

Análisis de Consenso en Sistemas Eléctricos

Sofía Avila-Becerril, Gerardo Espinosa-Perez, JoséLuis Rojas *

* Facultad de Ingeniería-UNAM, México, D. F. (e-mail:
soavbec@comunidad.unam.mx, gerardoe@unam.mx,
rojasmartinez-fi@comunidad.unam.mx)

Resumen: En este artículo se presenta un análisis de la estructura de circuitos eléctricos con el propósito de identificar propiedades estructurales de esta clase de sistemas, bajo las cuales se alcance consenso en (algunas de) sus variables. El modelo de los circuitos se aborda desde una perspectiva de Sistemas Hamiltonianos controlados por puerto, donde las interconexiones entre los elementos, modeladas con teoría de grafos, determinan las propiedades de sincronización. El objetivo es establecer condiciones que permitan extender los resultados obtenidos a Sistemas Eléctricos de Potencia. El resultado principal de este trabajo es el establecimiento de propiedades de las matrices de interconexión en una red típica de Sistemas Eléctricos de Potencia.

Keywords: Sistemas Multiagentes, Consenso, Circuitos eléctricos, Sistemas Hamiltonianos.

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente, la complejidad de las redes de Sistemas Eléctricos de Potencia (SEPs) se ha incrementado notablemente debido al esfuerzo que debe ser realizado para satisfacer la demanda de energía eléctrica. Entre otras mejoras, las compañías suministradoras se encuentran haciendo modificaciones en infraestructura física y digital. Como consecuencia, el estudio de este tipo de sistemas ha recibido bastante atención por parte de la comunidad de control, con el interés de diseñar controladores que modifiquen la dinámica individual de cada uno de los elementos de la red para que el sistema interconectado alcance un comportamiento deseado.

En este contexto, en los últimos años se ha incrementado el interés en las técnicas de modelado, análisis y diseño de control basadas en el concepto de energía. Particularmente el uso de sistemas Hamiltonianos controlados por puerto ha probado ser altamente efectivo en muchas aplicaciones (Ortega et al., 2001). Esta perspectiva es útil en el estudio de sistemas complejos, descomponiendo éstos en subsistemas, los cuales interconectados, suman sus energías para determinar el comportamiento total del sistema. Este es un lenguaje natural e intuitivo para representar a los SEPs. Así, en la última década, se ha tenido éxito en reformular al “clásico” marco teórico de modelado de redes, con el “nuevo” marco de sistemas dinámicos geométricos (ver el trabajo de Fiaz et al. (2013)) que provee un enfoque sistemático de modelado, análisis y control, permitiendo entre otras cosas el análisis del sistema a través de las propiedades de su estructura de interconexión y las relaciones constitutivas de sus elementos.

Dentro de esta perspectiva energética, un trabajo que es especialmente interesante es el reportado en (Van der Schaft and Maschke, 2011). En él se propone un marco geométrico que unifica el modelado de sistemas dinámicos como sistemas Hamiltonianos en un grafo. La idea es

asociar a la matriz de incidencia del grafo una estructura que relaciona las variables de flujo y esfuerzo de los bordes y que captura las leyes de conservación del sistema. De esta forma, la estructura Hamiltoniana de una red dinámica está definida por la función Hamiltoniana, las relaciones de disipación de energía y por la interconexión.

Por otro lado, se entiende el fenómeno de *sincronización* como el hecho de ajustar los ritmos de ciertos procesos o eventos repetitivos por medio de interacciones. El **consenso** es un problema de sincronización que surge cuando es necesario que un grupo de agentes dinámicos interconectados llegue a un acuerdo respecto a ciertas cantidades de interés. Tradicionalmente, el estudio de este tipo de fenómenos se realiza considerando la interconexión de agentes dinámicos, es decir, se considera una red formada por nodos (que exhiben cierta dinámica) interconectados por canales de comunicación (usualmente) estáticos (ver los trabajos de Fax and Murray (2002), Olfati-Saber and Murray (2004), Wei y Van der Schaft, 2013, Arcak (2007)).

En este artículo, a diferencia del enfoque tradicional de análisis de redes e inspirados en los resultados reportados en (Wei and der Schaft, 2013), se busca realizar el estudio de circuitos eléctricos representando su estructura como una red en donde los bordes son los elementos dinámicos mientras que los nodos son únicamente puntos de conexión que no exhiben dinámica alguna.

El objetivo es utilizar herramientas generales de métodos de redes (Wellstead, 1979) para modelar un sistema dinámico en un grafo, para establecer condiciones en la topología de la red que aseguren que variables de estado asociadas a algunos bordes converjan al mismo valor, es decir, se alcance un consenso entre ellas.

En este sentido, es conveniente aclarar que la aportación principal de este trabajo no es la obtención de resultados novedosos en cuanto al funcionamiento de las redes, sino la manera en la que esta clase de sistemas es estudiada.

