

# Cota Última y Estabilización Global de un Sistema Caótico de Rössler Mediante Controles Retroalimentados Regulares\*

Julio Solís–Daun

*Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma  
Metropolitana-Iztapalapa, Col. Vicentina, 09340, México, D.F., México  
(e-mail: jesd@xanum.uam.mx).*

---

Resumen: En este trabajo hallamos primero una *cota última* para una ecuación de Rössler, la cual es conocida por su comportamiento caótico. Después, presentamos un método para la *estabilización asintótica global* de un sistema controlado basado en dicha ecuación de Rössler, mediante controles retroalimentados regulares. El método propuesto para el diseño de controles se basa en la teoría de las *funciones de Lyapunov de control* (CLF) debido a Artstein y Sontag.

**Palabras clave:** sistemas no-lineales, punto–disipatividad, estabilización global, función de Lyapunov de control, control de caos.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Un objetivo general de control reside en forzar un sistema dado a realizar un comportamiento deseado. Específicamente, estamos interesados en hacer un sistema de control *global y asintóticamente estable* (GAS) en el sentido de Lyapunov via controles retroalimentados. Como punto de partida para lograr esta meta, supondremos que el sistema correspondiente a lazo–abierto (control nulo) es Lagrange estable. Decimos que un sistema es *Lagrange estable* si todas sus soluciones están acotadas (vea Bacciotti & Rosier (2005)). La estabilidad de Lagrange es una propiedad global básica, aunque en muchos casos no es suficiente, y es usual que requiramos que cada solución converja a alguna parte, *e.g.* a un conjunto común. Entonces, la estabilidad de Lagrange se ve complementada si también sabemos que todas sus soluciones tienden a un conjunto específico: Un atractor global  $K$ . Las dos propiedades fundamentales de  $K$  son: (i) es invariante bajo evolución; y (ii) es un conjunto atractivo, en el sentido de que la distancia entre cualquier solución y el conjunto  $K$  se tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ .

El atractor global  $K$  contiene toda la dinámica “interesante” del sistema. Usualmente, un sistema puede tener múltiples atractores, y cada uno de ellos merece ser llamado el atractor respecto a las condiciones iniciales dentro de su propia cuenca de atracción. Así, el concepto de atractor global corresponde mas bien a un conjunto (en general no-conexo), que contiene tales conjuntos invariantes atractivos. Así, el *atractor global*  $K$  se puede definir como el máximo conjunto compacto invariante y atractivo. En particular,  $K$  contiene todas las posibles estructuras tales como puntos de equilibrio, ciclos–límites, atractores extraños, etcétera.

Decimos que un sistema dinámico es *punto–disipativo* (también llamado *últimamente acotado*) si y sólo si (ssi)

---

\* Este trabajo fue parcialmente financiado por el proyecto “Sistemas Dinámicos y Estabilización”, PROMEP, SEP México.

tiene un conjunto acotado hacia el cual todas las órbitas finalmente entran y permanecen. Esta noción fue acuñada por Levinson en 1944, cuando estudiaba una ecuación de van der Pol periódicamente forzada, y supuso al infinito como un punto inestable. En espacios de dimensión finita, la compacidad local del espacio implica que dicho sistema tenga un atractor global compacto (vea Hale (1988, 2006)). Así, el sistema de control estudiado en este trabajo pertenece a la clase de los sistemas afines que tienen dinámicas libres punto–disipativas (tienen atractores globales compactos para el control nulo).

