

# Control Robusto de Seguimiento Suave de Posición Angular del Motor Síncrono de Imanes Permanentes

Linares-Flores Jesús \* García-Rodríguez Carlos \*  
Ramírez-Cárdenas Oscar D. \*\* Escobar-Noriega Carlos \*\*  
Contreras-Ordaz Marco Antonio \*

\* *Instituto de Electrónica y Mecatrónica, Universidad Tecnológica de la  
Mixteca, Oaxaca, México (e-mails: jlinares@mixteco.com.mx,  
sofosmaster@mixteco.com.mx, marco.contreras@mixteco.utm.mx).*

\*\* *División de Estudios de Postgrado, Universidad Tecnológica de la  
Mixteca, Oaxaca, México (e-mails: oscar6ri@hotmail.com,  
cen\_root2623@hotmail.com)*

---

Resumen: Este artículo trata sobre el diseño y simulación de un controlador robusto de seguimiento suave de la posición angular de un motor síncrono de imanes permanentes (MSIP). Se propone un controlador Backstepping a partir de una linealización entrada-salida del sistema descrita en un marco de referencia  $d-q$ . A fin de minimizar los efectos del par de carga sobre la tarea de posicionamiento, se diseña un observador de orden reducido que ayuda al controlador a compensar esta perturbación. Para demostrar la estabilidad en lazo cerrado de esta propuesta se recurre al criterio de estabilidad de entrada al estado. Co-simulaciones Matlab/Simulink-Psim evidencian la efectividad del algoritmo de control propuesto.

*Keywords:* Motor Síncrono de Imanes Permanentes, Observador de Par de Orden Reducido, Control Backstepping, Estabilidad de Entrada al Estado.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Un motor síncrono de imanes permanentes (MSIP) tiene excelentes características físicas, tales como su estructura simple, su alta densidad de potencia y eficiencia, así como su bajo nivel de ruido y su casi nulo mantenimiento (ver Pillay and Krishnan [1985]). Dadas estas ventajas los MSIP han extendido su aplicación en máquinas y herramientas de control numérico, robots, aviación, etcétera. Métodos de control lineal tal como el esquema de control proporcional integral (PI) son ampliamente usados en motores de este tipo debido a su fácil implementación. Sin embargo, como el MSIP es un sistema no lineal con disturbios endógenos y exógenos no medibles (ver Kim and Youn [2002]), no es fácil obtener un excelente desempeño en el rango de operación completo cuando se utilizan métodos de control lineal (ver Grčar et al. [1996] y Wang et al. [2001]). Con los métodos de control no lineal se busca proporcionar una solución más natural a los problemas que presentan los MSIP como sistemas sustancialmente perturbados. El rápido desarrollo de la tecnología de los microprocesadores, especialmente de los procesadores digitales de señal (DSP) y de la electrónica de potencia ha permitido actualmente probar técnicas de control más sofisticadas sobre el MSIP, tales como el control adaptable (ver Li and Liu [2009]), el control robusto (ver Senjyu et al. [2010]), controladores por modos deslizantes (ver Wai [2001]), el control por linealización entrada-salida (ver Delaleau and Stanković [2004] y Grčar et al. [1996]), el control adaptable backstepping (ver Rahman et al. [2003]) y algunos otros esquemas como el

control mediante rechazo activo de perturbaciones (ver Li et al. [2014] y Sira-Ramírez et al. [2014]), etcétera. Dado que en aplicaciones industriales reales el MSIP se encuentra expuesto a pares de perturbación diversos (fuerzas de fricción, dinámica no modelada o cambios de carga, ver Li et al. [2014]), en este trabajo se propone un controlador de seguimiento suave de posición angular basado en la técnica de control *Backstepping* y un observador de orden reducido del par de perturbación. La adición del par estimado a la señal de control mejora el desempeño y exactitud del sistema en lazo cerrado.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se presenta el modelo dinámico del motor síncrono de imanes permanentes que es considerado para el análisis y la formulación del problema. En la sección 3 es desarrollado el procedimiento de diseño del observador del parámetro de par de carga. Posteriormente, en la sección 4 se diseña el controlador de seguimiento backstepping y se muestra el análisis de estabilidad entrada al estado de la dinámica del error. Los resultados en simulación del desempeño del sistema en lazo cerrado son presentados en la sección 5. Finalmente, en la sección 6 se dan las conclusiones y trabajos futuros a desarrollar.

