

Control híbrido maximizante por retroalimentación de salida para biorreactores^{*}

Alejandro Vargas^{*} Jaime A. Moreno^{**}

^{*} Laboratorio de Investigación en Procesos Avanzados de Tratamiento de Aguas (LIPATA), Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Blvd. Juriquilla 3001, Querétaro 76230 México
(e-mail: AVargasC@ingen.unam.mx)

^{**} Eléctrica y Computación, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Av. Universidad 3000, 04510 Coyoacán, D.F., México

Resumen

Se propone un controlador híbrido continuo-discreto por retroalimentación de salida para el modelo sencillo de un biorreactor, cuya función de salida presenta un único máximo. Todos los parámetros del modelo pueden ser variantes en el tiempo. El controlador maximiza la salida en línea y está basado en el algoritmo super-twisting (modos deslizantes de segundo orden), donde la superficie de deslizamiento se calcula a partir solo de la salida medida y una estimación discreta del signo del error. Se presenta una prueba de convergencia y se ejemplifica mediante simulaciones en el modelo simplificado de un biorreactor.

Keywords: búsqueda de extremos; procesos biotecnológicos; control discontinuo.

1. INTRODUCCIÓN

En una *biorrefinería de residuos* se producen combustibles, calor, energía u otros productos de valor agregado (químicos, nutrimentos, materiales) a partir de biomasa residual, entendida ésta como una mezcla de sustratos de origen orgánico que representan los residuos de otro proceso (Panagiotopoulos et al., 2013). Por ejemplo, a partir de aguas residuales se ha demostrado que es posible obtener combustibles como el metano y el hidrógeno (Liu et al., 2013; Kothari et al., 2012; Ren et al., 2011), biopolímeros (Vargas et al., 2014a; Jiang et al., 2012) u otros productos.

En las biorrefinerías los procesos de conversión son catalizados por microorganismos y se busca maximizar la valorización de los sustratos empleados. Una forma muy conveniente de lograr este objetivo es mediante el uso de control retroalimentado. Sin embargo, resulta complicado por las grandes incertidumbres inherentes a los procesos biológicos, tanto en la estructura y los parámetros de los modelos matemáticos que los describen, como en las perturbaciones externas, por ejemplo los cambios en la composición y concentración de sustrato en el flujo de entrada.

Aún así, se han propuesto diversas estrategias de diseño de controladores para bioprocesos, por ejemplo, para biorreactores anaerobios (Aceves-Lara et al., 2010; Antonelli et al., 2003; Méndez-Acosta et al., 2010), para la producción de enzimas (Dewasme et al., 2011), o para biopolímeros (Vargas et al., 2014a). Recientemente se

han propuesto controladores por búsqueda de extremos (*extremum-seeking*) (Cougnon et al., 2011; Dieulot, 2012; Lara-Cisneros et al., 2014) para maximizar la producción de biomasa en reactores en lote alimentado (*fed-batch*). La entrada de control generalmente es la tasa de dilución y se hace una estimación de parámetros críticos en línea. Si bien se busca maximizar una salida medida, estos esquemas no son propiamente de *retroalimentación de salida*, pues requieren la medición de alguna otra variable de estado, como la concentración de sustrato.

Por otro lado, recientemente también se han aplicado algoritmos por modos deslizantes de orden superior (Levant, 1998; Moreno, 2011) para el diseño de controladores u observadores para este tipo de bioprocesos (Moreno et al., 2010; De Battista et al., 2012; Nuñez et al., 2013; Vargas et al., 2014b). Los modos deslizantes de segundo orden resultan atractivos para bioprocesos porque son robustos ante algunas incertidumbres del modelo (particularmente la tasa de consumo de sustrato), convergen en tiempo finito y la señal de control resulta continua, a diferencia de los modos deslizantes usuales.

En esta contribución se presenta un algoritmo de control por retroalimentación de salida para una clase muy general de bioprocesos, que está basada en el algoritmo super-twisting (modos deslizantes de segundo orden), para implementar un control por búsqueda de extremos capaz de maximizar una variable de salida, usando solamente mediciones de la salida. El control resulta híbrido porque si bien el diseño inicial del controlador se hace para un sistema continuo, requiere un estimador de algunos parámetros y variables, que se implementa en tiempo discreto.

^{*} Proyecto financiado por PAPIIT-UNAM IN112114 y II-UNAM 3350.

En la siguiente sección se discute el sistema considerado. A continuación se presenta el controlador propuesto, llamado aquí *pseudo-super-twisting*, junto con su prueba de convergencia. En seguida se presenta la parte discreta del controlador, que sirve para estimar el signo del error de seguimiento y el valor instantáneo máximo de la salida. La sección 5 presenta algunas simulaciones numéricas, para terminar con las conclusiones.

2. MODELO SIMPLIFICADO DEL BIORREACTOR

La descripción matemática de los bioprocesos generalmente requiere modelos con varios estados (concentraciones) con complejas interrelaciones, usualmente no lineales. Sin embargo, desde el punto de vista de una salida a maximizar, el modelo de un biorreactor puede simplificarse a

$$\dot{S} = -r_S(S) + (S_{in} - S)u, \quad S(0) = S_0, \quad (1a)$$

$$y = r_y(S, y^*). \quad (1b)$$

donde $u = Q/V$ es la tasa de dilución (Q es el flujo volumétrico de entrada y V es el volumen de líquido en el biorreactor), S es la concentración de sustrato, S_{in} es la concentración de sustrato en el flujo de entrada, y la variable de salida es y ; $r_S(S)$ es la tasa de consumo de sustrato y $r_y(S, y^*)$ es una función algebraica que relaciona la concentración de sustrato con S , parametrizada por y^* .