En general, la descripción exacta del atractor global  $K$  puede ser difícil (o imposible) de obtener. En su lugar, si tenemos una sobreaproximación de él, dada por una *bola absorbente o cota última* (un conjunto positivamente invariante y atractivo)  $\mathcal{B}$ , puede ser suficiente para muchas aplicaciones. Sin embargo, es una tarea también técnicamente difícil. Los conceptos de atractor global y bola absorbente de un sistema sirven como herramientas importantes para el análisis de su comportamiento cualitativo, pues como ya antes mencionamos, si sabemos que un sistema tiene un atractor global, entonces éste no puede tener puntos de equilibrio, soluciones periódicas, soluciones cuasiperiódicas, o atractores caóticos fuera del atractor global. Es claro que esto simplifica el análisis de las propiedades del sistema. Al elegir una función de Lyapunov y aplicando criterios de estabilidad, uno puede obtener bolas absorbentes para los atractores globales de algunos sistemas. En el caso de los sistemas caóticos, esta propiedad de disipatividad ha sido investigada por muchos autores. Por ejemplo, uno de los primeros resultados sobre bolas absorbentes (elipsoidales) para la ecuación de Lorenz fue dado en (Sparrow (1982), Apéndice C, p. 196–198), con lo que probó que esta ecuación es punto–disipativa.

Recientemente, el control de caos de sistemas caóticos se ha convertido en un tema de investigación muy activo. Posterior a trabajo pionero de control de caos introducido en Ott et al. (1990), han surgido muchos enfoques

para controlar sistemas caóticos (vea *e.g.* Andrievskii & Fradkov (2003, 2004) y sus referencias). La existencia de un atractor global para muchos sistemas caóticos (*e.g.* Lorenz, Chen, Chua suave), implica que éstos son de hecho sistemas punto–disipativos.

En este trabajo hallamos primero una bola absorbente para una ecuación de Rössler, la cual es conocida por su comportamiento caótico. Después, presentamos un método para que un sistema controlado basado en dicha ecuación de Rössler sea GAS, usando controles retroalimentados regulares. El método usado está basado en los trabajos Solís–Daun (2013a,b, 2014), dentro del marco de las *funciones de Lyapunov de control* (CLF) debido a Artstein y Sontag.

## 2. CONSTRUCCIÓN DE UNA COTA ÚLTIMA PARA LA ECUACIÓN DE RÖSSLER

En virtud de que el teorema de Poincaré–Bendixson excluye la existencia de caos en dimensión 2, entonces la dimensión mínima para que se presente caos es 3. Basado en esto, durante la década de 1970 Rössler propuso una serie de sistemas prototipo de ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios fase de dimensión 3 con el mínimo de ingredientes para obtener caos en sistemas continuos. Una de las famosas ecuaciones introducida en Rössler (1979) es su segunda ecuación,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - x_1 x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 + x_1^2, \\ \dot{x}_3 &= \mu(\nu x_1 - x_3), \end{aligned} \quad (1)$$

con parámetros  $\alpha, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ , la cual ha sido estudiada en el contexto de atractores caóticos porque reproduce tanto el caos de Lorenz como otros tipos de comportamientos caóticos, vea la Figura 1.

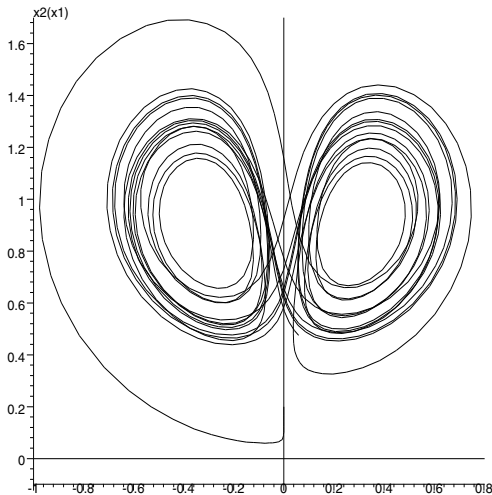


Figura 1. Caos del tipo *espiral-mas-silla invertida* (caos de Lorenz) de la ecuación de Rössler (1), proyectado en el plano  $x_1 x_2$ . Parámetros:  $\alpha = 0.1$ ,  $\mu = 0.08$ ,  $\nu = 0.125$ . Cond. inicial:  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0, 0.2, 10^{-6})$ .

Además, en Rössler (1979), donde el sistema (1) fue llamado “Equation 3”, viene escrito que:

“Both the Lorenz equation and Equation 3 produce globally attracting chaotic regimes.”