## 2. MODELO DINÁMICO DEL MSIP Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El modelo dinámico del MSIP en el marco de referencia rotatorio  $d-q$ , cuando la inductancia correspondientes del eje  $d$  y del eje  $q$  se consideran iguales ( $L_d = L_q = L_s$ ),

está dado por las siguientes ecuaciones diferenciales (ver Chiasson [2005]):

$$L_s \frac{di_d}{dt} = -R_s i_d + n_p \omega L_s i_q + u_d \quad (1)$$

$$L_s \frac{di_q}{dt} = -R_s i_q - n_p \omega L_s i_d - K_m \omega + u_q \quad (2)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{2} K_m i_q - \tau_L \quad (3)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (4)$$

donde  $u_d$  es el voltaje directo,  $u_q$  es el voltaje de cuadratura,  $i_d$  es la corriente directa,  $i_q$  es la corriente de cuadratura,  $\theta$  y  $\omega$  corresponden a las variables mecánicas de posición y velocidad angular del rotor. La resistencia y la inductancia de estator son denotadas por  $R_s$  y  $L_s$  respectivamente,  $n_p$  es el número de pares de polos y  $J$  es el momento de inercia del motor. El término  $K_m$  es una constante de fuerza electromotriz inducida, donde  $K_m = n_p \lambda_m$ , siendo  $\lambda_m$  el flujo mútuo o ligado pico debido al imán permanente. El par de carga desconocido es denotado por  $\tau_L$ . Este artículo plantea los siguientes problemas a resolver.

*Problema 1:* Observador del parámetro de par de carga. Solamente la ecuación mecánica del sistema será empleada para el diseño de este observador. Las trayectorias a seguir serán a velocidades bajas por lo que el par de carga se considera desconocido, acotado y de naturaleza constante.

*Problema 2:* Diseñar una ley control backstepping para el seguimiento de posición angular del motor. Para simplificar el diseño de este controlador puede linealizarse el sistema (1)-(4) en forma exacta, considerando el par de carga como una entrada de perturbación externa. Esta ley de control debe adaptar el par de carga estimado para lograr un seguimiento casi perfecto de la posición angular.

### 3. OBSERVADOR DEL PARÁMETRO DE PAR DE CARGA

En este apartado se diseña un observador de orden reducido para estimar el parámetro de par de carga. Esta perturbación se considera desconocida pero acotada. Partiendo de la ecuación mecánica del modelo, (3), se define a la corriente de cuadratura,  $i_q$ , como una entrada de control,  $u_0 = i_q$ , y a la velocidad angular, como una salida,  $y_0 = \omega$ , para este subsistema dinámico. Los valores nominales de los parámetros,  $J$  y  $K_m$  se consideran conocidos. A partir de (3) se puede definir como una medida indirecta del par de carga  $\tau_L$ , a

$$\tau_L = \frac{3}{2} K_m u_0 - J \frac{dy_0}{dt}$$

Se propone entonces el siguiente observador adaptable para  $\tau_L$ ,

$$\frac{d\hat{\tau}_L}{dt} = \lambda(\tau_L - \hat{\tau}_L)$$

La dinámica del error de estimación está dada por:

$$\frac{de_{\tau_L}}{dt} = -\lambda e_{\tau_L}$$

donde  $e_{\tau_L} = \tau_L - \hat{\tau}_L$ . Escogiendo  $\lambda \gg 0$ , el error de estimación  $e_{\tau_L}$ , converge a cero exponencialmente conforme

$t \mapsto \infty$ . Puesto de otra manera, la norma del error de estimación  $\|\tau_L - \hat{\tau}_L\|$  satisface la desigualdad

$$|e_{\tau_L}(t)| = |\tau_L - \hat{\tau}_L| \leq e_{\tau_L}(0) e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0$$

donde el valor constante de  $\lambda$  es la razón de convergencia exponencial a cero del error de estimación, cuando  $t \mapsto \infty$ . Usando la expresión para  $\tau_L$ , el observador puede ser reescrito como

$$\frac{d\hat{\tau}_L}{dt} + \lambda J \frac{dy_0}{dt} = \frac{3}{2} \lambda K_m u_0 - \lambda \hat{\tau}_L$$

definiendo a la variable  $\eta = \hat{\tau}_L + \lambda J y_0$ , se tiene el observador de orden reducido siguiente,

$$\dot{\eta} = \eta - \lambda J y_0 \quad (5)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\lambda \eta + \lambda^2 J y_0 + \frac{3}{2} \lambda K_m u_0 \quad (6)$$

El valor estimado del parámetro de par de carga,  $\hat{\tau}_L$ , se adapta en línea a la ley de control de seguimiento suave de posición angular, tratada en detalle en la siguiente sección.

