Memorias del XVI Congreso Latinoamericano
de Control Automático, CLCA 2014
Octubre 14-17, 2014. Cancún, Quintana Roo, México

Método para robustecer controladores para sistemas de orden arbitrario vía algoritmo Super-Twisting

A. I. Castillo * **J. A. Moreno** ** **L. Fridman** *

* *Departamento de Ingeniería de Control y Robótica. División de Ingeniería Eléctrica. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, (e-mail: casism@gmail.com, lfridman@unam.mx).*
** *Coordinación Eléctrica y Computación, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, (e-mail: JMorenoP@ii.unam.mx)*

Resumen
En este artículo se presenta un método para robustecer controladores nominales para una clase de sistemas no lineales de orden arbitrario de una sola entrada mediante el algoritmo Super-Twisting. El problema está formulado como la estabilización de una cadena de integradores con perturbaciones/incertidumbres Lipschitz en el tiempo acopladas al canal de control. Se diseña una superficie de deslizamiento de grado relativo 1 dependiente de las trayectorias del sistema en lazo de cerrado con el control nominal, tal que cuando el modo deslizante de primer orden es alcanzado en tiempo finito por medio del controlador Super-Twisting, la dinámica obtenida es equivalente al sistema nominal, es decir, robusta con respecto a las perturbaciones/incertidumbres.

Keywords: Modos Deslizantes, Control Robusto, Convergencia en Tiempo Finito.

1. INTRODUCTÓN

En general, los modelos matemáticos de sistemas físicos corresponden sólo a aproximaciones de la realidad. Debido a ésto, la dinámica de éstos modelos sufren de incertidumbre paramétrica, dinámicas no modeladas y perturbaciones que en general son difíciles de caracterizar.

Estas perturbaciones necesitan ser tomadas en cuenta en el diseño del controlador tal que pueda contrarrestar sus efectos. Una forma de hacer ésto es diseñar un controlador que estabilice al sistema en su forma nominal (es decir, sin tener en cuenta el efecto de las perturbaciones), y después aplicar un método de robustecimiento tal que el controlador final robusto pueda estabilizar al sistema con las mismas propiedades de convergencia del sistema en lazo cerrado nominal, pero en presencia de las perturbaciones.

Nota 1. El concepto de *control robusto* en el marco de la teoría de Modos Deslizantes y del presente trabajo se refiere a las características de insensibilidad del sistema en lazo cerrado con respecto a las perturbaciones acopladas al canal de control que pueden ser caracterizadas por la cota de su norma o por ser funciones Lipschitz en el tiempo. Es decir, los controladores por Modos Deslizantes compensan de forma exacta las perturbaciones tales que el sistema perturbado en lazo cerrado se comporta de forma nominal después de que el modo deslizante es alcanzado en tiempo finito.

En general el robustecimiento de controladores implica la adición de funciones discontinuas para contrarrestar el efecto de las perturbaciones. Existen diversas propuestas para compensar o atenuar el efecto de las perturbaciones en (Khalil, 2002), como es el caso del Rediseño de Lyapunov. También los controladores por Modos Deslizantes de Orden Superior (Levant, 2003) presentan propiedades de robustez con respecto a perturbaciones acopladas al canal de control mediante señales de control discontinuas.

Cuando el controlador robusto presenta señales discontinuas, puede afectar de manera significativa el desempeño del sistema produciendo el efecto de *chattering*. Este fenómeno se caracteriza por las oscilaciones de frecuencia y amplitud finitas en los estados o de la salida debido al switcheo de alta frecuencia del controlador.

Se han presentado diferentes formas de atenuar el efecto de *chattering* (Khalil, 2002), sin embargo, al aplicar éstos métodos, los controladores pierden las propiedades para los cuales fueron diseñados originalmente. Por ejemplo, se pierde la convergencia en tiempo finito, resultando sólo en convergencia asintótica, o los estados sólo convergen a una vecindad del origen.