No obstante, hasta donde sabemos, no hay ninguna prueba de esta afirmación para la ecuación de Rössler (1) en la literatura sobre el tema (*e.g.* vea el trabajo reciente Zhang et al. (2014), y sus referencias). Incluso, esta frase pasó desapercibida en Liao & Yu (2006), al escribir: “*people do not know whether the Rössler system is globally attractive ... Some global synchronization results have been obtained on the assumption that the Rössler system is globally bounded. However, the reasoning on the assumption has not been verified*”, haciendo alusión a la familia de los (6 tipos de) sistemas caóticos de Rössler, de los que (1) es el tercero.

A continuación, mostraremos que el sistema de Rössler (1) es *punto–disipativo*, construyéndole una *cota última* explícita, definida como un conjunto de nivel de una función de Lyapunov  $V(x)$ , y que contempla todos los casos de los parámetros  $(\alpha, \mu, \nu)$  estudiados en este artículo, incluyendo los que dan lugar a comportamientos caóticos.

Tomemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x} = f(x), \quad (2)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ , y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continuo. Dada una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , denotamos

$$a(x) := L_f V(x) = \nabla V(x) \cdot f(x), \quad (3)$$

la derivada de Lie de  $V(x)$  con respecto al campo vectorial  $f(x)$ . Es claro que la derivada respecto al tiempo de  $V(x)$  a lo largo de las soluciones de (2) satisface  $dV(x)/dt = a(x)$ . Con base en  $a(x)$  definimos  $\mathcal{N}_a := \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) = 0\}$ ,  $\mathcal{A}_- := \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) < 0\}$  y  $\mathcal{A}_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) > 0\}$ . Notemos que  $\mathcal{N}_a \cup \mathcal{A}_- \cup \mathcal{A}_+ = \mathbb{R}^n$ .

Sean  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  una vecindad abierta del 0, y su *complemento abierto*  $\text{int}N^c := \mathbb{R}^n \setminus \bar{N}$  ( $\bar{N}$  es la *cerradura* de  $N$ ).

Recordemos que una función  $V : N \rightarrow \mathbb{R}$  se dice:

- (i) *definida positiva* ssi  $V(0) = 0$ , y  $V(x) > 0$  para  $x \neq 0$ ;
- (ii) *propia* ssi  $V^{-1}[0, c] = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq V(x) \leq c\}$  es compacto para cualquier  $c \geq 0$ . Esta noción es equivalente a la de *radialmente no acotada*:  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ .

**Definición 1.** Una *función de Lyapunov estricta para valores-grandes*  $V : \text{int}N^c \rightarrow \mathbb{R}$  para el sistema (2) es una función de clase  $\mathcal{C}^\kappa(\text{int}N^c)$  ( $\kappa \geq 1$ ), tal que  $\forall x \in \text{int}N^c$  satisface (ii) y su derivada respecto al tiempo a lo largo de las soluciones de (2) satisface  $dV(x)/dt = a(x) < 0$ .

**Definición 2.** Una *función de Lyapunov estricta global*  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  para (2) es una función de clase  $\mathcal{C}^\kappa(\mathbb{R}^n)$  ( $\kappa \geq 1$ ), tal que  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  satisface (i) y (ii), y  $a(x) < 0$ ,  $x \neq 0$ .

**Definición 3.**  $K$  es un *atractor global* del sistema (2) ssi  $K$  es compacto, estable y atrae todos los puntos de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 4.** Un sistema (2) es *punto–disipativo* ssi existe un conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$  que atrae a toda  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Sin embargo, si no tenemos una descripción exacta de  $K$ , quisiéramos tener un estimado de él. Una *bola absorbente* o *cota última* de (2) es un conjunto  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  positivamente invariante y acotado tal que toda solución de (2) que inicie en  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}$  entra en su frontera  $\partial\mathcal{B}$  en tiempo finito.

En el presente contexto, el result resultado principal es:

**Teorema 1.** Hale (2006) El sistema (2) es *punto–disipativo* ssi existe el máximo atractor global  $K$ , y también ssi existe una bola absorbente  $\mathcal{B}$ . Además,  $K$  es un conjunto conexo.