Esta representación no convencional de un biorreactor es útil si consideramos que tanto $r_S(S)$ como $r_y(S, y^*)$ tienen parámetros variantes en el tiempo. Así, por ejemplo, tanto $r_S(S)$ como $r_y(S)$ podrían tener como uno de sus parámetros a la concentración de biomasa, que podría estar variando con el tiempo. En el ejemplo presentado en la Sección 5 se discute su pertinencia.

Es fácil ver que si $r_S(S) \geq 0$ y $r_y(S) \geq 0$ para todo $S \geq 0$ y $u(t) \geq 0$, entonces las trayectorias de (1) son tales que $S(t) \geq 0$ y $y(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. La única condición que por ahora le exigimos al sistema es que en cada instante de tiempo exista un único $y^*(t)$ tal que $r_y(S, y^*(t)) \leq y^*(t)$ para todo S . Es decir, la función $r_y(S)$ tiene un único máximo y^* , pero éste puede ser variante en el tiempo.

El objetivo de control es lograr el seguimiento de $y^*(t)$ y que las trayectorias de (1) sean tales que $y(t) \rightarrow y^*(t)$ usando solo las mediciones de $y(t)$, sin conocimiento explícito de $r_y(S)$, de $r_S(S)$, de $S(t)$ y/o de $S_{in}(t)$.

3. CONTROLADOR PSEUDO-SUPER-TWISTING

Para el sistema (1) consideremos por el momento que los parámetros no son variantes en el tiempo. La restricción sobre $r_y(\cdot)$ implica que existe un único valor S^* tal que $r_y(S^*) = y^*$. Definamos entonces el error $e_1 = S - S^*$ y escribamos $r_y(S, y^*)$ como $f(e_1) = r_y(e_1 + S^*)$. La función $f: \mathcal{D}_{e_1} \mapsto (-\infty, y^*]$ no es inyectiva y $f(0) = y^*$.

Ahora consideremos una función *inyectiva* definida solo para valores positivos $g: [0, \hat{y}^*] \mapsto \mathcal{D}_g \subset \mathbb{R}_+$, con $\hat{y}^* \approx y^*$. De esta manera podemos aproximar a $f(\cdot)$ con la inversa de $g(\cdot)$ evaluada con el valor absoluto de e_1 ; esto es, existe $g^{-1}: \mathcal{D}_g \mapsto [0, \hat{y}^*]$ tal que podemos aproximar a $f(e_1)$ alrededor de $e_1 = 0$ con

$$\hat{y} = g^{-1}(|e_1|). \quad (2)$$

Esto implica que para un valor dado $y \in [0, y^*]$,

$$|e_1|^{\frac{1}{2}} = |g(y)|^{\frac{1}{2}} - \varepsilon(e_1),$$

donde la función $\varepsilon(e_1)$ está dada por

$$\varepsilon(e_1) = |g \circ f(e_1)|^{\frac{1}{2}} - |e_1|^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

con $g \circ f$ la composición de las dos funciones respetando el signo; es decir:

$$g \circ f(e_1) = \begin{cases} g(f(e_1)) & \text{si } e_1 > 0, \\ -g(f(e_1)) & \text{si } e_1 < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Si hemos escogido la función g tal que $g(y^*) = 0$, entonces $f \circ g(0) = 0$ y en este caso $\varepsilon(0) = 0$. Sin embargo, si $g(y^*) > 0$ (porque $g^{-1}(0) = \hat{y}^* > y^*$), entonces $g \circ f(e_1)$ es discontinua en $e_1 = 0$ y $g \circ f(0) \in [-g(y^*), g(y^*)]$. A pesar de ello, $\varepsilon(e_1)$ no es discontinua en $e_1 = 0$ ya que su límite cuando $e_1 \rightarrow 0$ existe y $\varepsilon(0) = |g \circ f(0)| = g(y^*)$; en todo caso, no es diferenciable en $e_1 = 0$. Si e_1 es acotada, entonces $\varepsilon(e_1)$ también es acotada.

Ahora definamos una función con base en $\varepsilon(e_1)$:

$$\varpi(e_1) = \left(\frac{|g \circ f(e_1)|}{|e_1|} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon(e_1) = (\varpi(e_1) - 1) |e_1|^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Notamos que $\varpi(e_1) > 0$ y es discontinua si $g(y^*) > 0$, pero es continua si $g(y^*) = 0$.

Ahora definimos las siguientes funciones, representativas de un algoritmo super-twisting:

$$\phi_1(e_1) = |e_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_1), \quad \phi'_1(e_1) = \frac{1}{2} |e_1|^{-\frac{1}{2}}, \quad (6a)$$

$$\phi_2(e_1) = \frac{1}{2} \text{sign}(e_1), \quad \phi_2(e_1) = \phi'_1(e_1) \phi_1(e_1). \quad (6b)$$

Con estas definiciones notamos que

$$|g(y)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_1) = \varpi(e_1) \phi_1(e_1) = |g \circ f(e_1)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_1)$$

es discontinua en $e_1 = 0$ si $g(y^*) > 0$, pero es acotada si g es acotada por arriba (lo cual sucede para un dominio restringido de e_1).