Específicamente, los resultados presentados permiten concluir el mismo tipo de comportamiento que se obtiene por otros métodos de análisis con la ventaja de poder interpretarlos a partir de las propiedades estructurales de la red. Los autores están convencidos de que este tipo de información permitirá abordar de una manera sistemática problemas importantes en SEPs como son, estabilidad (de tensión, de frecuencia, transitoria), compensación y manejo de micro-redes, entre otros.

De manera precisa, las contribuciones que se presentan en este trabajo, se pueden dividir en dos: El establecimiento de una metodología de análisis sistemática para redes dinámicas y el análisis detallado de un SEP típico. Respecto a la primera, se muestra cómo el representar la dinámica por medio de un sistema Hamiltoniano permite establecer de una forma relativamente simple condiciones para alcanzar consenso, mientras que, en relación a la segunda, para el SEP estudiado se identifican tanto las propiedades de consenso como la estructura de las matrices de interconexión.

El resto del artículo está organizado de la siguiente forma: en la Sección 2 se presentan algunos antecedentes de teoría de grafos. Las características principales de la filosofía de análisis propuesta, así como la formulación del problema están contenidas en la Sección 3; mientras que el estudio de sincronización del SEP considerado se realiza en la Sección 4. Finalmente, en la Sección 5 se incluyen algunos comentarios finales y se plantean los problemas futuros a estudiar.

2. ANTECEDENTES

En la literatura general de modelado (Wellstead, 1979), una manera de ver las componentes de un sistema es como *manipuladores de energía* que interactúan con entradas y salidas por medio de puertos. El acoplamiento energético de estos sub-sistemas puede representarse por un par de variables cuyo producto es la potencia instantánea transmitida por el puerto, de esta forma, la entrega de energía está asociada a una variable generalizada de *flujo* y otra de *esfuerzo* que representan el mecanismo de transferencia de energía. El modelado se logra interconectando los sub-sistemas para formar uno completo.

Así, este enfoque considera que un sistema es la interconexión de almacenadores de flujo y de esfuerzo, disipadores y fuentes. Para el caso particular de **circuitos eléctricos** la corriente y el voltaje son las variables de flujo y esfuerzo, respectivamente, con el inductor el elemento almacenador de flujo y el capacitor el de esfuerzo. De manera que el sistema queda definido al agregar *relaciones constitutivas* y añadir las *restricciones* impuestas por la **interconexión**. En general (ver (Van der Schaft and Maschke, 2011)), la relación de almacenamiento de energía entre las variables de flujo f y las de esfuerzo e , depende de la naturaleza del elemento (capacitores o inductores), y es de la forma

$$\dot{f}_a = f ; e = \frac{\partial V(f_a)}{\partial f_a} \quad (1)$$

o dualmente

$$\dot{e}_a = e ; f = \frac{\partial V(e_a)}{\partial e_a} \quad (2)$$

donde f_a y e_a son vectores de flujo y esfuerzo almacenado¹ de la misma dimensión de f y e , mientras que $V(\cdot)$ es una función que representa la energía almacenada en el sistema. A su vez, una relación disipativa entre el vector de flujos y el de esfuerzos es cualquier relación estática de la forma (aquí se considerarán estas relaciones lineales)

$$R(f, e) = 0$$

Finalmente, el grafo asociado al sistema representa la interconexión de los elementos.

Un grafo dirigido \mathcal{G} consiste de un conjunto finito de nodos \mathcal{V} , con n elementos, y un conjunto finito de bordes \mathcal{E} con m elementos, junto con un mapeo del conjunto \mathcal{E} al conjunto de parejas ordenadas de \mathcal{V} , tal que a cada borde $e \in \mathcal{E}$ le corresponde una pareja ordenada $(v, w) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. El borde (v, w) denota que el elemento w puede acceder a la información del elemento v , pero no necesariamente viceversa. Se dice que un grafo dirigido está *conectado* si se tiene al menos un nodo con trayectorias dirigidas a todos los demás nodos. El mapeo del espacio de bordes al de nodos tiene como representación a la *matriz de incidencia* B , que es de $n \times m$, con $(i, j)^{th}$ elemento igual a 1 si el j^{th} borde entra al nodo i , -1 si sale del nodo i y 0 de otra forma. En este sentido también puede construirse la matriz B_0 de *loopset* completa cuyo $(i, j)^{th}$ elemento igual a 1 si el j^{th} borde está en el i^{th} lazo y ambos tienen la misma orientación, $(i, j)^{th}$ igual a -1 si el j^{th} borde está en el i^{th} lazo y tienen orientación opuesta y 0 de otra forma.

