

Síntesis de Regulador H_∞ Global para Robots Manipuladores

Carlos A. Chávez* Luis T. Aguilar* Jován O. Mérida**

* Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital
Av. Instituto Politécnico Nacional No. 1310, Mesa de Otay, Tijuana
22510 México (e-mail: cchavez@citedi.mx; laguilarb@ipn.mx).

** Instituto Politécnico Nacional, ESIME-Culhuacán

Av. Santa Ana No. 1000, Col. San Francisco Culhuacán, Deleg.
Coyoacán, México, D. F. 04430, México (e-mail: merida@citedi.mx).

Resumen: Se presenta una solución a la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaac (HJI), a través de una función estricta de Lyapunov para resolver el problema de regulación H_∞ en forma global, aplicado a los sistemas Euler-Lagrange completamente actuados, con articulaciones tipo rotacional y sujeto a perturbaciones externas. El desempeño del sistema en lazo cerrado se presenta en un robot manipulador de tres grados de libertad (g.d.l.) a través de simulaciones numéricas.

Keywords: Regulador H_∞ global, desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs, función de Lyapunov, robot manipulador.

1. INTRODUCCIÓN

El análisis del control sub-óptimo H_∞ inició con las importantes contribuciones de Ball y Helton (1989), Basar y Bernhard (1990) y Van der Schaft (1991), presentando la solución local al problema de control H_∞ por retroalimentación de estados. En Isidori y Astolfi (1992), Isidori y Kang (1995), Aliyu (2003) y Van der Schaft (1992) se menciona que el principal problema del control sub-óptimo H_∞ no lineal es la dificultad de resolver la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI), pues no existe un método numérico que la resuelva satisfactoriamente. Algunos investigadores como Lukes (1969) y Glad (1987), propusieron un método basado en la aproximación polinomial en series de Taylor para la solución de la ecuación de HJI. Otro ejemplo es Van der Schaft (1992), que propone un método recursivo para la solución de la ecuación de HJI, que después fue refinado por Isidori y Kang (1995). Aliyu (2003) presenta una propuesta a la solución de la ecuación de HJI para el problema de control H_∞ de sistemas no lineales, que consiste en un método de inversión que involucra la solución de la ecuación de HJI como una función algebraica, cuadrática y escalar, además del gradiente de una función escalar, suave y desconocida, reduciendo el problema a una factorización de una ecuación vectorial algebraica, que se denomina ecuación discriminante. Uno de los principales inconvenientes del método, es que, el resultado obtenido de la ecuación discriminante, no garantiza que el gradiente sea una función escalar, y por lo tanto no hay garantía de que el resultado de la solución sea definido positivo.

En Ferreira et al. (2008), se propone otra opción para la solución de la ecuación de HJI basado en aproximaciones de Galerkin, la idea básica es reducir la ecuación de

HJI a una secuencia infinita de ecuaciones diferenciales parciales, cuya solución se puede obtener por el método de aproximación de Galerkin.

En el presente artículo, se propone una solución al problema de regulación H_∞ en forma global, aplicado a los sistemas Euler-Lagrange completamente actuados, con articulaciones del tipo rotacional y sujeto a perturbaciones externas. Se verifica la desigualdad de HJI por medio de una función estricta de Lyapunov (tomada de Kelly et al. (2005)), y por medio de un análisis de cotas máximas se calculan las condiciones bajo las cuales la desigualdad de HJI se satisface para el sistema de lazo cerrado.

En la actualidad una de las desventajas del control H_∞ , con respecto a otras técnicas de control, es la linealización del sistema en un punto de equilibrio, que convierte la desigualdad HJI en ecuaciones algebraicas de Riccati, que facilitan la solución del problema de control H_∞ , por consiguiente el controlador se vuelve local (Orlov y Aguilar (2014)). Ahora, a través de una función estricta de Lyapunov se logró comprobar que la desigualdad de HJI se satisface. Una primera aproximación a la solución del problema se presentó en Acho et al. (2002).