Ahora podemos proponer el controlador. Definamos primero $\pi(e) = r_S(e_1 + S^*)$ y supongamos que $\pi(t)$ es una función desconocida del tiempo, pero acotada y cuya derivada temporal $\dot{\pi}(t)$ también es acotada, i.e. existen $\Delta_1 > 0$ y $\Delta_2 > 0$ tales que para toda $t \geq 0$

$$|\pi(t)| < \Delta_1, \quad |\dot{\pi}(t)| < \Delta_2. \quad (7)$$

Podemos entonces escribir el sistema (1) como

$$\dot{e}_1(t) = -\pi(t) + (S_{in} - S^*)u(t) - u(t)e_1(t) \quad (8)$$

$$\dot{\pi}(t) = -\delta_2(t). \quad (9)$$

Ahora consideremos el siguiente controlador, que es similar a uno super-twisting (Moreno, 2013) (de ahí que le llamemos *pseudo-super-twisting*):

$$u(t) = -k_1 |g(y(t))|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_1(t)) + \eta(t), \quad (10a)$$

$$\dot{\eta}(t) = -k_2 \text{sign}(e_1(t)). \quad (10b)$$

Nótese que si $g(y) = 0$ cuando $e_1 = 0$ (i.e. $g(y^*) = 0$), entonces la entrada de control $u(t)$ es continua. En otro caso, será discontinua cuando $e_1(t) = 0$. La entrada puede escribirse en función de e_1 y η :

$$u(e_1, \eta) = -k_1 \varpi(e_1) \phi_1(e_1) + \eta. \quad (11)$$

Si $\eta(t)$ es acotada, $u(t)$ también, ya que $\varpi(e_1) \phi_1(e_1)$ es acotada; $\eta(t)$ será acotada mientras $e_2(t)$ sea acotada (ver más adelante), ya que $\pi(t)$ es acotada. Nótese que el

controlador (10a) no es propiamente de retroalimentación de salida, pues si bien no se necesita medir e_1 , aún se requiere conocer $\text{sign}(e_1)$ para implementarlo.

Definamos $e_2 = -\pi + (S_{\text{in}} - S^*)\eta$, tal que¹ $\dot{e}_2 = -\dot{\pi} + (S_{\text{in}} - S^*)\dot{\eta}$ y por lo tanto

$$\dot{e}_1 = -\kappa_1 \varpi(e_1)\phi_1(e_1) + e_2 - e_1 u, \quad (12a)$$

$$\dot{e}_2 = -\kappa_2 \frac{1}{2} \text{sign}(e_1) + \delta_2(t), \quad (12b)$$

donde se han definido

$$\kappa_1 = (S_{\text{in}} - S^*)k_1, \quad \kappa_2 = 2(S_{\text{in}} - S^*)k_2. \quad (13)$$

Si $u(t) \geq 0$ y $0 \leq S_0 \leq S_{\text{in}}$, es fácil ver que si $e_1(0) \in \mathcal{D}_{e_1}$, entonces $e_1(t) \in \mathcal{D}_{e_1}$, donde

$$\mathcal{D}_{e_1} = \{e_1 \in \mathbb{R} : -S^* \leq e_1 < S_{\text{in}} - S^*\}.$$

Si $g(y^*, \hat{y}^*) = 0$, entonces $\varpi(e_1)$ es acotado en \mathcal{D}_{e_1} , siendo su cota superior $\varpi_{\text{máx}} > 0$. En cambio, si $g(y^*, \hat{y}^*) \neq 0$, entonces $\varpi(e_1) \rightarrow \infty$ cuando $e_1 \rightarrow 0$. La cota inferior está dada por $\varpi_{\text{mín}}$.

Primero establecemos un teorema que presenta la convergencia de e al origen en tiempo finito cuando $g(y^*, \hat{y}^*) = 0$ (o sea $y^* = \hat{y}^*$) y posteriormente relajamos esta suposición en una proposición para considerar el caso en que $g(y^*, \hat{y}^*) \neq 0$, en cuyo caso la convergencia es en tiempo finito a una vecindad \mathcal{N}_e del origen.

Teorema 1. Considere que $g(y^*) = 0$ y que

$$\varpi_M \kappa_1 = \epsilon + \frac{\Delta_2^2}{\epsilon^3 \gamma} + (\nu^2 - 1)\epsilon\gamma \left(1 + \frac{\Delta_2}{\epsilon^2 \gamma}\right)^2, \quad (14a)$$

$$\kappa_2 = \epsilon(\varpi_M \kappa_1 + \epsilon(\gamma - 1)). \quad (14b)$$

donde Δ_2 está dado por (7). Entonces existen $\varpi_M \geq \varpi_{\text{máx}}$, $\epsilon > 0$, $\gamma > 0$, y $\nu > 1$ tales que el sistema (12) con el controlador pseudo-super-twisting (10) converge al origen para toda condición inicial $e_0 \in \mathcal{D}_{e_1} \times \mathbb{R}$, y para toda $u(t) \geq 0$. Además, la convergencia es en tiempo finito.

Proposición 2. Para el mismo diseño de ganancias (14), si $g(y^*) \neq 0$, entonces existen $\varpi_M > \varpi_{\text{máx}}$, $\epsilon > 0$, $\gamma > 0$, y $\nu > 1$ tales que el sistema (12) con el controlador pseudo-super-twisting (10) converge a una vecindad \mathcal{N}_e del origen para toda condición inicial $e_0 \in \mathcal{D}_{e_1} \times \mathbb{R}$, y para toda $u(t) \geq 0$. Además, la convergencia a la vecindad es en tiempo finito y si $\kappa_1 |g \circ f(e_1)|^{\frac{1}{2}} + |e_1|u > e_2$ cuando $e(t) \in \mathcal{N}_e$, entonces \mathcal{N}_e se caracteriza por $e_1 = 0$.