En este sentido, un **árbol**, definido en (Wellstead, 1979), es un subgrafo conectado con todos los nodos del grafo pero ninguna trayectoria cerrada, a sus bordes se les llaman ramas; al complemento del árbol se le llama **co-árbol** y sus bordes se llaman cuerdas. Así, pueden expresarse leyes de interconexión, o de conservación de energía, como la Ley de Corrientes y la Ley de Voltajes de Kirchhoff

$$Bf = 0 \quad (LCK)$$

$$B_0 e = 0 \quad (LVK)$$

con $f, e \in \mathbb{R}^m$ un vector de flujos y de esfuerzos de borde, respectivamente. Aquí, es posible demostrar que existen $n - 1$ restricciones de flujo linealmente independientes en un grafo conectado con n nodos, por lo que el rango de su matriz de incidencia B es $n - 1$, pudiéndose obtener una *matriz de incidencia reducida* $C_b \in \mathbb{R}^{(n-1) \times m}$ eliminando un renglón de B , de manera que si f se ordena tal que el flujo de las ramas entra primero y el orden de los renglones de C_b corresponde con las ramas en f , entonces la LCK es

$$C_b f = [I \ H] \begin{bmatrix} f_t \\ f_c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow f_t = -H f_c \quad (3)$$

donde f_t y f_c son los flujos en el árbol y en el co-árbol, respectivamente, I es la matriz identidad de orden $(n - 1)$ y $H \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (m-n+1)}$ es la submatriz de incidencia. De igual forma, la matriz de loopsets completa B_0 tiene $m - n + 1$ restricciones de esfuerzo linealmente independientes, por lo que también es posible reducirla y obtener una matriz de loopsets básica B_b , de tal forma que la LVK se puede reordenar como

$$B_b e = [F \ I] \begin{bmatrix} e_t \\ e_c \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

¹ En circuitos eléctricos f_a es la carga del capacitor y e_a el flujo magnético del inductor.

con $F \in \mathbb{R}^{(m-n+1) \times (n-1)}$, I la matriz identidad de orden $(m-n+1)$ y los vectores de esfuerzo en los bordes del árbol e_t y en los bordes del co-árbol e_c . Por último, otra propiedad demostrada en Wellstead (1979) es la que se refiere al hecho de que $F^T = -H$, por lo que (4) también puede expresarse como

$$[-H^T \ I] \begin{bmatrix} e_t \\ e_c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow e_c = H^T e_t \quad (5)$$

Las expresiones (3) y (5) equivalen a las restricciones impuestas por las *estructuras de Dirac* y que son analizadas en Van der Schaft and Maschke (2011) como relaciones que preservan potencia. Así, mientras las ecuaciones (3) y (5) definen la *topología* de la interconexión, (1) y (2) establecen la dinámica.

3. FILOSOFÍA DE ANÁLISIS

En esta sección se presenta un ejemplo simple que ilustra la metodología general del análisis, con el fin de identificar las características principales del enfoque y facilitar así el planteamiento del problema. Para esto, considere un circuito eléctrico en donde sólo se tienen almacenadores de flujo (capacitores) en el árbol con corrientes y voltajes $f_t, e_t \in \mathbb{R}^3$, flujo almacenado (carga) $f_a \in \mathbb{R}^3$ y función de energía $V(f_a)$, interconectados con resistencias en el co-árbol con corrientes y voltajes $f_c, e_c \in \mathbb{R}^2$, tal como se muestra en la Figura 1. Las restricciones algebraicas son (3) y (5) con la matriz de incidencia reducida $C_b \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$

$$C_b = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right]; \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A los capacitores del circuito les corresponde una relación dinámica como (1), de manera que sustituyendo las restricciones algebraicas la dinámica para las cargas eléctricas es

$$\dot{f}_a = f_t = -H f_c$$

con la relación estática $f_c = -R e_c$, donde $R > 0 \in \mathbb{R}^2$ es una matriz diagonal de resistencias, mientras que, también de (1), el voltaje en los capacitores satisface $e_t = \frac{\partial V(f_a)}{\partial f_a}$, por lo que la dinámica puede re-escribirse como

$$\dot{f}_a = -H R^{-1} H^T \frac{\partial V(f_a)}{\partial f_a} \quad (6)$$

Para analizar las propiedades de sincronización² del sistema (6), se obtiene la derivada temporal de $V(f_a)$ a lo largo de (6) dada por

$$\dot{V} = - \left(\frac{\partial V(f_a)}{\partial f_a} \right)^T H R^{-1} H^T \frac{\partial V(f_a)}{\partial f_a} \leq 0. \quad (7)$$

Aquí, $V(f_a)$ es radialmente no acotada y de (7) se observa que su derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema es negativa semidefinida. Sin embargo, $\dot{V} = 0$ si y sólo si $H^T \frac{\partial V(f_a)}{\partial f_a} = 0$ por lo que, aplicando el principio de invariancia de LaSalle, el conjunto máximo invariante a donde convergen global y asintóticamente las trayectorias está dado por

$$\varepsilon = \left\{ f_a \mid H^T \frac{\partial V}{\partial f_a} = H^T e_t = 0 \right\}. \quad (8)$$

² Las propiedades de sincronización del sistema (6) han sido ampliamente estudiadas Olfati-Saber and Murray (2004), con HRH^T la matriz Laplaciana ponderada.