Este artículo es organizado como sigue: En la Sección 2 se describe el modelo dinámico de robots manipuladores de l g.d.l. y algunas propiedades importantes. En la Sección 3 se presenta la teoría del control H_∞ para sistemas no lineales invariantes en el tiempo. En la Sección 4, se formula el problema a resolver y se presenta la solución a la desigualdad de HJI para el caso de sistemas Euler-Lagrange completamente actuados. En la Sección 5 se presentan los resultados en simulación. Finalmente, en la Sección 6 se presentan las conclusiones.

2. MODELO DINÁMICO DE ROBOTS MANIPULADORES

El modelo dinámico de robots manipuladores con articulaciones rotacionales de l g.d.l. con eslabones rígidos y sin fricción en sus articulaciones es (Spong y Vidyasagar (1989)):

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\omega}_\tau \quad (1)$$

donde $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^l$ es el vector de posiciones articulares, $\dot{\mathbf{q}}(t) \in \mathbb{R}^l$ es el vector de velocidades articulares, $\boldsymbol{\tau}(t) \in \mathbb{R}^l$ es el vector de fuerzas y pares aplicados a las articulaciones, $t \in \mathbb{R}$ es el tiempo, $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ es la matriz de inercia, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^l$ es el vector de pares gravitacionales y $\boldsymbol{\omega}_\tau(t) \in \mathcal{L}_2^e(0, T)$ es el vector de perturbaciones desconocidas que se asumen pertenecen al espacio \mathcal{L}_2 extendido definido como

$$\mathcal{L}_2^e = \int_0^T \|\mathbf{w}_\tau(t)\|^2 dt < \infty. \quad (2)$$

El vector de posiciones y velocidades articulares están disponibles para la retroalimentación.

Las siguientes propiedades solo son válidas para manipuladores con articulaciones rotacionales Kelly et al. (2005):

Propiedad 1. La matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es simétrica y positiva definida para toda $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^l$. La matriz $M^{-1}(\mathbf{q})$ existe y es positiva definida.

Propiedad 2. La matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la derivada temporal $\dot{M}(\mathbf{q})$ de la matriz de inercia satisface:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (3)$$

para toda $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^l$.

Propiedad 3. Existe una constante positiva k_{c1} tal que para toda $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^l$:

$$\|C(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{z}\| \leq k_{c1} \|\mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\|. \quad (4)$$

3. TEORÍA DEL CONTROL H_∞ NO LINEAL

El propósito de la presente Sección es hacer un preámbulo en la solución del problema de control H_∞ en forma global de sistemas no lineales autónomos de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G_1(\mathbf{x})\mathbf{w} + G_2(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (5)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}_1(\mathbf{x}) + K_{12}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (6)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}_2(\mathbf{x}) + K_{21}(\mathbf{x})\mathbf{w} \quad (7)$$

donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^l$ es la entrada de control, $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^{l+n}$ son perturbaciones desconocidas, $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^{l+n}$ es la salida desconocida a ser controlada, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$ son estados medidos, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $G_1(\mathbf{x})$, $G_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{h}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{h}_2(\mathbf{x})$, $K_{12}(\mathbf{x})$ y $K_{21}(\mathbf{x})$ son funciones vectoriales y matriciales con dimensiones apropiadas. Sin

pérdida de generalidad, se supone que el origen es el punto de equilibrio del sistema.

El sistema (5) debe satisfacer las siguientes suposiciones.

Suposición 1. Las funciones $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $G_1(\mathbf{x})$, $G_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{h}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{h}_2(\mathbf{x})$, $K_{12}(\mathbf{x})$ y $K_{21}(\mathbf{x})$ son continuamente diferenciables en \mathbf{x} .

Suposición 2. $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{h}_1(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y $\mathbf{h}_2(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ para toda t .

Suposición 3.