La prueba está basada en los resultados presentados por Moreno (2011) con base en argumentos de Lyapunov. Consideremos primero las siguientes definiciones:

$$\alpha_1(t) = \frac{e_1 u}{\phi_1(e_1)} = |e_1|^{\frac{1}{2}} u, \quad (15a)$$

$$\alpha_2(t) = \frac{\delta_2(t)}{\phi_2(e_1)} = \frac{\delta_2(t)}{\frac{1}{2} \text{sign}(e_1)}. \quad (15b)$$

tal que $\delta_2(t) = \phi_1'(e_1)\phi_1(e_1)\alpha_2(t)$ y se cumple que

$$|\alpha_2(t)| \leq 2\Delta_2, \quad \alpha_1(0, u) = 0 \quad \forall u(t). \quad (16)$$

Definamos la función candidata de Lyapunov:

$$V_Q(e) = \xi^T P \xi, \quad P = \begin{bmatrix} \epsilon^2(1 + \gamma) & -\epsilon \\ -\epsilon & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \epsilon > 0, \\ \gamma > 0. \end{matrix} \quad (17)$$

¹ En realidad, S_{in} y S^* son variantes en el tiempo, y deberíamos considerar $\dot{e}_2 = (S_{\text{in}} - S^*)\dot{\eta} - \dot{\pi} + (S_{\text{in}} - S^*)\eta$, pero siempre podemos redefinir el término δ_2 para incluir esta incertidumbre adicional.

donde $P = P^T > 0$ y $\xi = [\xi_1, \xi_2]^T$ con $\xi_1 = \phi_1(e_1)$ y $\xi_2 = e_2$. Entonces

$$\dot{\xi} = \phi_1'(e_1)A(t)\xi, \quad A(t) = \begin{bmatrix} -\varpi(t)\kappa_1 - \alpha_1(t) & 1 \\ -\kappa_2 + \alpha_2(t) & 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

La derivada de la función $V(e)$ está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_Q(e) &= \phi_1'(e_1)\xi^T (A^T(t)P + PA(t))\xi \\ &= -\phi_1'(e_1)\xi^T Q(t)\xi \end{aligned}$$

con

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 2\epsilon^2\gamma(\varpi\kappa_1 + \alpha_1 - \epsilon) - 2\epsilon(\lambda_2 - \alpha_2) + 2\epsilon^3 & \star \\ (\lambda_2 - \alpha_2) - 2\epsilon^2 & 2\epsilon \end{bmatrix},$$

donde \star representa al elemento simétrico y

$$\lambda_2 = \kappa_2 - \epsilon(\varpi\kappa_1 + \alpha_1(t) + \epsilon(\gamma - 1)). \quad (19)$$

Supongamos (por ahora) que podemos encontrar parámetros ϵ , γ , κ_1 and κ_2 tales que $Q(t)$ sea positiva definida para todo e . Recordando la desigualdad estándar

$$\lambda_{\text{mín}}\{P\}\|\zeta\|_2^2 \leq \zeta^T P \zeta \leq \lambda_{\text{máx}}\{P\}\|\zeta\|_2^2,$$

donde

$$\|\zeta\|_2^2 = \phi_1^2(e_1) + e_2^2 = |e_1| + e_2^2$$

es la norma Euclideana de ζ , entonces

$$|e_1|^{\frac{1}{2}} \leq |\phi_1(e_1)| \leq \|\zeta\|_2 \leq \frac{V_Q^{\frac{1}{2}}(e)}{\lambda_{\text{mín}}\{P\}},$$

$$-|e_1|^{-\frac{1}{2}} \leq -\lambda_{\text{mín}}\{P\}V_Q^{-\frac{1}{2}}(e).$$

Dado que $\phi_1'(e_1) = \frac{1}{2}|e_1|^{-\frac{1}{2}}$ y $\lambda_{\text{mín}}\{Q\} > 0$, entonces

$$\dot{V}_Q = -\phi_1'(e_1)\zeta^T Q(t, e, u)\zeta \leq -\frac{\lambda_{\text{mín}}\{Q\}}{2}|e_1|^{-\frac{1}{2}}\|\zeta\|_2^2,$$

y se tiene finalmente que

$$\dot{V}_Q \leq -\left(\frac{\lambda_{\text{mín}}\{Q\}\lambda_{\text{mín}}^{\frac{1}{2}}\{P\}}{\lambda_{\text{máx}}\{P\}}\right)V_Q^{\frac{1}{2}}.$$

$V_Q(e(t))$ es monotónica decreciente y el origen es asintóticamente estable. Esto muestra que V_Q es una función de Lyapunov fuerte y que la convergencia es en tiempo finito.

Si Q resulta positiva definida en todas partes excepto en una (pequeña) vecindad del origen, la convergencia se garantiza (en tiempo finito) tan solo a una vecindad \mathcal{N}_e del origen.

Ahora se verá que cuando $g(y^*) = 0$, es posible escoger los parámetros de diseño para que Q sea positiva definida en todas partes, pero cuando $g(y^*) \neq 0$ esto solo es posible en una vecindad del origen.