Este conjunto está caracterizado por las propiedades de la matriz H^T . Esta matriz tiene una estructura particular, sus renglones son linealmente independientes, por lo que su rango está determinado por el número de resistencias, y tienen un 1 y un -1, lo que implica que el vector lleno de unos $\mathbf{1}_{n-1}$ está en el kernel de esta matriz. Más aún, se cumple que el operador H^T tiene como dominio un espacio de dimensión $n-1$, cumpliéndose que: $n-1 = \dim(\text{kernel}\{H^T\}) + \text{rank}(H^T)$, particularmente $3 = \dim(\text{kernel}\{H^T\}) + 2$, con lo que $\dim(\text{kernel}\{H^T\}) = 1$, concluyéndose así que $\mathbf{1}_{n-1}$ es el único vector en el kernel de H^T .

Esto es, (8) establece un **consenso** en los voltajes de los capacitores e_t , en el sentido de que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_t = \alpha \mathbf{1}_3,$$

para alguna α constante, si y sólo si el único vector en el kernel de H^T es el vector $\mathbf{1}_3$ o equivalentemente como se ve en (Ren and Cao, 2011) si el grafo que representa a la matriz H está conectado.

Es importante notar que los resultados obtenidos a través de este análisis no son novedosos, sin embargo la contribución principal reside en la filosofía de análisis que se presentó para alcanzar condiciones de consenso. En este sentido, es fundamental reconocer tres puntos principales que establecen la base de la metodología propuesta:

- La identificación de los elementos almacenadores y las dinámicas dadas por (1), así como las restricciones algebraicas obtenidas de las leyes de conservación de energía (3) y (5) conlleva a un Sistema Hamiltoniano donde se distingue explícitamente la topología del sistema.
- El resultado de convergencia de las trayectorias a un valor de consenso depende esencialmente de las propiedades estructurales de la matriz de interconexión H , en este caso que el vector de unos sea el único vector en el kernel de H^T .
- El modelo del circuito permite explotar las propiedades intrínsecas de los Sistemas Hamiltonianos. Esta línea permite realizar un análisis de estabilidad de manera sistemática.

Bajo estas consideraciones es posible presentar la siguiente formulación del problema:

Considere un sistema dinámico, cuya interconexión se representa por un grafo, caracterizado por su matriz de incidencia H , que establece restricciones algebraicas dadas por (3) y (5), en el cual se han identificado elementos almacenadores de energía con relaciones dinámicas (1) y (2), y que en conjunto constituyen un Sistema Hamiltoniano de la forma³

$$\dot{x} = [\mathcal{J} - \mathcal{R}] \nabla V(x) + Gu$$

Encuentre condiciones sobre la topología de la red, que aseguren que esfuerzos asociados a algunos bordes converjan a un valor común, i. e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_t = \alpha \mathbf{1}_{n-1},$$

para alguna constante α y $\mathbf{1}_{n-1}$ un vector lleno de unos.

³ Como se verá más adelante, para circuitos eléctricos, el vector u representa a las fuentes.

4. CONSENSO EN CIRCUITOS ELÉCTRICOS

En esta sección se desarrolla la metodología planteada de una manera más general, esto es, para un circuito eléctrico, representado por un grafo de n nodos y b bordes, con capacitores, resistencias y fuentes de voltaje en el árbol e inductores y resistencias en el co-árbol, de tal forma que los vectores de flujo y esfuerzo pueden dividirse tal que

$$e_t = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{Ct} \\ e_{Rt} \end{bmatrix}, \quad f_t = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_{Ct} \\ f_{Rt} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad e_c = \begin{bmatrix} e_{Rc} \\ e_{Lc} \end{bmatrix}, \quad f_c = \begin{bmatrix} f_{Rc} \\ f_{Lc} \end{bmatrix}$$

donde los vectores en el árbol $e_1, f_1 \in \mathbb{R}^{n1}, e_{Ct}, f_{Ct} \in \mathbb{R}^{nc}, e_{Rt}, f_{Rt} \in \mathbb{R}^{nr}$, con $n1 + nc + nr = n - 1$, denotan los esfuerzos y flujos en las fuentes, capacitores y resistencias respectivamente; mientras que en el co-árbol se consideran los vectores $e_{Rc}, f_{Rc} \in \mathbb{R}^{br}, e_{Lc}, f_{Lc} \in \mathbb{R}^{bl}$ de esfuerzos y flujos en resistencias e inductores donde $br + bl = b - n + 1$. Así mismo, dada la naturaleza de los elementos, la energía almacenada en el circuito $V(f_a, e_a) = V(f_a) + V(e_a)$, es la debida al almacenamiento de carga en capacitores y al de flujo magnético en inductores, teniéndose de (1) y (2) que