Contribución. Se propone un método de robustecimiento de controladores para sistemas de orden arbitrario mediante la integración del algoritmo Super-Twisting. Éste permite el rechazo de perturbaciones Lipschitz en el tiempo respetando las propiedades de convergencia del control nominal. La principal ventaja de éste tipo de robustecimiento es que la señal de control robustificada es absolutamente continua la cual reduce significatívamente el efecto de *chattering*. Por otro lado, una desventaja del método que se presenta es que no es capaz de rechazar perturbaciones cuya derivada temporal no esté acotada, como en el caso de controladores discontinuos.

En la sección 2 se plantea el problema de control a resolver. En la sección 3 se presenta la principal contribución en el diseño de una superficie deslizante que permite el robustecimiento mediante el algoritmo Super-Twisting, y el diseño del controlador final. En la sección 4 se muestra un ejemplo con simulaciones para comprobar la eficacia del método de robustecimiento propuesta.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Considere un sistema dinámico de orden arbitrario n, de una sola entrada de control dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} \qquad\qquad i = 1, ..., n-1 \\ \dot{x}_n &= f(x,t) + g(x,t)\,(u + \varphi(x,t)) \end{aligned} \tag{1}$$

donde $x = [x_1, x_2, ..., x_n]$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $f(x,t)$ y $g(x,t)$ son funciones suaves de los estados que representan la dinámica nominal y conocida, además $0 < k_m \leq g(x,t) \leq k_M$, $\varphi(x,t)$ es una función Lipschitz continua que actúa persistentemente y que representa las incertidumbres y/o perturbaciones actuando sobre el sistema y que está acoplada al canal de control.

El objetivo de este artículo es el robustecimiento de controladores continuos $u = u_0(x)$ capaces de estabilizar al sistema nominal (2), ($\varphi(x,t) = 0$)

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} \qquad\qquad i = 1, ..., n-1 \\ \dot{x}_n &= f(x,t) + g(x,t)u_0. \end{aligned} \tag{2}$$

En general, el robustecimiento de controladores se realiza mediante la adición de funciones discontinuas al control nominal (Khalil, 2002). Sin embargo como ya se mencionó, la principal desventaja de las funciones discontinuas es el efecto de *chattering* en el sistema, el cual puede ocasionar daños en la planta debido a su frecuencia de switcheo. Por lo tanto es necesario hacer otro tipo de robustecimiento, tal que el controlador final robustificado $u = \Phi(x, u_0, \varphi(x,t))$ también sea continuo. Para tal efecto, el robustecimiento que se desarrollará en éste trabajo será mediante el algoritmo Super-Twisting, un algoritmo que proporciona una acción de control continua.

El control robustificado debe ser capaz de lograr estabilizar al sistema (1) de manera robusta con respecto a $\varphi(x,t)$, tal que después de un tiempo finito, las trayectorias del sistema se comporten de forma nominal (2) conservando las propiedades de convergencia de u_0.

3. ALGORITMO DE ROBUSTECIMIENTO PROPUESTO

3.1 Diseño de la Superficie de deslizamiento

Si para el sistema nominal (2) existe un control $u = u_0(x)$ tal que el origen del sistema en lazo cerrado es estable, entonces es posible diseñar una superficie de deslizamiento y un controlador, tal que el sistema (1) se comporte de forma robusta con respecto a $\varphi(x,t)$ conservando todas las propiedades de estabilidad del sistema en lazo cerrado (2).

Se define la variable de deslizamiento como

$$\begin{aligned} \sigma(x, u_0(x(t))) = x_n(t) - \int_0^t &(f(x(\tau),\tau) + \\ &+ g(x(\tau),\tau)u_0(x(\tau)))\,d\tau \end{aligned} \tag{3}$$

donde $x(t)$ corresponde a una trayectoria del sistema nominal. Debido a que la variable de deslizamiento $\sigma(x, u_0)$, siempre incluye la última variable de estado del sistema en forma de cadena de integradores, su grado relativo es 1.

Cuando las trayectorias se encuentran en la superficie de deslizamiento, es decir, $\sigma(x, u_0) = 0$, se satisface

$$x_n(t) = \int_0^t (f(x,t) + g(x,t)u_0)\,dt \tag{4}$$

lo que implica que

$$\dot{x}_n = f(x,t) + g(x,t)u_0. \tag{5}$$

Es decir, cuando $\sigma(x, u_0) = 0$ la dinámica de la última variable de estado cambia de

$$\dot{x}_n = f(x,t) + g(x,t)(u + \varphi(x,t))$$

a

$$\dot{x}_n = f(x,t) + g(x,t)u_0,$$

por lo tanto el sistema se comportará de forma nominal aún en presencia de las incertidumbres/perturbaciones $\varphi(x,t)$.