Retornando al ecuación (1), tenemos que Rössler la concibió para entender el funcionamiento de la ecuación de Lorenz y otros tipos de comportamiento caótico. Este sistema tiene tres puntos de equilibrio:  $\bar{x}^0 = (0, 0, 0)$  y  $\bar{x}^{1,2} = (\pm\theta, 1 - \nu, \pm\nu\theta)$ , con  $\theta = \sqrt{\alpha(1 - \nu)}$  para  $\alpha > 0$  y  $0 < \nu < 1$ , donde el parámetro  $\nu$  lo introdujo para tener una componente *asimétrica* en el modelo. Notemos que si  $\nu \rightarrow 1$ , entonces  $\bar{x}^{1,2} \rightarrow \bar{x}^0$ . Además, linealizando tenemos que éstos son puntos hiperbólicos, luego el Teorema de Hartman-Grobman nos garantiza que  $\bar{x}^0$  es una silla y  $\bar{x}^{1,2}$  son focos estables, para los valores  $(\alpha, \mu, \nu)$  de la Figura 1.

Ahora, proponemos la siguiente función suave

$$V(x) = \frac{1}{2} \left( x_1^2 + \left( x_2 - \frac{1}{\nu} \right)^2 + \frac{1}{\mu\nu} x_3^2 \right) \quad (4)$$

como nuestra candidata a función de Lyapunov estricta para-valoros-grandes para (1). Notemos que ésta es no-negativa, y sólo se anula en  $V_o = \{(0, 1/\nu, 0)\}$  (su mínimo global), luego no es definida positiva. Además, su derivada con respecto al tiempo a lo largo de las soluciones de la ecuación (1) es

$$a(x) = \left( \frac{1}{\nu} - 1 \right) x_1^2 - \alpha \left( x_2 - \frac{1}{2\nu} \right)^2 - \frac{x_3^2}{\nu} + \frac{\alpha}{4\nu^2} \geq 0 \quad (5)$$

ssi  $x \in \mathcal{D}$ , donde  $\mathcal{D}$  es el dominio elipsoidal (compacto) con centro en  $(0, 1/2\nu, 0)$  dado por

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \left( 1 - \frac{1}{\nu} \right) x_1^2 + \alpha \left( x_2 - \frac{1}{2\nu} \right)^2 + \frac{x_3^2}{\nu} \leq \frac{\alpha}{4\nu^2} \right\} \quad (6)$$

siempre que  $\alpha > 0$  y  $0 < \nu < 1$ , dentro del cual  $dV(x)/dt \geq 0$ , i.e.  $\mathcal{D} = \mathcal{N}_a \cup \mathcal{A}_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : a(x) = L_f V(x) \geq 0\}$ , y es tal que  $\partial\mathcal{D} = \mathcal{N}_a$ . Además, los tres puntos de equilibrio  $\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2$  del sistema (1) siempre se hallan en  $\partial\mathcal{D}$ , para cualesquiera valores de los parámetros. Notemos que aunque  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}$ , tengamos que  $dV(x)/dt < 0$ , este conjunto no es positivamente invariante, por lo que no sirve para "atrapar" al atractor global  $K$  de (1), vea Figura 2.

Por tanto, construiremos una bola absorbente (elipsoidal) explícita  $\mathcal{B}$  para la ecuación (1), definida como un conjunto de nivel de la función de Lyapunov  $V(x)$ . En efecto, sea  $d = \max_{x \in \mathcal{D}} V(x)$ . Con base en la geometría del problema tenemos que  $d$  existe y se halla en  $\mathcal{N}_a$ , i.e. en un punto para el cual  $x_1 = \lambda(1/\nu - 1)x_1, x_2 - 1/\nu = \lambda\alpha(x_2 - 1/2\nu)$  y  $x_3/\mu\nu = \lambda x_3/\nu$ , para  $\lambda$  un multiplicador de Lagrange.