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1^T(\mathbf{x})K_{12}(\mathbf{x}) &= 0, & K_{12}^T(\mathbf{x})K_{12}(\mathbf{x}) &= I, \\ K_{21}(\mathbf{x})G_1^T(\mathbf{x}) &= 0, & K_{21}(\mathbf{x})K_{21}^T(\mathbf{x}) &= I. \end{aligned}$$

La Suposición 1 garantiza que las dinámicas del sistema estén bien posicionadas, mientras la entrada es excitada con una señal exógena. La Suposición 2 asegura que el origen sea un punto de equilibrio en ausencia de la señal de entrada ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) y libre de perturbaciones ($\mathbf{w} = \mathbf{0}$) del sistema dinámico (5). La Suposición 3 es para evitar el cruce entre las señales de control y de perturbaciones al ser mapeadas al sistema.

La ley de control H_∞ no lineal por retroalimentación de estados:

$$\mathbf{u} = \mathcal{K}(\mathbf{x}) \quad (8)$$

es un controlador admisible en forma global si el origen del sistema en lazo cerrado (5), (8) es un estado de equilibrio asintóticamente estable en forma global cuando $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Dada una constante $\gamma > 0$, se dice que el sistema (5) y (8) tiene una ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ si la respuesta \mathbf{z} , que resulta de $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ para cualquier condición inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ satisface

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{z}(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{w}(t)\|^2 dt \quad (9)$$

para toda $t_1 > t_0$ y toda función continua a tramos $\mathbf{w}(t)$, entonces, el problema de control H_∞ consiste en encontrar un controlador admisible por retroalimentación de estados (8) bajo la medición disponible (6) tal que la ganancia \mathcal{L}_2 del sistema en lazo cerrado (5) y (8) sea menor que γ .

3.1 Solución Global al Problema de Regulación H_∞

Hipótesis 1. Si existe una función positiva definida $n(\mathbf{x})$ y una función suave y positiva definida $V(\mathbf{x})$ tal que la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs (Orlov et al. (1999))

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \gamma^2 \boldsymbol{\alpha}_1^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}_1(\mathbf{x}) - \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{h}_1^T(\mathbf{x}) \mathbf{h}_1(\mathbf{x}) + n(\mathbf{x}) \leq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

se cumple con

$$\boldsymbol{\alpha}_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\gamma^2} G_1^T(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \quad (11)$$

$$\alpha_2(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}G_2^T(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T. \quad (12)$$

Teorema 1. Suponer que la Hipótesis 1 se cumple, entonces una solución al problema de control H_∞ en forma global del sistema en lazo cerrado (5) a través de la ley de control por retroalimentación de estados (Orlov et al. (1999)) es:

$$\mathbf{u} = \alpha_2(\mathbf{x}) \quad (13)$$

se considera un control admisible globalmente.

4. REGULADOR GLOBAL H_∞

4.1 Formulación del Problema

El problema de regulación H_∞ no lineal se puede formular de la siguiente manera: dado el vector de posición deseado $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^l$ el objetivo de control del regulador es hacer que el sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable en forma global y asegurar que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_d\| = \mathbf{0} \quad (14)$$

para una condición inicial arbitraria $\mathbf{q}(0) \in \mathbb{R}^l$ en presencia de perturbaciones externas.

Suposición 4. El controlador estabilizador

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}_1 + \mathbf{q}_d) - K_p \boldsymbol{\xi}_1 - K_v \boldsymbol{\xi}_2 + \mathbf{u} \quad (15)$$

que consiste de un compensador de par gravitacional, una parte proporcional-diferencial y un atenuador de perturbaciones, respectivamente, que estabiliza internamente el sistema en lazo cerrado alrededor de la posición deseada. Las matrices K_p y $K_v \in \mathbb{R}^{l \times l}$ son simétricas y definidas positivas, el error de posición y velocidad se define como $\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d$ y $\boldsymbol{\xi}_2 = \dot{\mathbf{q}}$, respectivamente.

La representación en espacio de estados del sistema en lazo cerrado (1) y (15), en términos del error $\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\xi}_1 \ \boldsymbol{\xi}_2]^T \in \mathbb{R}^n$, es dado por

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}}_1 &= \boldsymbol{\xi}_2 \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}_2 &= M^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1 + \mathbf{q}_d)[-C(\boldsymbol{\xi}_1 + \mathbf{q}_d, \boldsymbol{\xi}_2)\boldsymbol{\xi}_2 - K_p \boldsymbol{\xi}_1 - K_v \boldsymbol{\xi}_2 + \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_\tau]. \end{aligned} \quad (16)$$

Se propone la salida objetivo a ser controlada que minimice la señal de control y el error

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \rho \tanh(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \quad (17)$$

con una constante positiva ρ . Las posiciones y velocidades están disponibles para su retroalimentación, es decir

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{w}_y \quad (18)$$

y estas mediciones están corrompidas por el vector de disturbios desconocidos $\mathbf{w}_y(t) \in \mathbb{R}^n$.