Dado que $Q_{2,2} = 2\epsilon > 0$, requerimos que $\det[Q] > 0$:

$$4\epsilon^3\gamma(\varpi\kappa_1 + \alpha_1 - \epsilon) > (\lambda_2 - \alpha_2)^2. \quad (20)$$

Como λ_2 depende directamente de ϖ , si $\varpi \rightarrow \infty$ cuando $e_1 \rightarrow 0$, entonces también $\lambda_2 \rightarrow \infty$. A menos que podamos cancelar λ_2 escogiendo bien κ_1 y κ_2 , será imposible satisfacer la desigualdad (20) para valores suficientemente pequeños de e_1 . Sin embargo, si $g(y^*) = 0$ entonces ϖ es acotada y entonces esto sí es posible.

Usando (14b) y definiendo $\tilde{\varpi}(e_1) = \varpi_M - \varpi(e_1)$, se tiene que la desigualdad (20) se satisface si

$$\epsilon(\varpi_M \kappa_1 - \epsilon) - \lambda_2 > \frac{1}{4\epsilon^2\gamma}(|\lambda_2| + 2\Delta_2)^2, \quad (21)$$

y ahora λ_2 (ver (19)) queda definida como

$$\lambda_2(\kappa_1, e_1, u) = \epsilon (\tilde{\omega}(e_1)\kappa_1 - \alpha_1(e_1, u)). \quad (22)$$

La desigualdad (21) se satisface para $\lambda_2 \in [\lambda_2^{\min}, \lambda_2^{\max}]$. Al sustituir (14a), se tiene que

$$\lambda_2^{\max} = 2\varsigma(\nu - 1)(1 + \rho), \quad (23a)$$

$$\lambda_2^{\min} = -2\varsigma \left[1 - \rho + \sqrt{\nu^2(1 - \rho)^2 + 4(\nu^2 - 1)\rho} \right], \quad (23b)$$

tal que $\lambda_2^{\min} < 0$ y $\lambda_2^{\max} > 0$, con

$$\rho = \frac{\Delta_2}{\epsilon^2\gamma} > 0, \quad \varsigma = \epsilon^2\gamma > 0. \quad (24)$$

Definamos ahora

$$q(e_1) = \frac{\varpi(e_1)}{\varpi_M} > 0, \quad \tilde{\omega}(e_1) = (1 - q(e_1))\varpi_M.$$

Verificamos primero $\lambda_2(\kappa_1, e_1, u) < \lambda_2^{\max}$, que se cumple si $\epsilon\tilde{\omega}(e_1)\kappa_1 < \lambda_2^{\max}$ ya que $\alpha_1(e_1, u) \geq 0$. Usando (14a) y (23a) con las definiciones (24), tenemos que

$$(1 - q) \left(\epsilon^2 + \Delta_2\rho + \varsigma(\nu^2 - 1)(1 + \rho)^2 \right) < 2\varsigma(\nu - 1)(1 + \rho).$$

Siempre es posible hallar $\rho > 0$, $\epsilon > 0$ y $\nu > 1$ para satisfacer la desigualdad anterior, aún para $\frac{\varpi^{\min}}{\varpi_M} < q < 1$. Por otro lado, la condición $\lambda_2 > \lambda_2^{\min}$ está dada por

$$\left(\frac{1}{\epsilon\gamma} \right) |e_1|^{\frac{1}{2}} u < (1 - q) \left(\frac{1}{\gamma} + \rho^2 + (\nu^2 - 1)(1 + \rho)^2 \right) + 2 \left(1 - \rho + \sqrt{\nu^2(1 - \rho)^2 + 4(\nu^2 - 1)\rho} \right).$$

Para $q < 1$ siempre será posible escoger $\nu > 1$ tal que la desigualdad se satisfaga. En el caso ideal en que $g(y^*) = 0$, existe ϖ_{\max} y si $\varpi_M > \varpi_{\max}$ se cumple esta condición, por lo que entonces Q será positiva definida para toda $e_1 \in \mathcal{D}_{e_1}$. En cambio, cuando $g(y^*) \neq 0$, solo será posible encontrar parámetros para que $Q(t) > 0$ en todas partes excepto en una vecindad \mathcal{N}_{e_1} de $e_1 = 0$.

Más aún, recordando que

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -\kappa_1\varpi(e_1)\phi_1(e_1) + e_2 - e_1u \\ &= -\left(\kappa_1 |g \circ f(e_1)|^{\frac{1}{2}} + |e_1|u \right) \text{sign}(e_1) + e_2, \end{aligned}$$

si $\kappa_1 |g \circ f(e_1)|^{\frac{1}{2}} + |e_1|u > e_2$ para toda $e \in \mathcal{N}_e$, entonces $e_1(t)$ convergerá (en tiempo finito) a cero, aún cuando $e(t) \in \mathcal{N}_e$. La divergencia del origen cuando $e \in \mathcal{N}_e$ solo sucederá para e_2 y esto resulta útil si nuestro objetivo es regular $S(t) \rightarrow S^*$ y por lo tanto $y(t) \rightarrow y^*$.

4. ESTIMACIÓN DEL SIGNO

El controlador hasta ahora propuesto tiene la ventaja de no requerir explícitamente la medición de e_1 , para lo cual se requeriría conocer S^* y medir $S(t)$. Sin embargo, sí requiere conocer su signo a través de la señal $\sigma(t) = \text{sign}(S(t) - S^*)$. Necesitamos estimar esta señal, y lo haremos a través de una máquina de estados discreta, de forma similar a como ya se ha reportado (Moreno et al., 2006; Vargas et al., 2011).