3.2 Diseño de Controlador

Mediante el diseño adecuado de un controlador, es posible llevar a las trayectorias del sistema a $\sigma(x, u_0) = 0$ en tiempo finito. La dinámica de la superficie está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \dot{x}_n - f(x,t) - g(x,t)u_0 \\ &= f(x,t) + g(x,t)\,(u + \varphi(x,t)) - f(x,t) - g(x,t)u_0 \\ &= g(x,t)\,(u + \varphi(x,t)) - g(x,t)u_0. \end{aligned}$$

Si se aplica el control

$$u = u_0 + \nu, \tag{6}$$

donde ν es una entrada adicional de control, se obtiene

$$\dot{\sigma} = g(x,t)\,(\nu + \varphi(x,t))\,. \tag{7}$$

Control discontinuo. Cuando las perturbaciones están acotadas por una constante φ_0

$$|\varphi(x,t)| \leq \varphi_0$$

un modo deslizante convencional (de primer orden) puede ser alcanzado mediante el controlador

$$\nu = -(\varphi_0 + \varphi_\epsilon)\mathrm{sign}\,(\sigma) \tag{8}$$

con $\varphi_\epsilon > 0$. Sin embargo, la principal desventaja de éste tipo de controladores es el efecto de *chattering*, cuya amplitud es proporcional a la cota de las perturbaciones φ_0.

Control continuo: Algoritmo Super-Twisting. Por otro lado, si es posible caracterizar las perturbaciones como

$$\varphi(x,t) = \rho_1(x,t) + \rho_2(x,t) \tag{9}$$

tales que

$$|\rho_1(x,t)| \leq \delta_1|\sigma|^{1/2}, \qquad \left|\frac{d\rho_2(x,t)}{dt}\right| \leq \delta_2 \tag{10}$$

donde $\delta_1, \delta_2 \geq 0$, es posible la aplicación del controlador por modos deslizantes de segundo orden Super-Twisting, que produce una señal de control continua. Debido a la continuidad de la acción de control del algoritmo Super-Twisting, éste es capaz de compensar una gama distinta de perturbaciones que en el caso convencional (8). Es decir, la función $\varphi(x,t)$ puede ser no acotada, mientras que su derivada temporal sí lo es.

Tomando el controlador Super-Twisting

$$\begin{aligned} \nu &= -k_1 \lfloor \sigma \rceil^{1/2} + w \\ \dot{w} &= -k_2 \lfloor \sigma \rceil^{0} \end{aligned} \tag{11}$$

donde el operador $\lfloor \alpha \rceil^{\beta} = |\alpha|^{\beta} \mathrm{sign}\,(\alpha)$, en lazo cerrado con (7) y (9) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= g(x,t)(-k_1 \lfloor \sigma \rceil^{1/2} + \rho_1(x,t) + h) \\ \dot{h} &= -k_2 \lfloor \sigma \rceil^{0} + \frac{d\rho_2(x,t)}{dt}. \end{aligned} \tag{12}$$

donde $h = w + \rho_2(x,t)$.

Cuando las perturbaciones satisfacen las cotas (10) y las ganancias del controlador Super-Twisting son seleccionadas como (Moreno and Osorio, 2012)

$$\begin{aligned} k_1 &> 2\delta_1 \\ k_2 &> k_1 \frac{5\delta_1 k_1 + 6\delta_2 + 4(\delta_1 + \delta_2/k_1)^2}{2(k_1 - 2\delta_1)} \end{aligned} \tag{13}$$

entonces, σ y h convergen a cero en tiempo finito y permanecen ahí para todo tiempo futuro a pesar de la presencia de las perturbaciones $\rho_1(x,t)$ y $\rho_2(x,t)$.

Además, cuando σ y h convergen a cero, implica que existe un modo deslizante en $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ por medio de un control continuo, donde el sistema se comportará de forma nominal (2), robusto con respecto a $\varphi(x,t)$.