Las posibles soluciones son:

(i)  $\lambda = 1/\mu, x_1 = 0, x_2 = (2\mu - \alpha)/(2\nu(\mu - \alpha)), y x_3^2 = \alpha^2(\alpha - 2\mu)/(4\nu(\mu - \alpha)^2)$ , siempre que  $\alpha \geq 2\mu > 0$ . Entonces,  $V = \alpha^2/(8\nu^2\mu(\alpha - \mu))$ , si  $\alpha > 2\mu$ ; o  $1/2\nu^2$ , si  $\alpha = 2\mu$  (luego  $x = (0, 0, 0)$ ).

(ii)  $\lambda = \nu/(1 - \nu), x_3 = 0, x_2 = (2 - 2\nu - \alpha\nu)/(2\nu(1 - \nu - \alpha\nu))$ , y  $x_1^2 = \alpha^2(\alpha\nu + 2\nu - 2)/(4(1 - \nu)(1 - \nu - \alpha\nu)^2)$ , siempre que  $\alpha\nu + 2\nu - 2 \geq 0$ . Entonces,  $V = \alpha^2/(8(1 - \nu)(\alpha\nu + \nu - 1))$ , si  $\alpha\nu + 2\nu - 2 > 0$ ; o  $1/2\nu^2$ , si  $\alpha\nu + 2\nu - 2 = 0$  (luego  $x = (0, 0, 0)$ ). En cualquier caso, tenemos que  $\alpha\nu + \nu - 1 \geq 1 - \nu > 0$ .

(iii)  $x_1 = x_3 = 0$ , implican que  $x_2 = 1/\nu$  o  $x_2 = 0$ , lo cual nos da  $V = 0$  o  $V = 1/2\nu^2$ , respectivamente.

En resumen, para  $\alpha, \mu > 0$  y  $0 < \nu < 1$ , el máximo  $d$  de  $V(x)$  en  $\mathcal{D}$  está dado por:

$$d = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{8\nu^2\mu(\alpha - \mu)}, & \text{si } \alpha > 2\mu, \\ \frac{\alpha^2}{8(1 - \nu)(\alpha\nu + \nu - 1)}, & \text{si } \alpha\nu + 2\nu - 2 > 0, \\ \frac{1}{2\nu^2}, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (7)$$

Observemos que los valores de los parámetros  $(\alpha, \mu, \nu) = (0.1, 0.08, 0.125)$  propuestos en Rössler (1979) para generar caos, están incluidos en el caso para el que  $d = 1/2\nu^2$ .

Consecuentemente, para cualquier caso de los valores de los parámetros ( $\alpha > 0, \mu > 0$  y  $0 < \nu < 1$ ), el conjunto compacto  $\mathcal{B} := V^{-1}[0, d + \epsilon]$  es una *bola absorbente* para el sistema (1), para algún  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño y finito. Notemos que si hacemos  $\epsilon = 0$ , todas las trayectorias entrarán finalmente en  $V^{-1}[0, d]$ , pero algunas podrían ser asintóticas a él. Por ejemplo, si elegimos los valores de los parámetros que dan lugar a  $d = 1/2\nu^2$ , el punto de equilibrio  $(0, 0, 0)$  siempre se halla en la frontera de  $\mathcal{D} \cap V^{-1}[0, d]$ , por lo que las trayectorias que inician fuera de  $V^{-1}[0, d]$  y son atraídas por el origen (que es un punto silla) les tomará un tiempo infinito en hacerlo.

La Figura 2 muestra una bola absorbente (elipsoidal)  $\mathcal{B}$  que sobreaproxima al elipsoide  $\mathcal{D} = \mathcal{N}_a \cup \mathcal{A}_+$  dado por (6) y al atractor global  $K$  (dado por el comportamiento caótico de la Figura 1) para la ecuación de Rössler (1), proyectados en el plano  $x_1x_2$ .