### 4. CONTROLADOR SUAVE DE POSICIÓN ANGULAR Y RESULTADO PRINCIPAL

Como respuesta al segundo problema planteado en la sección 2 de este artículo, se procederá a diseñar el controlador suave de posición angular basado en la técnica Backstepping, a partir del modelo linealizado en forma exacta, escogiendo como salidas planas a la corriente directa,  $i_d$ , y a la posición angular,  $\theta$ . Por otra parte, el valor estimado del par de carga se adapta a la ley de control de seguimiento suave de posición angular, para posteriormente probar la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante el enfoque de estabilidad entrada al estado.

#### 4.1 Linealización entrada-salida del MSIP

Escogiendo como salidas del sistema (1)-(4) a  $y_1(x) = h_1(x) = i_d(t)$ , y a  $y_2 = h_2(x) = \theta(t)$ , el sistema puede ser linealizado de forma exacta, por lo que  $y_1$  y  $y_2$  son las salidas planas del sistema (ver Grčar et al. [1996] y Delaleau and Stanković [2004]). Por lo que el modelo no lineal puede ser reescrito en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x &= f(x) + \sum_{i=1}^2 g_i(x) u_i + \mathbf{d} \\ x &\in X \subset \mathbf{R}^4, u \in \mathbf{R}^2, f(0) = 0, \\ y_i &= h_i(x); i = 1, 2; h_i(0) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $f(\cdot)$ ,  $g_1(\cdot)$  y  $g_2(\cdot)$  son campos de vectores suaves en un conjunto abierto  $U$  en  $\mathbf{R}^4$ ,  $h_i(\cdot)$  es una función suave mapeada en  $X$  dentro de  $\mathbf{R}$ , y  $\mathbf{d}$  es el vector de entrada de perturbación o par de carga. Las entradas de control,  $u_1 = u_d$  y  $u_2 = u_q$ , son los voltajes directo y de cuadratura en el eje coordenado  $d - q$  del MSIP. El método de linealización entrada-salida comienza a partir de omitir el vector de entrada de perturbación,  $\mathbf{d}$ . Por tanto, la relación entrada-salida (7) se deduce a través de las derivadas sucesivas de las dos salidas planas  $y_i = h_i(x)$ , tal que al menos una entrada  $u_i$  aparezca en la expresión para la derivada de orden superior  $y_i^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Simultáneamente la notación  $L_f h_i = \nabla h_i f$ ;  $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  se adopta para la derivada de Lie direccional de  $h$  a lo largo del campo vectorial  $f$ . De ahí, se obtiene el sistema linealizado para la primer salida plana  $y_1$ :

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= i_d \\
 y_1^{(1)}(t) &= L_f h_1 + \sum_{i=1}^2 L_{g_i} L_f^0 h_1 u_i \\
 &= \alpha_1(x) + \beta_1 u_d = -\frac{R_s}{L_s} i_d + n_p i_q \omega + \frac{u_d}{L_s} \quad (8)
 \end{aligned}$$

Por otro lado, se obtiene el resto del sistema linealizado a través de las derivadas sucesivas de la segunda salida plana  $y_2$ , la cual se refiere a la posición angular del MSIP:

$$\begin{aligned}
 y_2(t) &= \theta \\
 y_2^{(1)}(t) &= L_f h_2 + \sum_{i=1}^2 L_{g_i} L_f^0 h_2 u_i \\
 &= \omega \\
 y_2^{(2)}(t) &= L_f^2 h_2 + \sum_{i=1}^2 L_{g_i} L_f^1 h_2 u_i \\
 &= \frac{3 K_m}{2 J} i_q \\
 y_2^{(3)}(t) &= L_f^3 h_2 + \sum_{i=1}^2 L_{g_i} L_f^2 h_2 u_i \\
 &= \alpha_2(x) + \beta_2 u_q \\
 &= -\frac{3(K_m R_s i_q + n_p L_s K_m \omega i_d + K_m^2 \omega)}{2 L_s} + \frac{3 K_m u_q}{2 J L_s} \quad (9)
 \end{aligned}$$

Por tanto, el nuevo vector de estado se define como:  $x = (i_d, \theta, \omega, \frac{3K_m}{2J} i_q)^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in X \subset \mathbf{R}^4$ ,  $u \in \mathbf{R}^2$ , así la forma normal de *Brunovsky* desacoplada del sistema multivariable del MSIP que incluye el vector de entrada de perturbación desconocida, pero acotada, es dada por:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_2(x) \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_L \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)
 \end{aligned}$$

#### 4.2 Controlador Backstepping de seguimiento suave de posición angular

Partiendo de la forma normal de *Brunovsky* del MSIP, se diseñará la ley de control de seguimiento suave de posición angular, la cual adapta el valor estimado del parámetro de par de carga. Antes de desarrollar el diseño del controlador se hacen las siguientes suposiciones:

- Las corrientes de fase  $i_a$  e  $i_b$  son medidas y transformadas al eje coordenado d-q mediante el conocimiento de la variable de posición  $\theta$ .
- Las variables de posición y velocidad angular están disponibles por medición a través de los respectivos sensores.
- El valor del parámetro de par de carga, se estima mediante un observador de orden reducido, considerando a este término como constante y acotado. Este valor

se adapta a la ley de control de seguimiento suave de posición angular.