Finalmente, la ley de control total está dada por

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \nu \\ \nu &= -k_1 \lfloor \sigma \rceil^{1/2} + w \\ \dot{w} &= -k_2 \lfloor \sigma \rceil^{0} \\ \sigma(x, u_0) &= x_n - \int_0^t \left(f(x,t) + g(x,t) u_0\right) dt. \end{aligned} \tag{14}$$

Nótese que si el sistema con el control nominal (sin perturbaciones) converge asintótica o exponencialmente o en tiempo finito, entonces el sistema perturbado con el control (14), tiene el mismo tipo de convergencia.

4. EJEMPLO

Considérese un manipulador de un solo eslabón de uniones flexibles (Figura 1) con un perfil $\tau(t)$ de carga aplicado al extremo del eslabón consideradas como perturbaciones. El sistema puede ser representado por el sistema de cuarto orden

$$\dot{x} = F(x,t) + Gu \tag{15}$$

donde

$$F(x,t) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -e_1 sin(x_1) - e_2(x_1 - x_3) + \tau(t) \\ x_4 \\ m_1(x_1 - x_3) - m_2 x_4 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

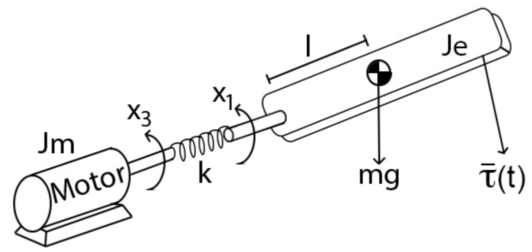


Figura 1. Manipulador de un eslabón de unión flexible

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{mgl}{J_e} = 0.4905 s^{-2}, & e_2 &= \frac{k}{J_e} = 10 s^{-2}, \\ m_1 &= \frac{k}{J_m} = 10 s^{-2}, & m_2 &= \frac{b}{J_e} = 1.1 s^{-1}, \\ m_3 &= \frac{1}{J_m} = 0.1 kg^{-1} m^{-2}, & \tau(t) &= \bar{\tau}(t)/J_e. \end{aligned}$$

Las variables de estado $x = [x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4]^T$ representan las posición y velocidad del eslabón y posición y velocidad del motor, respectivamente. Para fines de simulación, la señal de carga o perturbaciones es tal que la función $\tau(t)$ en espacio de estados está dada por

$$\tau(t) = 2cos(\sqrt{2}t) + 0.1 sin(10t) + 5s^{-2} \tag{16}$$

El objetivo de control es la regulación de la variable de salida $y = x_1$ en presencia de las perturbaciones $\tau(t)$. Al derivar la salida de forma iterativa con respecto del tiempo se tiene que el grado relativo es 4 y la forma del sistema es

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= y^{(2)} \\ y^{(2)} &= y^{(3)} \\ y^{(3)} &= y^{(4)} \\ y^{(4)} &= f(x) + gu + \varphi(x,t) \end{aligned} \tag{17}$$

donde

$$\begin{aligned} f(x) &= (e_1 cos(x_1) + e_2)(e_1 sin(x_1) + e_2(x_1 - x_3)) + \\ &\quad + e_1 sin(x_1) x_2^2 + e_2(m_1(x_1 - x_3) - m_2 x_4), \\ g &= e_2 m_3, \\ \varphi(x,t) &= \ddot{\tau}(t) - \tau(t)(e_1 cos(x_1) + e_2). \end{aligned}$$

La superficie de deslizamiento (3) se selecciona como

$$\sigma = y^{(3)} - \int (f(x) + g u_0)\, dt \tag{18}$$

Al aplicar la ley de control (6) la dinámica de la superficie es

$$\dot{\sigma} = g\nu + \varphi(x,t)$$

y dado que g es conocida se puede hacer un cambio de entrada de control $\bar{\nu} = g\nu$

$$\dot{\sigma} = \bar{\nu} + \varphi(x,t).$$

4.1 Diseño de Super-Twisting

La descomposición (9) de las perturbaciones puede ser

$$\rho_1(x,t) = 0, \qquad \rho_2(x,t) = \ddot{\tau}(t) - \tau(t)(e_1 cos(x_1) + e_2), \tag{19}$$

y donde

$$\frac{d\rho_2(x,t)}{dt} = \tau^{(3)} + \tau(t) e_1 sin(x_1) x_2 - \dot{\tau}(t)(e_1 cos(x_1) + e_2), \tag{20}$$