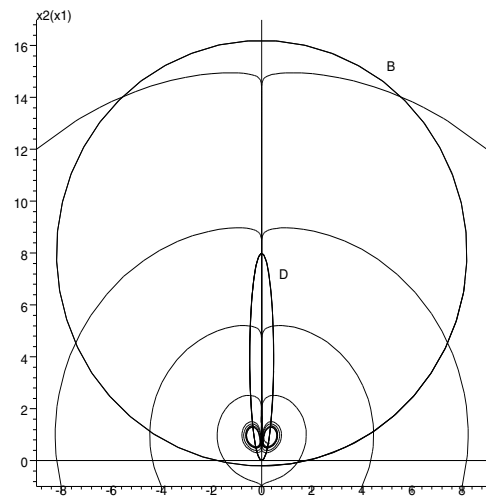


Figura 2. Bola absorbente  $\mathcal{B}$  que contiene al elipsoide  $\mathcal{D}$  y al atractor global  $K$  (caos de la Figura 1) para la ecuación de Rössler (1), proyectados en el plano  $x_1x_2$ . Parámetros:  $\alpha = 0.1, \mu = 0.08, \nu = 0.125$ .

### 3. ESTABILIZACIÓN CLF GLOBAL DE UN SISTEMA CONTROLADO DE RÖSSLER

Consideremos el sistema continuo afín de control

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^m u_j g_j(x), \quad (8)$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$  –espacio fase. El conjunto de valores de control (CVS) es un convexo  $U \subseteq \mathbb{R}^m$ , y  $u = (u_1, \dots, u_m)^\top$ , con  $^\top$

la transposición. Supongamos que  $f, g_j$ , para  $j = 1, \dots, m$ , son campos vectoriales regulares en  $\mathbb{R}^n$ . Aquí, la palabra regular significa continuo, de clase  $C^s$  ( $s \geq 1$ ), etcétera.

Es bien sabido, usando los clásicos resultados directos y recíprocos de Lyapunov (debidos principalmente a Massera y Kurzweil), que el sistema (2) es GAS ssi existe una función de Lyapunov estricta global. Un resultado análogo (directo y recíproco) de estabilización para sistemas afines (8), mediante la noción de *función de Lyapunov de control* (CLF), está dado por el denominado Teorema de Artstein (1983): Dado un sistema afín de control regular (8) y un CVS (*convexo*)  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , el teorema establece, *grosso modo*, que *existe una CLF suave  $V(x)$  ssi existe un control retroalimentado  $u(x)$  continuo (excepto posiblemente en 0), que toma valores en  $U$ , y que vuelve al sistema (8) GAS. Además, los controles pueden ser continuos en  $x = 0$  bajo la hipótesis adicional de la propiedad de control pequeño (SCP) introducida en Artstein (1983). Sin embargo, aunque interesante, este resultado no puede ser usado tal como está para la síntesis de controles, porque su prueba no es constructiva (usa particiones de la unidad).*

No obstante, debido a que el Teorema de Artstein vale para CVS generales (*convexos*), y basado en su propio éxito diseñando fórmulas de control para CVS específicos (vea Sontag (1989); Malisoff & Sontag (2000)), Sontag (1998) propuso el siguiente *problema abierto importante*:

“Find universal formulas for CLF stabilization, for general (*convex*) control-value sets  $U$ ”,

*i.e.* resolver el problema de síntesis para estabilizadores retroalimentados globales casi suaves (suaves en  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y continuos en 0) valuados en cualquier CVS (*convexo*), si conocemos una CLF apropiada.

Motivados por este *problema abierto*, hemos abordado el problema de diseño de control implicado por el Teorema de Artstein, relajando la condición de regularidad como sigue: Dada una CLF  $V(x)$  [para el sistema afín de control (8) y un CVS  $U$  con  $0 \in U$ ],

“¿podemos hallar formulas explícitas para controles regulares valuados en  $U$ , que vuelvan al sistema (8) GAS?”

De hecho, hemos resuelto este problema de estabilización CLF global de sistemas afines: En Solís–Daun (2013a), con respecto a la clase importante de todos los CVS compactos  $U$  con  $0 \in \text{int}U$  (en un sentido genérico); mientras que en Solís–Daun (2014), para CVS cerrados  $U$  (posiblemente no acotados) con  $0 \in \text{int}U$  (en forma aproximada).