- El siguiente conjunto de valores nominales de parámetros del motor se consideran conocidos:  $\{K_m, L_s, n_p, R_s, J\}$ .
- Solamente se calcula la trayectoria de referencia de posición angular junto con sus derivadas temporales mediante un polinomio Bézier, y se denotan como:  $x_2^*(t) = \theta^*(t)$ ,  $\dot{x}_2^*(t) = \dot{\theta}^*(t)$ ,  $\ddot{x}_2^*(t) = \ddot{\theta}^*(t)$  y  $\dddot{x}_2^*(t) = \dddot{\theta}^*(t)$ . Mientras que la trayectoria de referencia de la corriente directa junto con sus derivadas se planean con un valor nominal igual a cero, y se denotan como:  $x_1^*(t) = i_d^*(t) = 0$ ,  $\dot{x}_1^*(t) = \frac{di_d^*(t)}{dt} = 0$ . Esto debido a que en una tarea de control de posición, las velocidades que se desarrollan son bajas, sin embargo, el par generado aplicado por el motor debe maximizarse, lo que lleva a restringir el valor nominal de la corriente directa  $i_d$  a cero.

#### Paso 1. Cálculo del controlador de seguimiento de la parte eléctrica $u_d$ .

Como primer paso para el diseño del controlador de posición basado en Backstepping, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V_1(z_1) = \frac{1}{2} z_1^2 \quad (11)$$

donde, la variable  $z_1$  denota el error de seguimiento de la primera salida plana

$$z_1 = x_1(t) - x_1^*(t) \quad (12)$$

La función candidata de Lyapunov cumple con ser definida positiva, escalar diferenciable no acotada, donde su derivada temporal es,

$$\dot{V}_1(z_1) = z_1 \dot{z}_1 \quad (13)$$

donde la rapidez del error de seguimiento de  $z_1$ , es dado por:

$$\dot{z}_1(t) = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_1^*(t) = \alpha_1(x) + \beta_1 u_d \quad (14)$$

Se sustituye (14) dentro de (13), y se tiene lo siguiente

$$\dot{V}_1(z_1) = z_1 [\alpha_1(x) + \beta_1 u_d] \quad (15)$$

Por tanto, para probar que esta última ecuación, sea definida negativa se propone que la primera entrada  $u_d$  sea:

$$u_d = -\frac{1}{\beta_1} [\alpha_1(x) + c_1 z_1] \quad (16)$$

donde  $c_1$  es un valor constante mayor a cero, que define la sensibilidad proporcional del controlador de seguimiento de la corriente directa del MSIP. Sustituyendo (16) en (15), resulta

$$\dot{V}_1(z_1) = -c_1 z_1^2 \quad (17)$$

#### Paso 2. Cálculo del controlador de seguimiento de la parte mecánica $u_q$ .

Siguiendo con la metodología, se propone una segunda función candidata de Lyapunov como sigue:

$$V_2(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_2^2 + V_1(z_1) \quad (18)$$

donde se define el error de seguimiento para la segunda salida plana como:

$$z_2(t) = x_2(t) - x_2^*(t) \quad (19)$$

La derivada temporal (18) es dada como:

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = z_2 \dot{z}_2 - c_1 z_1^2 \quad (20)$$

donde la derivada del error de seguimiento de  $z_2$  es,

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2(t) - \dot{x}_2^*(t) = x_3(t) - \dot{x}_2^*(t) \quad (21)$$

Sustituyendo (21) en (20) se tiene lo siguiente

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = z_2 [x_3(t) - \dot{x}_2^*(t)] - c_1 z_1^2 \quad (22)$$

Como paso intermedio se propone un error de seguimiento  $z_3$ , el cual involucra a la primer variable de estabilización  $\gamma_1(x)$  que consigue que la derivada temporal de  $V_2(z_1, z_2)$  sea definida negativa,

$$z_3(t) = x_3(t) - \gamma_1(x) \iff x_3(t) = z_3(t) + \gamma_1(x) \quad (23)$$

La variable  $x_3(t)$  de (23) se sustituye en la derivada temporal de  $V_2(z_1, z_2)$  y queda como:

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = z_2 [z_3(t) + \gamma_1(x) - \dot{x}_2^*(t)] - c_1 z_1^2 \quad (24)$$

A través de proponer a la primer variable de estabilización  $\gamma_1(x)$  como:

$$\gamma_1(x) = \dot{x}_2^*(t) - c_2 z_2 \quad (25)$$

Por tanto la derivada temporal de  $V_2(z_1, z_2)$  es

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 \quad (26)$$

donde  $c_2 > 0$  se define como la sensibilidad proporcional del error de seguimiento de la variable  $z_2$ . Para conseguir que la derivada temporal de  $V_2(z_1, z_2)$  sea definida negativa, basta con elegir a  $z_3(t) = 0$ , para que los errores de seguimiento  $z_1$  y  $z_2$  convergan a cero exponencialmente.

$$\dot{V}_2(z_1, z_2) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \quad (27)$$

Se sigue el método proponiendo la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_3(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{2} z_3^2 + V_2(z_1, z_2) \quad (28)$$

de ahí, la derivada temporal de la función  $V_3(z_1, z_2, z_3)$  es dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) &= z_3 \dot{z}_3 + \dot{V}_2(z_1, z_2) \\ &= z_3 \dot{z}_3 + z_2 z_3 - c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \\ &= z_3 (\dot{z}_3 + z_2) - c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \end{aligned} \quad (29)$$

de (23) se calcula la derivada temporal de  $z_3$

$$\dot{z}_3(t) = \dot{x}_3(t) - \dot{\gamma}_1(x) = x_4(t) - \frac{\tau_L}{J} + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^*(t) \quad (30)$$

Sustituyendo (30) en (29), la derivada temporal de  $V_3(z_1, z_2, z_3)$  queda de la siguiente forma

$$\dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) = z_3 \left( x_4 - \frac{\tau_L}{J} + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^* + z_2 \right) - c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \quad (31)$$

Se propone el error de seguimiento  $z_4$ , el cual involucra un segunda variable de estabilización  $\gamma_2(x)$  que consigue que la derivada temporal de  $V_3(z_1, z_2, z_3)$  sea definida negativa, por tanto

$$z_4(t) = x_4(t) - \gamma_2(x) \iff x_4(t) = z_4(t) + \gamma_2(x) \quad (32)$$

Sustituyendo (32) en (31) se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) &= z_3 \left( z_4 + \gamma_2(x) - \frac{\tau_L}{J} + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^* + z_2 \right) \\ &\quad - c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \end{aligned} \quad (33)$$

A partir de (33) se propone el segundo controlador virtual  $\gamma_2(x)$  como:

$$\gamma_2(x) = \ddot{x}_2^* - c_2 \dot{z}_2 - c_3 z_3 + \frac{\hat{\tau}_L}{J} \quad (34)$$

En este paso se adapta el parámetro del par de carga  $\hat{\tau}_L$  a la segunda variable de estabilización, y la ganancia  $c_3 > 0$ ,

se define como la sensibilidad proporcional del error de seguimiento de la variable  $z_3$ . De ahí, se sustituye (34) en (33) y resulta que

$$\dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - \underbrace{\frac{1}{J} (\tau_L - \hat{\tau}_L)}_{:=e_\tau} z_3 + z_3 z_4 \quad (35)$$

Para que la derivada temporal de  $V_3(z_1, z_2, z_3)$  sea definida negativa se escoge a  $z_4 = 0$ , de ahí que los errores de seguimiento convergen a cero asintóticamente, mientras el error de estimación este acotado.

$$\dot{V}_3(z_1, z_2, z_3) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - z_3 e_\tau \quad (36)$$

Siguiendo con la metodología de la técnica *Backstepping* se propone la última función candidata de Lyapunov como sigue:

$$V_4(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{2} z_4^2 + V_3(z_1, z_2, z_3) \quad (37)$$

donde su derivada temporal de (37) es,

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 + z_4 [\dot{z}_4 + z_3] \\ &\quad - z_3 e_\tau \end{aligned} \quad (38)$$

donde la derivada temporal de  $z_4$  está dada por

$$\begin{aligned} \dot{z}_4(t) &= \dot{x}_4(t) - \dot{\gamma}_2(x) \\ &= \alpha_2(x) + \beta_2 u_q - \ddot{x}_2^* + c_2 (x_4 - \frac{1}{J} \tau_L - \ddot{x}_2^*) \\ &\quad + c_3 (x_4 - \frac{1}{J} \tau_L + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^*) \end{aligned} \quad (39)$$