$$\begin{aligned} \dot{f}_a &= f_{Ct}, \quad e_{Ct} = \frac{\partial V(f_a, e_a)}{\partial f_a} \\ \dot{e}_a &= e_{Lc}, \quad f_{Lc} = \frac{\partial V(f_a, e_a)}{\partial e_a} \end{aligned} \quad (9)$$

$$e_{Rt} = R_t f_{Rt}, \quad e_{Rc} = R_c f_{Rc}$$

con $R_t \in \mathbb{R}^{nr \times nr}$, $R_c \in \mathbb{R}^{br \times br}$ las matrices diagonales de resistencias de árbol y co-árbol. Mientras que la interconexión es como (3) y (5), con la matriz H particionada como

$$H = \begin{bmatrix} H_{1R} & H_{1L} \\ H_{CR} & H_{CL} \\ H_{RR} & H_{RL} \end{bmatrix}$$

obtenida de la matriz de cutsets básica⁴, donde por ejemplo la submatriz $H_{1L} \in \mathbb{R}^{n1 \times bl}$ relaciona las fuentes del árbol con los inductores del co-árbol, de manera que $H_{1L} := (f_i l_j)$, con el elemento $f_i l_j \neq 0$ si y solo si la fuente f_i comparte nodo con el inductor l_j y análogamente las submatrices $H_{CL} := (c_i l_j) \in \mathbb{R}^{nc \times bl}$, $H_{RL} := (r_i l_j) \in \mathbb{R}^{nr \times bl}$ y $H_{CR} := (c_i r_j) \in \mathbb{R}^{nc \times br}$. En particular, dado el tipo de circuitos eléctricos que se considerarán se supondrá que:

- A1. A cada resistencia del árbol le corresponde un inductor en serie ($nr = bl$).
- A2. A cada resistencia del co-árbol le corresponde un solo capacitor en paralelo ($br = nc$).

Bajo estas suposiciones $H_{RR} = H_{1R} = 0$. Así, haciendo uso de (9), (3) y (5), la dinámica del sistema es

$$\dot{f}_a = -H_{CL} f_{Lc} - H_{CR} R_c^{-1} H_{CR}^T e_{Ct} \quad (10)$$

$$\dot{e}_a = H_{CL}^T e_{Ct} - H_{RL}^T R_t H_{RL} f_{Lc} + H_{1L}^T e_1$$

Esta última expresión puede reescribirse en forma Hamiltoniana como

⁴ La matriz de cutsets básica puede encontrarse a partir de la matriz de incidencia haciendo operaciones básicas con los renglones que equivale a renombrar a los nodos, o bien puede obtenerse directamente como se explica en (Wellstead, 1979).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [\mathcal{J} - \mathcal{R}] \nabla_x V + G e_1 \\ y &= G^T \nabla_x V \end{aligned} \quad (11)$$

con $x = [f_a^T \ e_a^T]^T$ y las matrices

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & -H_{CL} \\ H_{CL}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} H_{CR} R_c^{-1} H_{CR}^T & 0 \\ 0 & H_{RL}^T R_t H_{RL} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ H_{1L}^T \end{bmatrix}, \quad \nabla_x V = \begin{bmatrix} e_{Ct} \\ f_{Lc} \end{bmatrix}$$

con $\mathcal{R} \geq 0$ y $\mathcal{J} = -\mathcal{J}^T$. De manera que de (11), para cada entrada e_1^* existe un vector de equilibrio $x^* = [f_a^* \ e_a^*]^T$ tal que

$$[\mathcal{J} - \mathcal{R}] \nabla_x V(x^*) + G e_1^* = 0 \quad (12)$$

Para analizar la estabilidad de x^* , se retoma la función incremental de (Jayawardhana et al., 2007) definida como

$$V_0(x) = V(x) - x^T \nabla V(x^*) - (V(x^*) - x^{*T} \nabla V(x^*))$$

cuya derivada temporal a lo largo de (11) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &= -(\nabla V(x) - \nabla V(x^*))^T \mathcal{R} (\nabla V(x) - \nabla V(x^*)) + \\ &\quad + (\nabla V(x) - \nabla V(x^*))^T G (e_1 - e_1^*) \end{aligned}$$

de manera que si la entrada $e_1 = e_1^*$, entonces

$$\dot{V}_0 = -(\nabla V(x) - \nabla V(x^*))^T \mathcal{R} (\nabla V(x) - \nabla V(x^*)) \leq 0$$

Con lo que el conjunto máximo invariante donde $\dot{V}_0 = 0$ está dado por

$$\varepsilon = \{(f_a, e_a) \mid H_{CR}^T (e_{Ct} - e_{Ct}^*) = 0, \ H_{RL} (f_{Lc} - f_{Lc}^*) = 0\}$$

Este conjunto depende de la topología del circuito. Así, bajo las suposiciones A1 y A2, el único vector en el kernel de H_{CR}^T y H_{RL} es el cero, más aún H_{CR} es la matriz identidad de orden $nc = br$, por lo que

$$\varepsilon = \{(f_a, e_a) \mid e_{Ct} = e_{Ct}^*, \ f_{Lc} = f_{Lc}^*\} \quad (13)$$

es asintóticamente estable.