De la función (16) y sus derivadas,

$$\begin{aligned} \tau(t) &= 2cos(\sqrt{2}t) + 0.1sin(10t) + 5, & |\tau(t)| &\leq \tau_0 \\ \dot{\tau}(t) &= -2\sqrt{2}sin(\sqrt{2}t) + cos(10t), & |\dot{\tau}(t)| &\leq \tau_1 \\ \tau^{(2)}(t) &= -4cos(\sqrt{2}t) - 10sin(10t), & |\tau^{(2)}(t)| &\leq \tau_2 \\ \tau^{(3)}(t) &= 4\sqrt{2}sin(\sqrt{2}t) - 100cos(10t), & |\tau^{(3)}(t)| &\leq \tau_3 \end{aligned} \tag{21}$$

se obtiene la cota de (20),

$$\left| \frac{d\rho_2(x,t)}{dt} \right| \leq \tau_3 + \tau_0 e_1 \bar{x}_2 + \tau_1(e_1 + e_2) \tag{22}$$

donde $\bar{x}_2 = 2s^{-1}$, es el máximo de velocidad del eslabón dependiente del máximo par del actuador del manipulador.

Las cotas de los términos de la perturbación (10) se satisfacen con

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = 153,$$

y por lo tanto de acuerdo con (Moreno and Osorio, 2012), las ganancias (13) del controlador Super-Twisting se pueden elegir como

$$k_1 = 35, \quad k_2 = 510. \tag{23}$$

4.2 Control Nominal.

En la literatura es posible encontrar controladores que pueden estabilizar el sistema en su forma nominal

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= y^{(2)} \\ y^{(2)} &= y^{(3)} \\ y^{(3)} &= y^{(4)} \\ y^{(4)} &= f(x) + gu_0 \end{aligned} \tag{24}$$

Cada controlador $u_{0,i}$ puede tener diferentes propiedades de convergencia. El robustecimiento permite conservar estas propiedades en prescencia de $\varphi(x,t)$.

Linealización por retroalimentación de estados. La linealización por retroalimentación de estados permite cancelar todos las no linealidades del sistema (24) para transformarlo en un sistema lineal y aplicar cualquier método de estabilización lineal. La ley de control

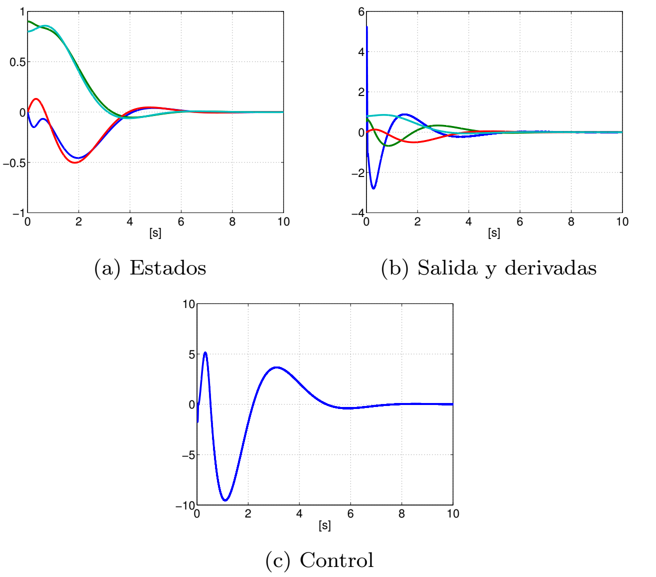
$$u_{0,1} = \frac{1}{g}\left(-f(x) - K\bar{y}\right), \; K = [14.1 \; 23.1 \; 18.4 \; 7.5] \tag{25}$$

con $\bar{y} = [y, y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}]^T$estabiliza al sistema (24) haciendo su origen exponencialmente estable.