Consideremos una implementación discretizada del controlador, con muestreos en $t = kT_s$. Abusando de la notación, sea σ_k la señal que estima $\text{sign}(e_1(t))$ en cada muestreo, \hat{y}_k^*

la señal que estima $y^*(t)$, etc. El controlador se implementa (integración tipo Euler) como

$$u_{k+1} = -k_1 |g(y_k, \hat{y}_k^*)|^{\frac{1}{2}} \sigma_k + \eta_k \quad (25a)$$

$$\eta_{k+1} = \eta_k - T_s k_2 \sigma_k \quad (25b)$$

donde $\sigma_k \in \{-1, +1\}$. El estimado \hat{y}_k^* se obtiene de los datos medidos en línea.

Antes de proponer el algoritmo de estimación del signo, vale la pena notar que el sistema controlado (12) es inestable en cuanto el signo es incorrecto (el análisis se puede hacer fácilmente en el plano de fase) y las trayectorias divergen del origen, con $|e_1(t)|$ monotónica creciente tras cruzar el eje $e_1 = 0$. Esto implica que podemos proponer una señal que verifique este crecimiento, manifestado en $|y^*(t) - y(t)|$, para cambiar el signo de σ_k . Consideremos primero la siguiente señal, que inicia en $\bar{y}_0 > 0$:

$$\bar{y}_k = \begin{cases} y_k & \text{si } y_k \geq \bar{y}_{k-1} \text{ ó } \sigma_k \neq \sigma_{k-1}, \\ (1 - a_1)\bar{y}_{k-1} & \text{si } y_k < \bar{y}_{k-1} \text{ y } \sigma_k = \sigma_{k-1}. \end{cases} \quad (26)$$

con $0 \leq a_1 \ll 1$ un factor de olvido para poder seguir señales $y^*(t)$ que podrían estar decreciendo (lentamente). Esta señal es esencialmente el máximo valor de y_k tras un cambio de signo de σ_k .

Usando \bar{y}_k , definimos otra señal con $\psi_0 = 0$:

$$\psi_k = \begin{cases} \psi_{k-1} + T_s(\bar{y}_k - y_k) & \text{si } \sigma_k = \sigma_{k-1} \text{ y } y_k < \bar{y}_{k-1} \\ 0 & \text{si } \sigma_k \neq \sigma_{k-1} \text{ ó } y_k \geq \bar{y}_{k-1}. \end{cases} \quad (27)$$

La señal ψ_k es el área bajo la curva $\bar{y}_k - y_k$ y se inicializa en cero cada vez que σ_k cambia de signo o se detecta un nuevo máximo. Es monotónica creciente y, estableciendo un umbral $\psi^* > 0$ para ψ_k , la usamos para determinar los cambios de signo de σ_k , iniciando con $\sigma_0 \in \{-1, +1\}$:

$$\sigma_k = \begin{cases} \sigma_{k-1} & \text{si } \psi_{k-1} < \psi^*, \\ -\sigma_{k-1} & \text{si } \psi_{k-1} \geq \psi^*. \end{cases} \quad (28)$$

No es práctico usar \bar{y}_k como un estimado de y^* , ya que tras un cambio de signo, si éste fue correcto, entonces \bar{y}_k seguirá a y_k , y por tanto $g(y_k, \bar{y}_k)$ será cercano a cero, lo cual llevaría a una mala estimación de $|e_1(t)|$. Sea entonces

$$\hat{y}_k^* = \begin{cases} (1 + p)y_k & \text{si } y_k \geq \hat{y}_{k-1}^* \text{ y } \sigma_k = \sigma_{k-1}, \\ (1 - a_2)\hat{y}_{k-1}^* & \text{si } y_k < \hat{y}_{k-1}^* \text{ y } \sigma_k = \sigma_{k-1}, \\ \bar{y}_{k-1} & \text{si } \sigma_k \neq \sigma_{k-1} \end{cases} \quad (29)$$

con $0 \leq p \ll 1$ y $0 \leq a_2 \ll 1$ otro factor de olvido. La señal \hat{y}_k^* es ligeramente mayor al máximo obtenido de y_k para también poder seguir una señal $y^*(t)$ creciente (lentamente). En cada cambio de signo se inicializa en el valor de \bar{y}_{k-1} antes del cambio de signo para evitar que \hat{y}_k^* se quede en un valor alto cuando $y^*(t)$ es decreciente.

5. EJEMPLO DE APLICACIÓN

Consideramos ahora el sistema (1) con $r_S(S)$ una función de Monod y $r_Y(S)$ una función de tipo Haldane, cuyo único máximo y^* ocurre en $S = S^*$. Podría representar la simplificación de un biorreactor productor de hidrógeno, donde S es la concentración de glucosa (en mg/L) y la salida es la tasa de producción del biogás (en mL/min). Otro sistema que podría representar es la degradación de un contaminante inhibitorio en un biorreactor de tipo *fed-batch* (Betancur et al., 2008), donde el parametro y^* es proporcional a la concentración de biomasa, que

efectivamente disminuye conforme el volumen en el reactor aumenta.

Las función $r_S(S)$ está definida por los parámetros μ_{\max} y K_S , mientras que $r_y(S)$ está definida por los parámetros y^* , S^* y β :

$$r_S(S) = \frac{\mu_{\max} S}{K_S + S}, \quad r_y(S) = \frac{y^* S^* S}{S^* S + \beta(S - S^*)^2}. \quad (30)$$

Para ilustrar el diseño del controlador aproximamos $f(e_1) = r_y(e_1 + S^*)$ con la función

$$y = g^{-1}(|e_1|) = \hat{y}^* - (c|e_1|)^m, \quad m > 0, \quad c \geq 0 \quad (31)$$

$$|e_1| = g(y, \hat{y}^*) = \frac{1}{c} |\hat{y}^* - y|^{\frac{1}{m}} \quad (32)$$

Si $\hat{y}^* \equiv y^*$, entonces $\varepsilon(0)$ es acotada y $\varepsilon(e_1)$ es continua, pero si $\hat{y}^* \neq y^*$, entonces $\varepsilon(e_1)$ será discontinua.