Las ecuaciones (16)–(18) se puede representar por la estructura general (5) donde

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} M^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1 + \mathbf{q}_d)[-C(\boldsymbol{\xi}_1 + \mathbf{q}_d, \boldsymbol{\xi}_2)\boldsymbol{\xi}_2 - K_p \boldsymbol{\xi}_1 - K_v \boldsymbol{\xi}_2] \\ \boldsymbol{\xi}_2 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} G_1(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{bmatrix} 0_{(l \times l)} & 0_{(l \times n)} \\ M^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1 + \mathbf{q}_d) & 0_{(l \times n)} \end{bmatrix}, \\ G_2(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{bmatrix} 0_{(l \times l)} \\ M^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1 + \mathbf{q}_d) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{h}_1(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{bmatrix} 0_l \\ \rho \tanh(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_2(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}, \\ K_{12}(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{bmatrix} I_l \\ 0_{(n \times l)} \end{bmatrix}, \quad K_{21}(\boldsymbol{\xi}) = [0_{(n \times l)} \ I_n], \end{aligned} \quad (20)$$

donde I_n y $0_{n \times m}$ se define como $n \times n$ matriz identidad y la $n \times m$ matriz de ceros, respectivamente.

Teorema 2. La Hipótesis 1 se satisface con la siguiente función suave y positiva definida [Kelly et al. (2005)]

$$V(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}_1^T K_p \boldsymbol{\xi}_1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}_2^T M(\boldsymbol{\xi}_1 + \mathbf{q}_d) \boldsymbol{\xi}_2 + \beta \tanh(\boldsymbol{\xi}_1)^T M(\boldsymbol{\xi}_1 + \mathbf{q}_d) \boldsymbol{\xi}_2, \quad \beta > 0 \quad (21)$$

la cual es positiva definida para toda $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, si:

$$\lambda_{\min}\{K_p\} > \frac{\beta^2 \lambda_{\max}^2\{M\}}{\lambda_{\min}\{M\}} \quad (22)$$

se cumple, y su derivada temporal a lo largo de la trayectoria del sistema en lazo cerrado (19) es negativa definida, si

$$\lambda_{\min}\{K_v\} > \beta \lambda_{\max}\{M\} + \beta \sqrt{n} k_{c1} \quad (23)$$

$$\lambda_{\min}\{K_p\} > \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda_{\max}\{K_v\}^2}{\frac{1}{\beta} \lambda_{\min}\{K_v\} - \lambda_{\max}\{M\} - \sqrt{n} k_{c1}} \right) \quad (24)$$

se cumplen, (se define a λ_{\max} y λ_{\min} como el valor propio máximo y mínimo, respectivamente). Entonces se garantiza que el sistema en lazo cerrado (19), (20) no perturbado (es decir, $\mathbf{w} = 0$) junto con el atenuador de perturbaciones H_∞

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2} G_2^T(\boldsymbol{\xi}) \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^T = -\frac{1}{2} [\beta \tanh(\boldsymbol{\xi}_1) + \boldsymbol{\xi}_2] \quad (25)$$

es asintóticamente estable en forma global y la ganancia \mathcal{L}_2 del sistema en lazo cerrado (19), (20) y (25) será menor que γ en forma global para el caso perturbado.

Demostración. En este artículo se omite la demostración completa que se pretende presentar en la versión extendida

del documento. Sin embargo, la función de Lyapunov (21) satisface la desigualdad de HJI que se presenta en (10).

