.

Esta y otras posibles alternativas son temas a ser trabajados en el futuro. Debemos también resaltar que esta metodología puede ser utilizada sin alteración para sistemas chaveados en general, siendo restringido para SLSM por dos razones. Primero por el test de W-alcanzabilidad como condición necesaria de existencia, y segundo y más importante en la dimensionalidad n^2N como un horizonte de tiempo máximo, lo que permite limitar el número de iteraciones en AGS.

Referencias

P. J. Antsaklis and A. N. Michel. *Linear systems*. Birkhauser eds., pages 214-246, Boston, 2006.

T. Berger and T. Reis. *Controllability of linear differential-algebraic systems-a survey*. in: *Differential-Algebraic Equations Forum*, Springer -Verlag, pages 1-61, Berlin, Heidelberg, 2013.

E. Cinlar. *Introduction to stochastic processes*. Prentice-Hall eds., pages 106-138, New Jersey, 1975.

A. Czornik and A. Swiernak *On controllability with respect to the expectation of discrete time jump linear systems*. *Journal of the Franklin Institute*, 338: 443-453, 2001.

A. Czornik and A. Swiernak *On direct controllability of discrete time jump linear system*. *Journal of the Franklin Institute*, 341: 491-503, 2004.

E. F. Costa, J. B. R. do Val and M. D. Fragoso. *A new approach to detectability of discrete-time infinite Markov*

jump linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 43:2132-2156,2005.

E. F. Costa, A. L. P. Manfrim, and J. B. R. do Val *Weak controllability and weak stabilizability concepts for linear systems with Markov jump parameters*. ACC'06 American Control Conference, Minneapolis, USA,2006.

M. Ehrhardt and W. Kliemann *Controllability of linear stochastic systems*. *Systems and Control Letters*, Vol 2:3, 1982.

Maria J. F. Gomez and E. F. Costa. *On the stability of the recursive Kalman Filter With Markov jump parameters*. ACC'10 American Control Conference, Baltimore, 2010.

D. Gutierrez and E. F. Costa. *W-alcançabilidade para sistemas lineares com saltos markovianos a tempo discreto*. INPROCEEDINGS CNMAC'14 XXXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Natal, 2014.

J. P. Hespanha. *Linear systems theory*. Princeton University Press eds., pages 95-109, New Jersey, 2009.

Y. Ji and H. J. Chizeck. *Controllability, observability and discrete-time Markovian jump linear quadratic control*. *Internat J. Control*, 48(2):481-498,1988.

A. R. R. Narváez and E. F. Costa. *On the controllability of continuous-time markov jump linear system*. INPROCEEDINGS IFAC 18 th World Congress of the International Federation of Automatic Control, Milano, 2011.

O. L. V. Costa, M. D. Fragoso and R. P. Marques. *Discrete-time Markov jump linear systems*. Springer-Verlag eds., New York, 2005.

Zhendong Sun, S. S. Ge and T. H. Lee *Reachability and controllability of switched linear discrete-time systems*. *Automatic Control, IEEE Transactions* 46: 1431-1441,2001.

Zhendong Sun and S. S. Ge *Analysis and Synthesis of switched linear control systems*. *Automatica* 41: 181-195,2004.

Zhendong Sun. *Reachability analysis of constrained switched linear systems*. *Automatica* 43: 164-167, 2007.