Sustituyendo (39) en (38) se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - e_\tau z_3 \\ &\quad + z_4 [\alpha_2(x) + \beta_2 u_q - \ddot{x}_2^* \\ &\quad + c_2 (x_4 - \frac{1}{J} \tau_L - \ddot{x}_2^*) + z_3 \\ &\quad + c_3 (x_4 - \frac{1}{J} \tau_L + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^*)] \end{aligned} \quad (40)$$

La ley de control de seguimiento suave de la posición angular del MSIP está dada por:

$$\begin{aligned} u_q &= -\frac{1}{\beta_2} [\alpha_2(x) - \ddot{x}_2^* + c_2 (x_4 - \frac{1}{J} \tau_L - \ddot{x}_2^*) \\ &\quad + c_3 (x_4 - \frac{1}{J} \tau_L + c_2 \dot{z}_2 - \ddot{x}_2^*) - z_3 - c_4 z_4] \end{aligned} \quad (41)$$

Sustituyendo la ley de control (41) en (40) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &= -\sum_{i=1}^4 c_i z_i^2 - z_3 e_\tau - [c_2 + c_3] z_4 e_\tau \\ &= -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau \end{aligned} \quad (42)$$

donde,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ c_2 + c_3 \end{pmatrix}; \quad (43)$$

Las expresiones (42) y (43) se utilizarán en el siguiente análisis de estabilidad en lazo cerrado del sistema MSIP perturbado.

### Paso 3. Análisis de estabilidad en lazo cerrado.

*Proposición 1:* Se considera el sistema MSIP perturbado (10) con el controlador de seguimiento por retroalimentación backstepping (16) y (41) entonces, la dinámica del error de seguimiento (42) define una estabilidad de entrada al estado mapeada, considerando  $e_\tau$  como una entrada y  $\mathbf{z}$  como un estado.

*Prueba:* Considérese la siguiente función definida positiva candidata de *Lyapunov*,

$$V(\mathbf{z}) = V_4(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2) > 0 - \{0\}$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias (14), (21), (30) y (39), está dada por

$$\dot{V}(\mathbf{z}) = -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau \quad (44)$$

donde  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{M}$  están definidas en (43). Note que la matriz diagonal constante es definida positiva, es decir  $\mathbf{C} > \mathbf{0}$ , entonces en el caso de que  $e_\tau = 0$  implica que  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$  es un punto de equilibrio globalmente exponencialmente estable, ya que

$$\dot{V}(\mathbf{z}) = -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} < \mathbf{0} \quad (45)$$

Por otro lado, si el error de estimación del parámetro de par de carga  $e_\tau \neq 0$ , de ahí el término  $\mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau$ , se escribe por desigualdad de Young, como

$$\mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau \leq \lambda (\mathbf{z}^T)^2 + \frac{\sqrt{c_2^2 + c_3^2 + 2c_2c_3 + 1}}{4\lambda} e_\tau^2$$

seleccionando a  $p = q = 2$  y  $\varepsilon^2 = 2\lambda$ , en consecuencia (44), queda de la siguiente manera

$$\dot{V}(\mathbf{z}) = -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{M} e_\tau \leq -\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} + \frac{\gamma(c_2, c_3)}{4\lambda} e_\tau^2 \quad (46)$$

donde, la norma de la matriz  $|\mathbf{M}| = \gamma(c_2, c_3) = \sqrt{c_2^2 + c_3^2 + 2c_2c_3 + 1} > 0$ , y  $\lambda$  corresponde al valor de la ganancia del estimador de par  $c_2, c_3 > \lambda > 0$ . Mediante el enfoque de estabilidad de entrada al estado (ISS) la ecuación (46) se escribe como sigue

$$\dot{V}(\mathbf{z}) = -(1 - \phi) \mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} - \phi \mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z} + \frac{\gamma(c_2, c_3)}{4\lambda} e_\tau^2$$

con  $\phi > 0$  es una constante positiva la cual pertenece al conjunto abierto  $(0, 1)$ .

Por lo tanto,

$$\dot{V}(\mathbf{z}) \leq -(1 - \phi) \mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z}$$

para todo

$$|\mathbf{z}| \geq \frac{\sqrt{\gamma(c_2, c_3)}}{2\sqrt{\lambda\phi}[\lambda_{\min}(\mathbf{C})]} |e_\tau|$$

Entonces aplicando el *Teorema 5.2* de Khalil [1996] se demuestra que el mapeo

$$e_\tau \rightarrow \mathbf{z}$$

es estable de entrada al estado (ISS).