Para dar una idea de la prueba, la desigualdad de HJI (10) se parte en tres términos, es decir

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^3 \mathcal{H}_i(\boldsymbol{\xi}) \quad (26)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\xi}} \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) \\ \mathcal{H}_2(\boldsymbol{\xi}) &= \gamma^2 \boldsymbol{\alpha}_1^T(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\alpha}_2^T(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\alpha}_2(\boldsymbol{\xi}) \\ \mathcal{H}_3(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{h}_1^T(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{h}_1(\boldsymbol{\xi}) + n(\boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

El término $\mathcal{H}_1(\boldsymbol{\xi})$ es una función negativa definida cuyo demostración se puede encontrar en Kelly et al. (2005). Por otro lado $\mathcal{H}_2(\boldsymbol{\xi})$ y $\mathcal{H}_3(\boldsymbol{\xi})$ son negativas semidefinidas satisfaciendo (23), (24) con

$$\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\gamma^2} \begin{bmatrix} \beta \tanh(\boldsymbol{\xi}_1) + \boldsymbol{\xi}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$n(\boldsymbol{\xi}) = \varepsilon \tanh(\boldsymbol{\xi}_1)^T \tanh(\boldsymbol{\xi}_1) + \varepsilon \tanh(\boldsymbol{\xi}_2)^T \tanh(\boldsymbol{\xi}_2)$$

donde ε es una constante suficientemente pequeña.

5. APLICACIÓN EN UN ROBOT DE TRES GRADOS DE LIBERTAD

Para la simulaciones se utiliza un robot manipulador de tres g.d.l. del tipo industrial instalado en el laboratorio de control automático del CITEDI (ver Fig. 1). La ecuación de movimiento del robot manipulador experimental es representada por (1) donde

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_{11}(\mathbf{q}) & 0 & 0 \\ 0 & m_{22}(\mathbf{q}) & m_{23}(\mathbf{q}) \\ 0 & m_{23}(\mathbf{q}) & m_{33}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} m_{11}(\mathbf{q}) &= m_2 l_1^2 \cos^2(q_2) + 2m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) \cos(q_2 + q_3) \\ &\quad + m_2 l_2^2 \cos^2(q_2 + q_3) + m_1 l_1^2 \cos^2(q_2) + I_1 \\ m_{22}(\mathbf{q}) &= m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(q_3) + m_2 l_2^2 + I_2 + I_3 \\ m_{23}(\mathbf{q}) &= m_2 l_1 l_2 \cos(q_3) + m_2 l_2^2 + I_3 \\ m_{33}(\mathbf{q}) &= m_2 l_2^2 + I_3; \end{aligned}$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} c_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & c_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & c_{13}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ c_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & c_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & c_{23}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ c_{31}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & c_{32}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & 0 \end{bmatrix}$$

donde

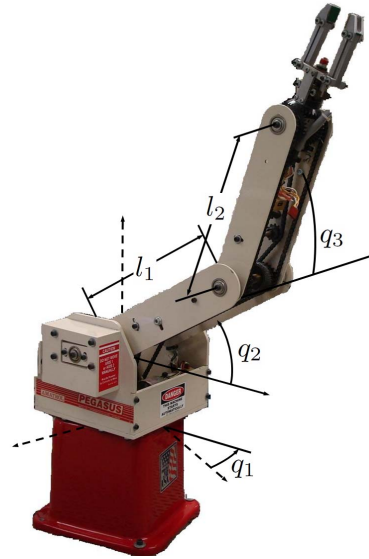


Fig. 1. Robot manipulador de tres grados de libertad usado en las simulaciones.