Simulaciones. Las condiciones iniciales son $x_0 = [0.8 \; 0 \; 0.9 \; 0]^T$. En la figura 2 se presenta el sistema (24) en lazo cerrado con el controlador (25). Es posible observar la convergencia exponencial de los estados (2a) y salidas (2b), junto con la señal de control continua (2c).

En la figura 3, se presenta el sistema (17) con el controlador (25). Se puede observar como el controlador (25) es incapaz de llevar las salidas a cero. Se presentan oscilaciones y defasamientos considerables.

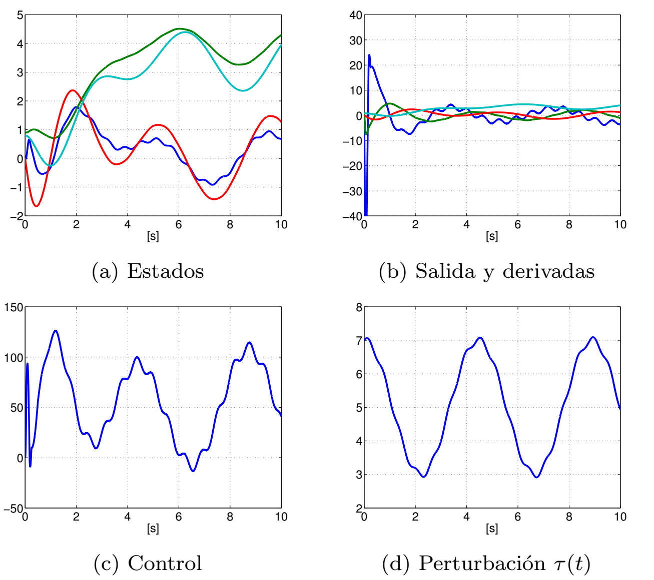
Finalmente en la figura 4, se presenta el sistema (17), el controlador (14) con las ganancias (23), donde u_0 es el controlador lineal (25). Es posible observar en la figura (4b) como la salida $y = x_1$ y sus tres primeras derivadas temporales convergen a cero exponencialmente a pesar de las perturbaciones (3d). En la figura (4a), se aprecian las primeras dos variables de estado x_1, x_2 converger a cero, mientras que los demás estados no.



(a) Estados (b) Salida y derivadas

(c) Control

Figura 2. Sistema nominal con linealización por retroalimentación de estados



(a) Estados (b) Salida y derivadas

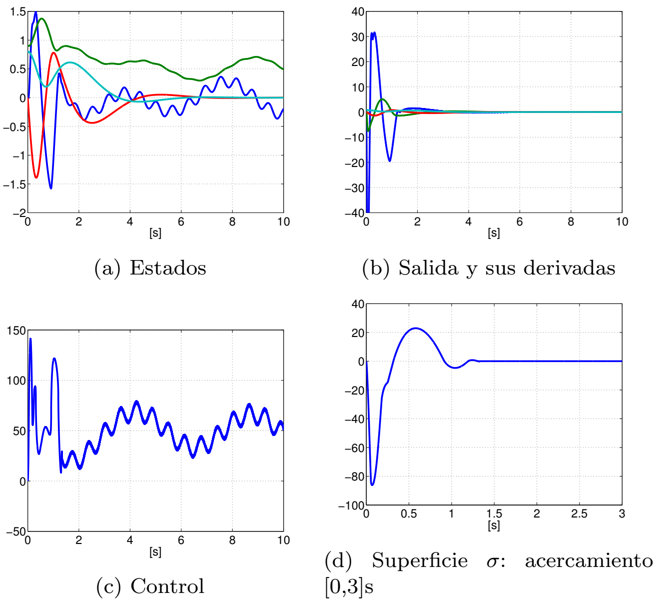
(c) Control (d) Perturbación $\tau(t)$

Figura 3. Sistema perturbado con linealización por retroalimentación de estados

Ésta es una característica del esquema de linealización por retroalimentación entrada-salida. El robustecimiento exacto se logra cuando la superficie σ alcanza el cero en tiempo finito al rededor del tiempo 1.3s (figura (4d)). La figura (4c) muestra la señal de control absolutamente continua que compensa la perturbación (3d) exactamente.