Para obtener explícitamente la cota del vector de estado  $\mathbf{z}(t)$ , se considera la función  $\mathbf{z}(t) e^{kt}$ . Usando (46), se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (V(\mathbf{z}) e^t) &= \frac{d}{dt} (V(\mathbf{z})) e^t + V(\mathbf{z}) e^t \\ &\leq -(\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z}) e^t + \frac{\gamma(c_2, c_3)}{4\lambda} e_\tau^2 e^t + (\mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{z}) e^t \\ &= \frac{\gamma(c_2, c_3)}{4\lambda} e_\tau^2 e^t \end{aligned} \quad (47)$$

Integrando ambos lados a (47) en el intervalo cerrado  $[0, t]$ , se produce

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^2 e^t &\leq \mathbf{z}^2(0) + \frac{\gamma(c_2, c_3)}{4\lambda} e_\tau^2 e^t \\ &\leq \mathbf{z}^2(0) + \frac{1}{4\lambda} \underbrace{\gamma(c_2, c_3) e_\tau^2}_{:= \sup_{0 \leq \tau \leq t} \Delta^2(\tau)} \int_0^t e^\tau d\tau \\ &= \mathbf{z}^2(0) + \frac{1}{4\lambda} \left[ \sup_{0 \leq \tau \leq t} \Delta^2(\tau) \right] (e^t - 1) \end{aligned} \quad (48)$$

Multiplicando a (48) en ambos lados por el término  $e^{-t}$ , y utilizando el hecho de que  $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$ , se obtiene la cota del vector  $\mathbf{z}(t)$ :

$$\begin{aligned} |\mathbf{z}(t)| &\leq |\mathbf{z}(0)| e^{-t} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left[ \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\Delta(\tau)| \right] (1 - e^{-t})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\mathbf{z}(0)| e^{-t} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left[ \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\Delta(\tau)| \right] \end{aligned} \quad (49)$$

Desde que  $\sup_{0 \leq \tau \leq t} |\Delta(\tau)| \leq \sup_{0 \leq \tau \leq \infty} |\Delta(\tau)| \triangleq |\Delta|_\infty$ , (49) conduce a

$$|\mathbf{z}(t)| \leq \mathbf{z}(0) e^{-t} + \frac{|\Delta|_\infty}{2\sqrt{\lambda}}$$

lo cual muestra que el vector de seguimiento  $\mathbf{z}(t)$  converge a un conjunto compacto  $\mathcal{R}$  definido como:

$$\mathcal{R} = \{z(t) : |z(t)| \leq \frac{|\Delta|_\infty}{2\sqrt{\lambda}}\}$$

y por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}\{z(t), \mathcal{R}\} = 0 \quad (50)$$

## 5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Los parámetros del motor utilizados para simulación son:  $n_p = 2$ ,  $R_s = 1.6 \Omega$ ,  $L_d = L_q = 6.365 \text{ mH}$ . La constante de fuerza contra electromotriz de línea a línea del motor es  $V_{pk}/krpm = 77.3$ ,  $J = 0.182 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ , y su constante mecánica es  $\tau_{mech} = 2.09195 \text{ s}$ . Se considera que el motor posee un arreglo convertidor resolutor a digital (RTDC) basado en PLL que proporciona la posición absoluta del rotor en el intervalo de 0 a 360 grados, la velocidad es medida a través de un tacómetro. Se modela también un inversor fuente de voltaje trifásico de 2.4 kW. El voltaje de bus se fijó en 50 V, el periodo de muestreo fue establecido en 0.1 ms, las constantes del control son fijadas en  $c_i = 600$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Para el observador de par se utilizó  $\lambda = 20$ . La Fig. 1 muestra la posición angular del sistema en lazo cerrado para una trayectoria de referencia deseada, basada en un polinomio Bézier de décimo orden, para el cálculo de la trayectoria de referencia deseada ver Sira-Ramírez et al. [2014]. La trayectoria a seguir comienza en  $\theta_{ini}^*(1.5 \text{ s}) = 0 \text{ rad}$  y termina en  $\theta_{fin}^*(4.5 \text{ s}) = 7 \text{ rad}$ . En esta prueba se hace un cambio súbito de carga de cero a  $\tau_L(6 \text{ s}) = 2 \text{ Nm}$ . Como puede observarse se logra una buena regulación de la posición a pesar del par de carga aplicado. La Fig. 2 muestra la respuesta del sistema cuando al par anterior se le suma un par de carga que genera el acoplamiento de otro eje al eje del MSIP. Ahora el par de carga es  $\tau_{L(2)} = J_a \frac{d\omega}{dt} + B_a \omega + \tau_L$ , donde  $J_a$  y

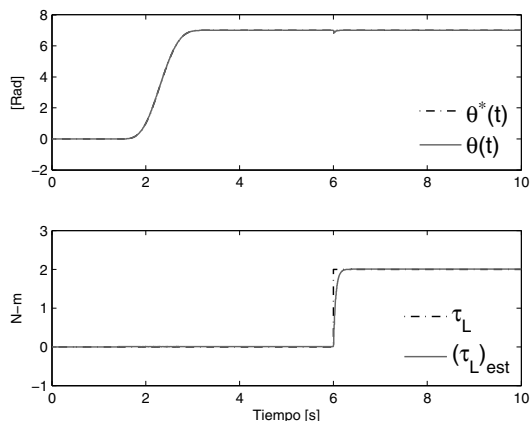


Figura 1. Seguimiento de trayectoria de la posición angular del motor en presencia de un par de carga aplicado súbitamente.