$$\begin{aligned} c_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2 l_1^2 S_2 C_2 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_2 S_2 C_{23} \dot{q}_2 - m_1 l_1^2 S_2 C_2 \dot{q}_2 \\ &\quad - m_2 l_1 l_2 C_2 S_{23} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_2 l_2^2 S_{23} C_{23} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ c_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2 l_1^2 S_2 C_2 \dot{q}_1 - m_2 l_1 l_2 C_2 S_{23} \dot{q}_1 - m_2 l_1 l_2 S_2 C_{23} \dot{q}_1 \\ &\quad - m_2 l_2^2 S_{23} C_{23} \dot{q}_1 - m_1 l_1^2 S_2 C_2 \dot{q}_1 \\ c_{13}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2 l_1 l_2 C_2 S_{23} \dot{q}_1 - m_2 l_2^2 S_{23} C_{23} \dot{q}_1 \\ c_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= m_2 l_1^2 S_2 C_2 \dot{q}_1 + m_2 l_1 l_2 C_2 S_{23} \dot{q}_1 + m_2 l_1 l_2 S_2 C_{23} \dot{q}_1 \\ &\quad + m_2 l_2^2 S_{23} C_{23} \dot{q}_1 \\ c_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2 l_1 l_2 S_3 \dot{q}_3 \\ c_{23}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2 l_1 l_2 S_3 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ c_{31}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= m_2 l_1 l_2 C_2 S_{23} \dot{q}_1 + m_2 l_2^2 S_{23} C_{23} \dot{q}_1 \\ c_{32}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= m_2 l_1 l_2 S_3 \dot{q}_2 \end{aligned}$$

con $S_i = \sin(q_i)$, $C_i = \cos(q_i)$, $S_{ij} = \sin(q_i + q_j)$, $C_{ij} = \cos(q_i + q_j)$; y finalmente

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = g \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 l_1 \cos(q_2) + m_2 l_1 \cos(q_2) + m_2 l_2 \cos(q_2 + q_3) \\ m_2 l_2 \cos(q_2 + q_3) \end{bmatrix}$$

donde g es la constante gravitacional. Los parámetros del manipulador, m_i , l_i , $i = 1, 2$, I_j , $j = 1, 2, 3$ son dados por la Tabla 1 y la Tabla 2.

Tabla 1. Parámetros del robot manipulador

Descripción	Notación	Valor	Unidad
Longitud del eslabón 1	l_1	0.297	(m)
Longitud del eslabón 2	l_2	0.297	(m)
Masa del eslabón 1	m_1	0.38	(Kg)
Masa del eslabón 2	m_2	0.34	(Kg)
Inercia 1	I_1	0.243×10^{-3}	(Kg m ²)
Inercia 2	I_2	0.068×10^{-3}	(Kg m ²)
Inercia 3	I_3	0.015×10^{-3}	(Kg m ²)
Aceleración gravitacional	g	9.8	(m/seg ²)

5.1 Resultados de Simulación

El desempeño del controlador fue estudiado en simulación con el modelo paramétrico de un robot manipulador de tres g.d.l., y se pretende que el error converga al origen de manera asintótica. Se realizó la simulación en MATLAB/SIMULINK® para sistema en lazo cerrado perturbado ($\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^9$) con funciones armónicas seleccionadas *a-priori* como

$$w_i(t) = \frac{\pi}{10} \sin(2\pi it), \quad i = 1, \dots, 9.$$

Los parámetros del regulador global H_∞ son

$$K_p = \text{diag}\{1.9, 1.8, 1.7\},$$

$$K_v = \text{diag}\{0.5, 0.4, 0.3\},$$

$\gamma = 2$, $\rho = 0.1$, $\beta = 0.02$ y $\varepsilon = 0.01$. Las condiciones iniciales son $\mathbf{q}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ rad y $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ rad/seg. El objetivo del regulador H_∞ global es que, las posiciones articulares del sistemas en lazo cerrado deben converger a la posición deseada en $\mathbf{q}_d = 2\pi$ rad que están suficientemente alejadas del origen, y atenuar las perturbaciones externas.