Por otro lado, suponiendo que:

- A3. Cada inductor no conecta a más de un capacitor, con lo que los renglones de H_{CL} son ortogonales.
- A4. Cada carga está conectada a todas las fuentes, con lo que la norma euclidiana α de los renglones de H_{CL} es la misma para todos,

entonces el producto $H_{CL} H_{CL}^T = \alpha I_{nc}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ y I_{nc} la identidad de orden nc . Por lo que premultiplicando por H_{CL} la segunda parte de la ecuación (12), ésta puede expresarse como

$$\begin{aligned} -R_c^{-1} e_{Ct}^* - H_{CL} f_{Lc}^* &= 0 \\ \alpha e_{Ct}^* + H_{CL} H_{RL}^T R_t H_{RL} f_{Lc}^* + H_{CL} H_{1L}^T e_1^* &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

que determina los puntos de equilibrio a los que llegará el circuito, donde hasta ahora no son evidentes conclusiones de consenso.

Nota 1: Hay columnas en H_{CL} llenas de ceros, éstas representan a los inductores no conectados con ningún capacitor, que son los inductores que conectan fuentes i.e. H_{1L} con columnas de 1 y -1. Por lo anterior, la premultiplicación de H_{CL} por (11), en particular $H_{CL} H_{1L}$ “esconde” el equilibrio de los inductores que conectan fuentes, por lo que es necesario recuperarlos explícitamente.

Finalmente, dado que siempre hay un único inductor conectando al capacitor c_i con la fuente f_i , el producto

$$H_{CL}H_{1L}^T = \begin{bmatrix} \sum_{r=1}^{b_l} (c_{1l_r})(l_r f_1) & \cdots & \sum_{r=1}^{b_l} (c_{1l_r})(l_r f_{nc}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{r=1}^{b_l} (c_{ncl_r})(l_r f_1) & \cdots & \sum_{r=1}^{b_l} (c_{ncl_r})(l_r f_{nc}) \end{bmatrix}$$

es una matriz donde que cada elemento de cada sumatoria es cero, excepto el equivalente al r -ésimo inductor que conecta al capacitor c_i con la fuente f_i , con lo que la matriz está llena de menos unos. Así, considerando una red inductiva en el sentido de que $R_t = 0$, la segunda parte de (14) puede reescribirse como

$$\alpha e_{Ct}^* - [1_{nc} \cdots 1_{nc}] e_1^* = 0$$

con $e_1^* = [e_{11}^* \cdots e_{1nc}^*]^T \in \mathbb{R}^{nc}$ y 1_{nc} un vector lleno de unos de dimensión nc , de manera que la ecuación anterior también puede escribirse como

$$e_{Ct}^* = \frac{1}{\alpha} \{e_{11}^* + \cdots + e_{1nc}^*\} 1_{nc} \quad (15)$$

que es una condición de consenso en el voltaje de los capacitores del árbol que depende del valor de las fuentes.

4.1 Ejemplo: Red eléctrica

El siguiente es un ejemplo representativo donde se cumplen las suposiciones hechas para el análisis anterior, similar al presentado en (Fiaz et al., 2013), en donde (14) puede tener propiedades de consenso. El circuito en la Figura 2 emula a una red eléctrica, con dos generadores simbolizados por fuentes, cinco líneas de transmisión representadas por el llamado modelo Π , consistente de una resistencia en serie con un inductor y dos capacitores conectados a la referencia, mientras que hay dos cargas que se simbolizan como resistencias lineales. Aquí toman sentido las suposiciones A1 y A2 sobre el tipo de circuitos a considerar.

En este caso, se consideran en el árbol los capacitores C_1 y C_2 , las dos fuentes G_1 y G_2 , así como las resistencias R_1, \dots, R_5 , aquí, los capacitores C_3 y C_4 no se consideran por estar en paralelo con las fuentes. Mientras que en el co-árbol se tienen las dos resistencias Z_1 y Z_2 , que hacen de cargas, así como los inductores L_1, \dots, L_5 . Así, siguiendo los lineamientos de la Sección 4, el modelo de la red es como (11), con los vectores $e_t, f_t \in \mathbb{R}^9$ y $e_c, f_c \in \mathbb{R}^7$ y la matriz de interconexión H