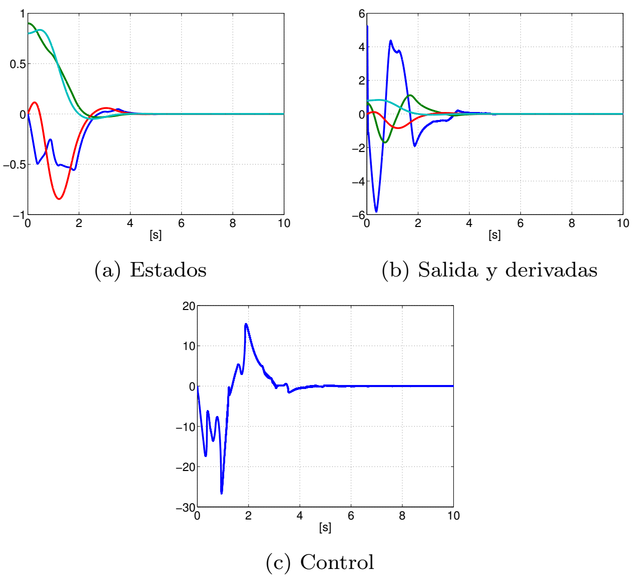
Control con convergencia en tiempo finito. Considérese el controlador de Hong (Hong et al., 2005) de cuarto orden definido de la siguente forma:

$$\begin{aligned} v_1 &= -l_1 \lfloor \lfloor z_1 \rceil^{\beta_0} - 0 \rceil^{\alpha_1/\beta_0} \\ v_2 &= -l_2 \lfloor \lfloor z_2 \rceil^{\beta_1} - \lfloor v_1 \rceil^{\beta_1} \rceil^{\alpha_2/\beta_1} \\ v_3 &= -l_3 \lfloor \lfloor z_3 \rceil^{\beta_2} - \lfloor v_2 \rceil^{\beta_2} \rceil^{\alpha_3/\beta_2} \\ u_{0,2} = v_4 &= -l_4 \lfloor \lfloor z_4 \rceil^{\beta_3} - \lfloor v_3 \rceil^{\beta_3} \rceil^{\alpha_4/\beta_3} \end{aligned} \tag{26}$$



(a) Estados (b) Salida y sus derivadas (c) Control (d) Superficie σ: acercamiento [0,3]s

Figura 4. Sistema perturbado con linealización por retroalimentación de estados robustificado



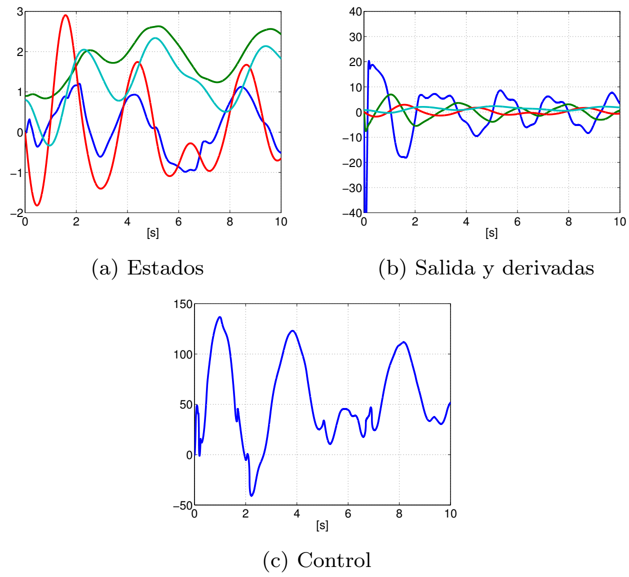
(a) Estados (b) Salida y derivadas (c) Control

Figura 5. Sistema nominal con controlador de convergencia en tiempo finito

con los parámetros $k = -0.1$, $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $l_3 = 4$, $l_4 = 8$, $\beta_0 = 0.8$, $\beta_1 = 1.25$, $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = 3.5$, $\alpha_1 = 0.8$, $\alpha_2 = 0.75$, $\alpha_3 = 0.6667$, $\alpha_4 = 0.5$.