Para probar el controlador consideramos que *todos* los parámetros son variantes en el tiempo. Esta variación se hizo construyendo señales aleatorias de baja frecuencia³. Se muestran en la figura 1. El parámetro más sensible es $y^*(t)$, el cual es desconocido inicialmente y aumenta y disminuye a lo largo de la simulación. La concentración óptima de sustrato S^* y la del influente S_{in} también varían significativamente.

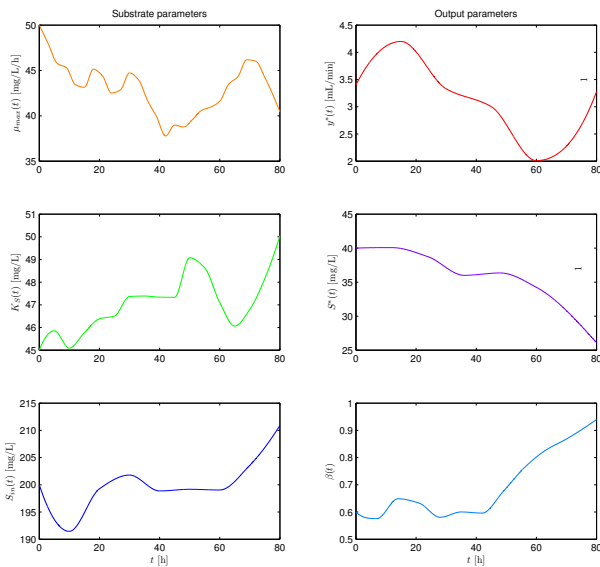


Figura 1. Parámetros variantes en el tiempo.

La simulación se hizo con $T_s = 0.01$ h y un tiempo de simulación de 80 h. Para el controlador se usaron:

$$\begin{aligned} k_1 = 0.025, \quad k_2 = 0.01, \quad c = 0.05, \quad m = 2, \\ a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad p = 0.005, \quad \psi^* = 0.08. \end{aligned}$$

Los resultados para una de la simulaciones se muestran en la figura 2. El resultado más importante se aprecia en la figura de la derecha-superior. La salida (azul) sigue al máximo teórico $y^*(t)$ (rojo), y se notan sus dos estimados: $\hat{y}^*(t)$ (magenta) y $\bar{y}(t)$ (verde). Nótese cómo cuando $y^*(t)$

² Esta es una forma alternativa de escribir la curva de Haldane, cuyos parámetros usuales son μ_{\max} , K_S and K_I .

³ Cada curva es una interpolación *spline* de una señal tipo *random-walk* con distribución uniforme de baja frecuencia.

disminuye, \hat{y}_k^* toma el valor de \bar{y}_{k-1} para lograr el seguimiento. El sustrato S (azul) se mantiene alrededor de S^* (rojo) y la entrada $u(t)$ (azul) es discontinua e incluso se observa algo de *chattering* de baja frecuencia. La señal σ_k (café) tiene un retraso con respecto a $\text{sign}(e_1(t))$ (azul).

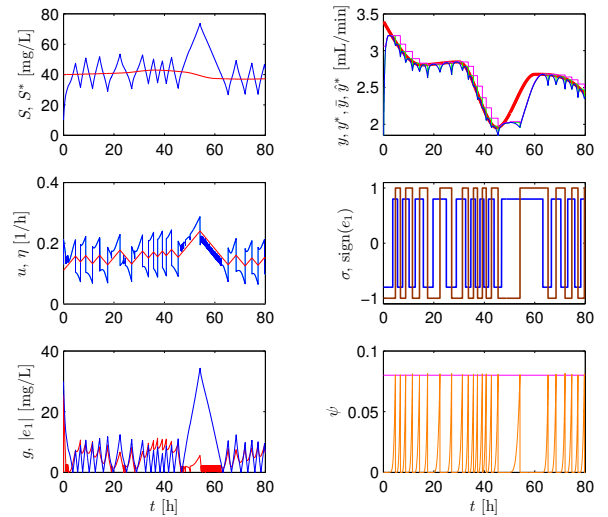


Figura 2. Resultados de una simulación.

Para probar el controlador bajo distintas condiciones, se hicieron 150 simulaciones con diferentes señales (aleatorias) para los parámetros. Para cada simulación se calculó el siguiente índice:

$$J_y = \frac{100\%}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{y_k^* - y_k}{y_k^*} \right)^2,$$

que representa la desviación porcentual promedio del valor óptimo. Su valor medio fue $\bar{J}_y = 1.91\%$ y su rango intercuartil fue $J_y \in [1.61, 2.00]\%$, lo cual indica un muy buen seguimiento del máximo, muy robusto ante variaciones en los parámetros. El tiempo medio entre cambios de signo tuvo un rango intercuartil de $[2.76, 3.81]$ h, lo que apunta hacia discontinuidades en el control que son factibles.