El sistema en lazo cerrado basado en el regulador H_∞ global presenta un buen desempeño (ver Fig. 2-(a)); el error de posición converge a cero en aproximadamente 2.5 s; presenta una respuesta subamortiguada con un pequeño sobrepaso máximo en la posición articular $q_2(t)$; en las posiciones $q_1(t)$ y $q_3(t)$ la respuesta transitoria es críticamente amortiguada. En la Fig. 3-(a) se muestra el desempeño del sistema en lazo cerrado basado en el regulador formado por un compensador de gravedad y una parte proporcional-derivativo, el cual también logra su objetivo de control con un tiempo de asentamiento aproximado de 3.5 s y un sobrepaso máximo del 27% en su articulación $q_2(t)$, las articulaciones $q_1(t)$ y $q_3(t)$ también presentan una respuesta subamortiguada con un menor sobrepaso máximo. Comparando el desempeño de ambos reguladores, podemos decir que el regulador H_∞ global presenta un mejor rendimiento y un mayor ahorro de energía consumida como se puede ver en las Figs. 2-(b) y 3-(b), el torque aplicado a las articulaciones por el regulador H_∞ global presenta los efectos de la atenuación de las perturbaciones, lo que no sucede para el caso del regulador sin el atenuador H_∞ , en él se tienen picos en el par aplicado de ± 20 Nm.

6. CONCLUSIONES

La síntesis del control H_∞ global, es posible gracias a la función positiva definida $V(\boldsymbol{\xi})$ que permite satisfacer la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs, bajo ciertas restricciones, logrando una estructura del regulador H_∞ global no compleja computacionalmente hablando, que

Tabla 2. Cotas de las matrices del robot manipulador

Cotas	Valor	Unidad
k_{c1}	2.2229	($K_g m^2$)
$\lambda_{Max}\{M\}$	0.9224	($K_g m^2$)
$\lambda_{min}\{M\}$	0.243×10^{-3}	($K_g m^2$)

solo es válida para el caso de sistemas Euler-Lagrange completamente actuados. La constante β es suficientemente pequeña e influye en la ganancia de las matrices K_p , K_v y del vector $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$, con lo cual podemos sintonizar sus parámetros para mejorar la respuesta del sistema.

AGRADECIMIENTOS

C. Chávez agradece a la Universidad Autónoma de Baja California y a la Dirección de Superación Académica de la Secretaría de Educación Pública, por su apoyo con la Becas para estudios de posgrado de alta calidad. L. Aguilar agradece al CONACYT por el apoyo brindado a través del proyecto 127575. J. Mérida agradece al Instituto Tecnológico de Tijuana por el apoyo brindado en el desarrollo del proyecto.

REFERENCIAS

- Acho, L., Orlov, Y., y Aguilar, L., (2002). Global \mathcal{H}_∞ control design for tracking control of robot manipulators. In *Proc. American Control Conference 2002*, Anchorage, Alaska, pp. 3986–3990.
- Aliyu, A. (2003). An approach for solving the Hamilton-Jacobi-Isaacs equation (HJIE) in nonlinear H_∞ control. *Automatica*, 39, 877–884.
- Ball, J. A., y Helton, J. W. (1989). H_∞ optimal control for nonlinear plants: Connection with differential games. In *Proc. 28th Conf. Decision and Control*, Tampa, FL, pp. 956–962.
- Basar, T., y Bernhard, P. (1990). *H_∞ -optimal control and related minimax design problems*. Birkhauser, Boston.
- Ferreira, H. C., Rocha, P. H., y Sales, R. M. (2008). Galerkin method and weight function applied to nonlinear H_∞ control with output feedback. *Journal of Vibration and Control*, 16, 1817–1843.
- Glad, S.T. (1987). Robustness of nonlinear state feedback a survey. *Automatica*, 23, 425–435.
- Isidori, A., y Astolfi A. (1992). Disturbance attenuation and H_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(9).
- Isidori, A., y Kang, W. (1995) H_∞ Control via measurement feedback for general nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3).
- Kelly, R., Santibañez, V., y Loria, A. (2005). *Control of robot manipulators in joint space*. Springer Verlag, London.
- Lukes, D. L. (1969). Optimal regulation of nonlinear dynamical systems. *SIAM Journal of Control*, 7, 75–100.
- Orlov, Y., Acho, L., y Solis, V. (1999). Nonlinear H_∞ -Control of time-varying systems. In *Proceeding of the 38th Conference on Decision & Control*, 3764–3769, USA.
- Orlov, Y., y Aguilar, L. (2004). Non-smooth H_∞ -position control of mechanical manipulators with frictional joints. *International Journal of Control*, 77(11), 1446–1452.
- Orlov, Y., y Aguilar, L. (2014). *Advanced H_∞ control: Towards Nonsmooth Systems and Applications*. Boston: Birkhauser.
- Spong, M.W., y Vidyasagar, M. (1989). *Robot Dynamics and Control*. Wiley, New York.