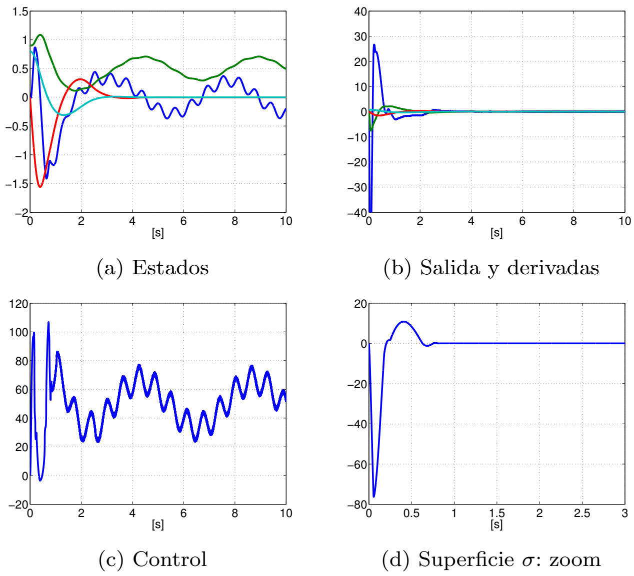
Simulaciones. En la figura 5 se presenta el sistema (24) en lazo cerrado con el controlador (26) el cual muestra la convergencia en tiempo finito de los estados (5a), la salida y sus derivadas (5b), y la señal de control continua (5c).

En la figura 6, se presenta el sistema (17) con el controlador (26). Es posible observar que a pesar de la convergencia en tiempo finito del controlador de Hong para el sistema nominal, éste no es capaz de compensar las perturbaciones en (17).



(a) Estados (b) Salida y derivadas (c) Control

Figura 6. Sistema perturbado con controlador de convergencia en tiempo finito



(a) Estados (b) Salida y derivadas (c) Control (d) Superficie σ: zoom

Figura 7. Sistema perturbado con controlador de convergencia en tiempo finito robustificado

Finalmente en la figura 7, se presenta el sistema (17), el controlador (14) con las ganancias (23) donde u_0 es (26). Es posible observar en la figura (7b) como la salida $y = x_1$ y sus tres primeras derivadas temporales convergen a cero en tiempo finito a pesar de las perturbaciones (3d). En la figura (7a), se aprecian las dos primeras variables de estado x_1, x_2 converger a cero, mientras que los demás estados no. El robustecimiento exacto se logra cuando la superficie σ alcanza el cero en tiempo finito al rededor del tiempo 0.7s (figura (7d)). La figura (7c) muestra la señal de control absolutamente continua que compensa la perturbación (3d) exactamente. Las condiciones iniciales y las perturbaciones son las mismas que en el ejemplo anterior.

5. CONCLUSIONES

Mediante el método propuesto: el diseño de una superficie de deslizamiento y el diseño de las ganancias del algoritmo Super-Twisting, fue posible robustificar controladores para una clase de sistemas no lineales de orden arbitrario. Cuando las trayectorias del sistema alcanzan la superficie $\sigma = 0$ en tiempo finito, el sistema se comporta de forma de forma nominal, incluso en presencia de las perturbaciones $\varphi(x,t)$ Lipschitz en el tiempo. La señal de control resultante es absolutamente continua, por lo que el efecto de *chattering* se ve reducido en forma muy significativa.

El método de robustecimiento permite preservar las propiedades de convergencia del controlador nominal, como es el caso de la convergencia en tiempo finito en sistemas de grado relativo arbitrario.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido del Fondo de Colaboración II-FI, UNAM, Proyecto IISGBAS-109-2013, PAPIIT, UNAM, concesión IN113614, y CONACYT CVU 425551.

REFERENCIAS

Hong, Y., Wang, J., and Xi, Z. (2005). Stabilization of uncertain chained form systems within finite settling time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(9), 1379–1384.

Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear systems*, volume 3. Englewood Cliffs, New Jerse: Prentice-Hall.

Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of control*, 76(9-10), 924–941.

Moreno, J.A. and Osorio, M. (2012). Strict lyapunov functions for the super-twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4), 1035–1040.