Dada una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ , denotamos

$$a(x) := L_f V(x) \quad \& \quad b(x) := (b_1(x), \dots, b_m(x)), \quad (9)$$

con  $b_j(x) := -L_{g_j} V(x)$ , para  $j = 1, 2, \dots, m$

la derivadas de Lie de  $V(x)$  con respecto a los campos vectoriales que definen al sistema (8). Entonces, la derivada respecto al tiempo de  $V(x)$  a lo largo de las trayectorias del sistema (8) es  $dV(x(t))/dt = a(x(t)) - b(x(t)) \cdot u(t)$ .

**Definición 5.** Una *función de Lyapunov de control* (CLF) [para el sistema (8) con controles no acotados valuados en  $U = \mathbb{R}^m$ ] es una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de clase  $C^\kappa(\mathbb{R}^n)$  ( $\kappa \geq 1$ ), que es *definida positiva y propia*, y tal que

$$\forall x \neq 0, b(x) = 0 \Rightarrow a(x) < 0. \quad (10)$$

Con base en Solís–Daun (2014), contamos con el siguiente resultado de síntesis de controles retroalimentados regulares y no acotados basados en CLFs.

**Teorema 2.** Solís–Daun (2014). Supongamos que  $V(x)$  es una CLF [para el sistema (8) con CVS  $U = \mathbb{R}^m$ ] que satisface la SCP, y  $a(x), b(x)$  y  $h(\xi)$  son suaves, con  $h(\xi)$  plana<sup>1</sup> en  $\xi = 0$ , tal que si  $\xi > 0$  entonces  $h(\xi) > 0$ . Definimos

$$u(x) := \rho(x)\bar{w}(x), \quad (11)$$

donde  $\rho(x) = \varrho(a(x), \beta(x))$ , con

$$\varrho(a, \beta) := \begin{cases} \frac{\frac{1}{2}(a + |a|) + h(\beta)\beta}{\beta}, & \text{si } \beta > 0, \\ 0, & \text{si } \beta = 0, \end{cases} \quad (12)$$

$\beta(x) = \varsigma(b(x))$ ,  $\bar{w}(x) = (\nabla_\varsigma(b))^\top \circ b(x)$ , y  $\varsigma$  es cualquier función sublineal de clase  $C^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$  y definida positiva. Entonces,  $u(x)$  es  $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus (\partial\mathcal{N}_a \cup \{0\}))$ , continua en  $\partial\mathcal{N}_a \cup \{0\}$ , y tal que el sistema a lazo-cerrado (8)-(11) es GAS.

Consideremos el siguiente sistema controlado basado en la ecuación de Rössler (1),

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - x_1 x_2 - x_3 + u, \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 + x_1^2, \\ \dot{x}_3 &= \mu(\nu x_1 - x_3), \end{aligned} \quad (13)$$

con parámetro de control  $u \in U \subseteq \mathbb{R}$ .

A pesar de que contamos con la función de Lyapunov  $V(x)$  definida en (4), ésta tiene el inconveniente de que su mínimo global  $V_0$  no coincide con ninguno de los puntos de equilibrio  $\bar{x}^i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , del sistema a lazoabierto (1). Por tanto, si queremos estabilizar globalmente uno de dichos puntos para el sistema controlado de Rössler (13), tenemos que proponer otra función de Lyapunov.

Para simplificar las fórmulas, supongamos que queremos estabilizar el punto de equilibrio  $\bar{x}^0 = (0, 0, 0)$  del sistema a lazoabierto (13) (o sea, la ecuación de Rössler (1)). Así, proponemos como candidata a CLF para el sistema afín (13) la siguiente función suave, definida positiva y propia

$$V_0(x) = \frac{1}{2} \left( x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{\mu\nu} x_3^2 \right). \quad (14)$$

Entonces, la derivada respecto al tiempo de  $V_0(x)$  a lo largo de las soluciones la ecuación de Rössler (1) es

$$\frac{dV_0(x)}{dt} = a_0(x) = x_1^2 - \alpha x_2^2 - \frac{1}{\nu} x_3^2. \quad (15)$$