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Se observa que en las dos primeras columnas de H , $H_{1R} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} = 0$ y $H_{RR} \in \mathbb{R}^{5 \times 2} = 0$, puesto que se satisfacen las suposiciones, con $H_{CR} = I_2$ y $H_{RL} = -I_5$, de tal forma que el equilibrio es

$$\begin{aligned} -R_c^{-1} e_{Ct}^* - H_{CL} f_{Lc}^* &= 0 \\ H_{CL}^T e_{Ct}^* - R_t f_{Lc}^* + H_{1L}^T e_1 &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Luego, considerando como en la sección anterior, el caso donde $R_t = 0$, entonces la segunda parte (16) queda expresada como

$$H_{CL}^T e_{Ct}^* + H_{1L}^T e_1 = 0 \quad (17)$$

En este caso, el producto $H_{CL}H_{CL}^T = 2I_2$ y $H_{CL}H_{CL}^T = -[1_2 \ 1_2]$ con lo que pre-multiplicando (17) por H_{CL} se tiene que

$$\begin{aligned} -R_c^{-1} e_{Ct}^* - H_{CL} f_{Lc}^* &= 0 \\ 2e_{Ct}^* + [1_2 \ 1_2] e_1^* &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

en donde la segunda expresión también puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} e_{c1}^* \\ e_{c2}^* \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e_{11}^* + e_{12}^* \\ e_{11}^* + e_{12}^* \end{bmatrix} \quad (19)$$

Sin embargo, es importante notar que para que (17) se satisfaga⁵, particularmente que $f_{Lc3}^* = 0$, debe cumplirse que

$$e_{11}^* = e_{12}^* \quad (20)$$

por lo que (19) y (20) representan el comportamiento en estado estacionario, en el cual el voltaje de los capacitores llega a un consenso y este valor es el de las fuentes.

4.2 Simulaciones

En las Figuras 3, 4 y 5 se presentan los resultados de simulación, del POWERLIB de MATLAB, cuando la red es inductiva. Los valores de capacitancias e inductancias son: $C1 = 0.005$, $C2 = 0.008$, y $L1 = 0.01$, $L2 = 0.02$, $L3 = 0.03$, $L4 = 0.04$ y $L5 = 0.05$ respectivamente. Así mismo, las condiciones iniciales para las cargas eléctricas y los flujos magnéticos son todas diferentes; mientras que los valores de las fuentes e_{11} y e_{12} se fijaron en 7 [V].

En la Figura 3 se muestra que el voltaje en los capacitores e_{Ct} , llega a un consenso tal que independientemente de las condiciones iniciales, el voltaje converge a un mismo valor que es el de las fuentes, en este caso con resistencias $z_1 = 2.5$ y $z_2 = 5$. En la Figura 4 se presentan las corrientes en los inductores que tienden a valores constantes, por lo que la derivada del flujo magnético o voltaje es cero. En esta misma figura se presentan también las corrientes en los capacitores para mostrar que la derivada de la carga eléctrica es cero, asegurando con esto que se está en el equilibrio. Por último la Figura 5 presenta los voltajes de los capacitores para el mismo circuito pero con resistencias $z_1 = 25$ y $z_2 = 35$, mostrando que el valor de consenso no depende del valor de las resistencias.

5. CONCLUSIONES

Los autores de este trabajo consideran que el análisis y control de los SEPs merece un re-estudio en el sentido de que es fundamental volver a las herramientas básicas para poder generar nuevas estrategias y formas de análisis. Es por ello que el objetivo de este trabajo estuvo encaminado al análisis de consenso en circuitos eléctricos más que por el problema mismo, por la experiencia que su estudio genera para extrapolarlo a estructuras más complicadas.

Así pues, en este trabajo se ha planteado una nueva filosofía de análisis que permite interpretar resultados conocidos para circuitos eléctricos a partir de las características

⁵ ver Nota 1

topológicas de la red, particularmente de las propiedades de la matriz de interconexión, desde una perspectiva de sincronización y de consenso, haciendo uso de características de los Sistemas Hamiltonianos que permiten un análisis de estabilidad sistemático. La metodología se ejemplificó con un circuito que emula a un SEP, sin embargo, es claro que para que el análisis presentado se extienda directamente al de una red de SEPs se necesitan considerar un análisis senoidal, así como la caracterización de las submatrices de interconexión que representan las resistencias en las líneas de transmisión, en lo cual se está trabajando actualmente. Sin embargo, el análisis presentado parece escalable a este tipo de sistemas más complejos.