Van der Schaft, A. J. (1991). On a state space approach to nonlinear H_∞ control. *Systems & control Letters*, 16(1), 1-8.

Van der Schaft, A.J. (1992). L_2 -Gain Analysis of Nonlinear Systems and Nonlinear State Feedback H_∞ control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6), 770-784.

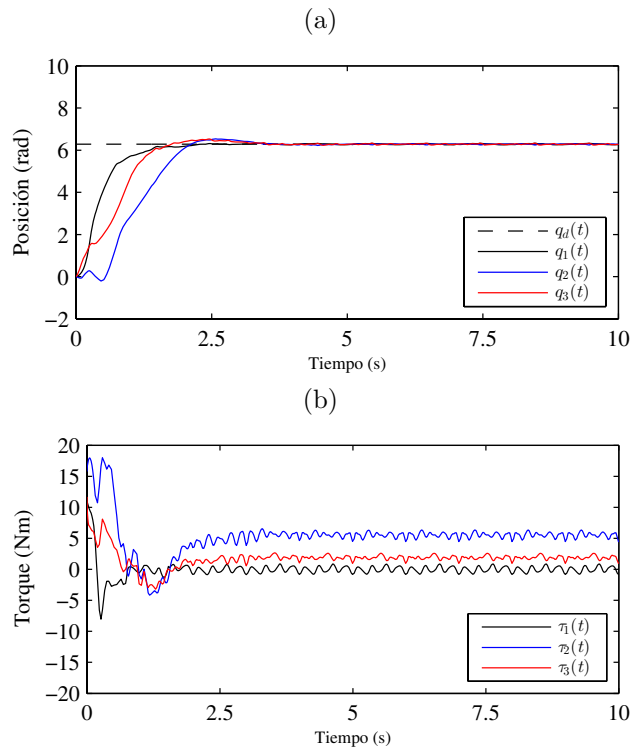


Fig. 2. Desempeño del sistema perturbado en lazo cerrado usando (15) donde a) son las posiciones articulares $q(t)$ y b) son los pares aplicados $\tau(t)$.

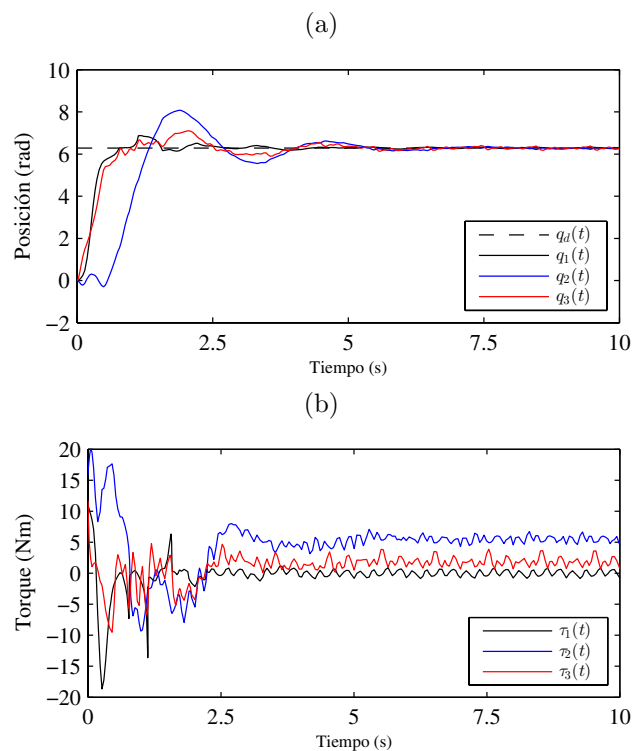


Fig. 3. Desempeño del sistema perturbado en lazo cerrado con $u = \mathbf{0}$ donde a) son las posiciones articulares $q(t)$ y b) son los pares aplicados $\tau(t)$.