$B_a$  son el momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa del segundo eje aplicado como carga. A pesar de que el observador fue diseñado para estimar pares de carga constantes, éste sin embargo estima el par de carga con el término de fricción producto del acoplamiento de ejes, el cual se traduce como una variación en los parámetros mecánicos del sistema lo que representa una perturbación claramente acotada. Es por ello que el esquema de control propuesto, proporciona una asistencia adecuada a través del observador con la finalidad de minimizar el efecto de la aplicación de par al eje con términos de fricción.

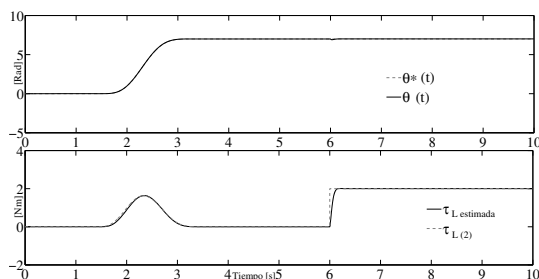


Figura 2. Respuesta del sistema a un par de carga por acoplamiento de otro eje en combinación con un aumento súbito del par a un valor constante.

## 6. CONCLUSIONES

Tomando como salidas a la corriente directa,  $i_d$ , y a la posición angular del rotor,  $\theta$ , el modelo del MSIP puede linealizarse de forma exacta y además proponerse fácilmente una ley de control *backstepping* que logra la convergencia de los errores de seguimiento de trayectorias a cero. Esta ley de control es robusta bajo pares de carga constantes mediante un observador de orden reducido. Las simulaciones en un entorno Matlab/Simulink-PSIM han permitido incluir los efectos de carga, medición, y modelos de elementos de conmutación realísticos, permitiendo corroborar el seguimiento suave de la trayectoria de referencia de posición angular.

## REFERENCIAS

- Chiasson, J. (2005). *Modeling and High-Performance Control of Electric Machines*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Delaleau, E. and Stanković, A.M. (2004). Flatness-based hierarchical control of the pm synchronous motor. *Proc. American Control Conference*, 65–70.
- Grčar, B., Cafuta, P., Žnidarič, M., and Gausch, F. (1996). Nonlinear control of synchronous servo drive. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4, 177–184.
- Khalil, H. (1996). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2nd edition.
- Kim, K.H. and Youn, M.J. (2002). A nonlinear speed control for a pm synchronous motor using a simple disturbance estimation technique. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 49, 524–535.
- Li, S., Yang, J., Chen, W., and Chen, X. (2014). *Disturbance Observer-Based Control Methods and Applications*. CRC Press.
- Li, S. and Liu, Z. (2009). Adaptive speed control for permanent magnet synchronous motor system with variations of load inertia. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56, 3050–3059.
- Pillay, P. and Krishnan, R. (1985). Control characteristics and speed controller design of a high performance pmsm. *IEEE Industrial Applications Society Annual Meeting*, 627–633.
- Rahman, M.A., Vilathgamuwa, M., Tseng, K., and Uddin, M.N. (2003). Nonlinear control of interior permanent magnet synchronous motor. *IEEE Transactions on Industrial Applications*, 39, 408–415.
- Senjyu, T., Noguchi, Y., Urasaki, N., Howlander, A.M., Yona, A., and Sekine, H. (2010). Position sensorless control for interior permanent magnet synchronous motors using  $h_\infty$  flux observer. *IEEE XIX International Conference on Electrical Machines (ICEM)*, 1–6.
- Sira-Ramírez, H., Linares-Flores, J., García-Rodríguez, C., and Contreras-Ordaz, M.A. (2014). On the control of the permanent magnet synchronous motor: An active disturbance rejection control approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*.
- Wai, R.J. (2001). Total sliding-mode controller for pm synchronous servo motor drive using recurrent fuzzy neural network. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 48, 926–944.
- Wang, G., Fong, C., and Chang, K. (2001). Neural-network-based self tuning pi controller for precise motion control of pmac motors. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 48, 408–415.