6. CONCLUSIONES

Se ha adaptado un controlador por modos deslizantes de segundo orden de tipo super-twisting para ser empleado como un controlador por retroalimentación de salida para maximizar la salida en un biorreactor. El controlador comprende una parte continua, para la cual se ha probado su convergencia práctica, y una parte discreta que sirve para estimar variables necesarias para su implementación. Los resultados de simulación avalan su robustez ante el desconocimiento de los parámetros. Resta validar el controlador propuesto experimentalmente.

REFERENCIAS

- Aceves-Lara, C., Latrille, E., and Steyer, J.P. (2010). Optimal control of hydrogen production in a continuous anaerobic fermentation bioreactor. *International Journal of Hydrogen Energy*, 35(19), 10710–10718.
- Antonelli, R., Harmand, J., Steyer, J.P., and Astolfi, A. (2003). Set-point regulation of an anaerobic digestion

- process with bounded output feedback. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 11(4), 495–504.
- Betancur, M., Moreno-Andrade, I., Moreno, J., Buitrón, G., and Dochain, D. (2008). Modeling for the optimal biodegradation of toxic wastewater in a discontinuous reactor. *Biproc. Biosyst. Eng.*, 31, 307–313.
- Cougnon, P., Dochain, D., Guay, M., and Perrier, M. (2011). On-line optimization of fedbatch reactors by adaptive extremum seeking control. *Journal of Process Control*, 21(10), 1526–1532.
- De Battista, H., Picó, J., Garelli, F., and Navarro, J. (2012). Reaction rate reconstruction from biomass concentration measurement in bioreactors using modified second-order sliding mode algorithms. *Bioprocess and Biosystems Engineering*, 35, 1615–1625.
- Dewasme, L., Srinivasan, B., Perrier, M., and Vande Wouwer, A. (2011). Extremum-seeking algorithm design for fed-batch cultures of microorganisms with overflow metabolism. *Journal of Process Control*, 21(7), 1092–1104.
- Dieulot, J.Y. (2012). A productivity signal feedback controller for continuous bioreactors. *Journal of Process Control*, 22, 1318–1324.
- Jiang, Y., Marang, L., Tamis, J., van Loosdrecht, M., Dijkman, H., and Kleerebezem, R. (2012). Waste to resource: Converting paper mill wastewater to bioplastic. *Water Research*, 46, 5517–5530.
- Kothari, R., Singh, D., Tyagi, V., and Tyagi, S. (2012). Fermentative hydrogen production — an alternative clean energy source. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 34(4), 4509–4516.
- Lara-Cisneros, G., Femat, R., and Dochain, D. (2014). An extremum seeking approach via variable-structure control for fed-batch bioreactors with uncertain growth rate. *Journal of Process Control*, 24, 663–671.
- Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3), 379–384.
- Liu, Z., Zhang, C., Lu, Y., Wu, X., Wang, L., Wang, L., Han, B., and Xing, X.H. (2013). States and challenges for high-value biohydrogen production from waste biomass by dark fermentation technology. *Bioresource Technology*, 135, 292–383.
- Moreno, J. (2011). *Sliding Modes after the First Decade of the 21st Century*, chapter Lyapunov approach for analysis and design of second order sliding mode algorithms, 113–150. Springer.
- Moreno, J., Betancur, M., Buitrón, G., and Moreno-Andrade, I. (2006). Event-driven time-optimal control for a class of discontinuous bioreactors. *Biotechnology and Bioengineering*, 94(4), 803–814.
- Moreno, J. (2013). *Advances in Sliding Mode Control — Concepts, Theory and Implementation*, chapter On discontinuous observers for second order systems: properties, analysis and design, 243–265. Springer-Verlag.
- Moreno, J., Álvarez, J., Rocha-Cózatl, E., and Diaz-Salgado, J. (2010). Super-twisting observer-based output feedback control of a class of continuous exothermic chemical reactors. In *Proceedings of the 2010 IFAC 9th International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems (DYCOPS 2010)*, 719–724. Leuven, Belgium.
- Méndez-Acosta, H., Palacios-Ruiz, B., Alcaraz-González, V., González-Alvarez, V., and García-Sandoval, J. (2010). A robust control scheme to improve the stability of anaerobic digestion processes. *Journal of Process Control*, 20(4), 375–383.
- Núñez, S., De Battista, H., Garelli, F., Vignoni, A., and Picó, J. (2013). Second-order sliding mode observer for multiple kinetic rates estimation in bioprocesses. *Control Engineering Practice*, 21, 1259–1265.
- Panagiotopoulos, I., Pasias, S., Bakker, R., de Vrije, T., Papayannakos, N., Claassen, P., and Koukios, E. (2013). Biodiesel and biohydrogen production from cotton-seed cake in a biorefinery concept. *Bioresource Technology*, 136, 78–86.
- Ren, N., Guo, W., Liu, B., Cao, G., and Ding, J. (2011). Biological hydrogen production by dark fermentation: Challenges and prospects towards scaled-up production. *Current Opinion on Biotechnology*, 22(3), 365–370.
- Vargas, A., Montaña, L., and Amaya, R. (2014a). Enhanced polyhydroxyalkanoate production from organic wastes via process control. *Bioresource Technology*, 156, 248–255.
- Vargas, A., Moreno, J., and Mendoza, I. (2011). Time-optimal output feedback controller for toxic wastewater treatment in a fed-batch bioreactor. In *18th IFAC World Congress*. Milan, Italy.
- Vargas, A., Vande Wouwer, A., and Moreno, J. (2014b). A weighted variable gain super-twisting observer for the estimation of kinetic rates in biological systems. *Journal of Process Control*, 25(6), 957–965.