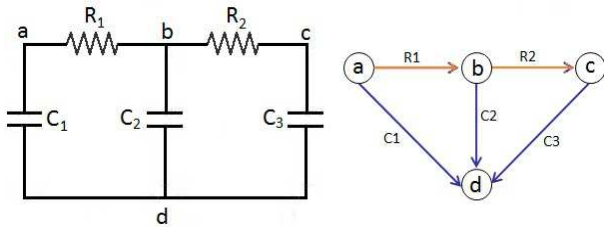


Figura 1. Circuito eléctrico RC

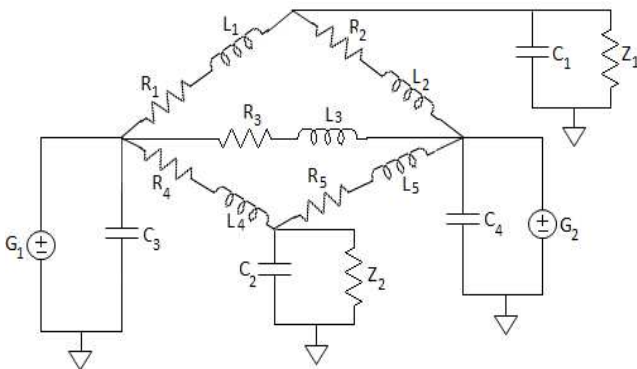


Figura 2. Circuito eléctrico representativo

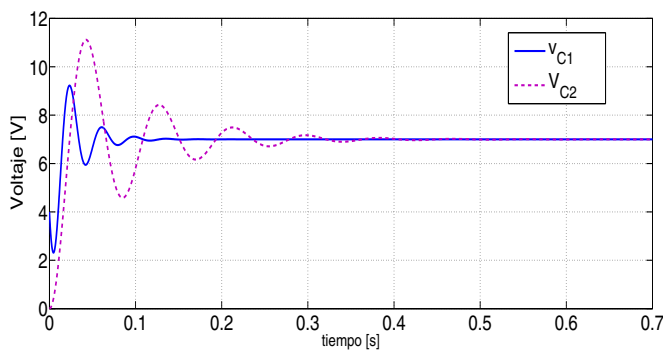


Figura 3. Voltaje en los capacitores con $z_1 = 2.5$ y $z_2 = 5$

REFERENCIAS

Arcak, M. (2007). Passivity as a design tool for group coordination. *IEEE Trans on Automatic Control*, 52(8), 1380–1389.
 Fax, J. and Murray, R. (2002). Graph laplacians and stabilization of vehicle formations. In *15th IFAC Conference, 2002. Proceedings of the*, 283.

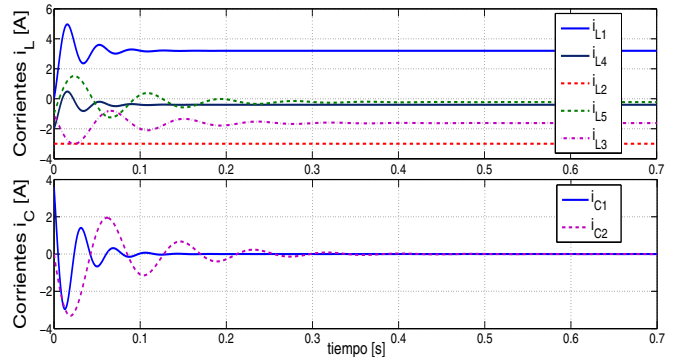


Figura 4. Corrientes en los inductores y en los capacitores, respectivamente.

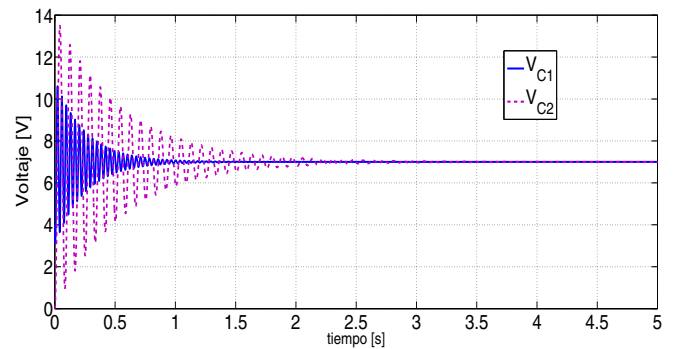


Figura 5. Voltaje en los capacitores con $z_1 = 25$ y $z_2 = 35$

Fiaz, S., Zonetti, D., Ortega, R., Scherpen, J., and van der Schaft, A. (2013). A port-hamiltonian approach to power network modeling and analysis. *European Journal of Control*, 19(6), 477–485.
 Jayawardhana, B., Ortega, R., García-Canseco, E., and Castanos, F. (2007). Passivity of nonlinear incremental systems: Application to pi stabilization of nonlinear rlc circuits. *Systems & control letters*, 56(9), 618–622.
 Olfati-Saber, R. and Murray, R. (2004). Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Trans on Automatic Control*, 49(9), 1520–1533.
 Ortega, R., Van der Schaft, A.J., Mareels, I., and Maschke, B. (2001). Putting energy back in control. *Control Systems, IEEE*, 21(2), 18–33.
 Ren, W. and Cao, Y. (2011). *Distributed Coordination of Multi-agent Networks, Communications and Control Engineering*. Springer.
 Van der Schaft, A. and Maschke, B. (2011). Discrete conservation laws and port-hamiltonian systems on graphs and complexes. *Computer Research Repository*, abs/1107.2006.
 Wei, J. and der Schaft, V. (2013). Load balancing of dynamical distribution networks with flow constraints and unknown in/outflows. *Systems and Control Letters*, 62(11), 1001–1008.
 Wellstead, P.E. (1979). *Introduction to physical system modelling*. Academic Press London.