En este caso, de (9) y (13) obtenemos  $b_0(x) = -L_g V_0(x) = -x_1$ . Así,  $\forall x \neq 0$ , si  $b_0(x) = 0$ , entonces  $a_0(0, x_2, x_3) = -\alpha x_2^2 - x_3^2/\nu < 0$ . De donde,  $V_0(x)$  es una CLF para el sistema (13). Sin embargo, si  $x_2 = x_3 = 0$  (el eje  $x_1$ ), entonces  $a_0(x_1, 0, 0) = x_1^2 \geq 0$ . Luego,  $\mathcal{N}_{a_0} \cup \mathcal{A}_+^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : a_0(x) \geq 0\}$  es no acotado. Por tanto,  $V_0(x)$  sí es una CLF para el sistema (13), pero con respecto al CVS  $U = \mathbb{R}$ . Además, un cálculo directo muestra que satisface la SCP.

Ahora, apliquemos el Teorema 2 al sistema de Rössler (13).

En vista que para el sistema de Rössler (13) el control es escalar, proponemos la función  $\varsigma(b_0) = |b_0|$ . De aquí que  $\bar{w}(x) = \text{sign } b_0(x) = -\text{sign } x_1$ . Así, de (11)-(12) tenemos la siguiente fórmula de control:  $u(x) = -\rho(x) \text{sign } x_1$ , donde

<sup>1</sup> Recordemos que una función  $h$  es plana en un punto  $\xi^*$  ssi tiene derivadas de todos órdenes en  $\xi^*$ , y  $\forall k \geq 0$ ,  $d^k h(\xi^*)/d\xi^k = 0$ .



$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{(a_0(x) + |a_0(x)|) + h(|x_1|)|x_1|}{|x_1|}, & \text{si } |x_1| > 0, \\ 0, & \text{si } x_1 = 0, \end{cases} \quad (16)$$

con  $a_0(x)$  dada por (15), y para  $h(\xi)$  proponemos

$$h(\xi) = \begin{cases} e^{-1/\xi}, & \text{si } \xi > 0, \\ 0, & \text{si } \xi \leq 0, \end{cases} \quad (17)$$

la cual es  $C^\infty(\mathbb{R})$ , positiva para  $\xi > 0$ , y plana en  $\xi = 0$ .

La Figura 3 muestra las gráficas con respecto al tiempo del control retroalimentado  $u(x)$  dado por (16) y la correspondiente trayectoria a lazo-cerrado para el sistema controlado de Rössler (13).

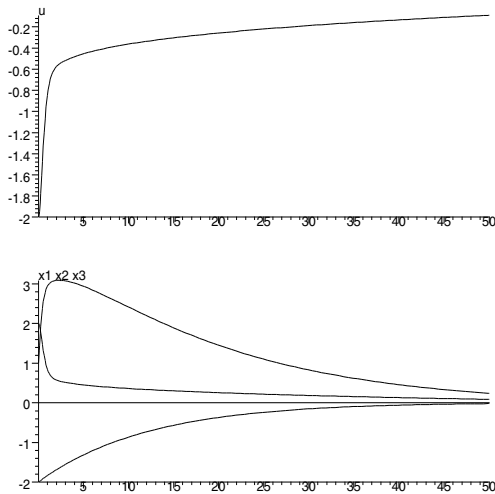


Figura 3. Control retroalimentado  $u(x)$  (arriba) y su correspondiente trayectoria a lazo-cerrado (abajo) para la condición inicial  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (2, 1, -2)$ .

#### 4. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo hallamos primero una cota última para una ecuación de Rössler, la cual es bien conocida por su comportamiento caótico. Por tanto, hemos probado que es un sistema punto-disipativo. Hasta donde sabemos, este resultado es nuevo en la literatura.

Después, presentamos un método para la estabilización CLF global de un sistema controlado basado en dicha ecuación de Rössler, usando controles retroalimentados regulares y no acotados. El método empleado está basado en el enfoque de las *funciones de Lyapunov de control* (CLF), introducido por Artstein y Sontag, que desarrollamos en Solís-Daun (2014) para CVS no acotados.

Si consideramos un sistema afín (8) que a lazoabierto es punto-disipativo y cuya función de Lyapunov estricta para-valor-es-grandes  $V(x)$  sea tal que su mínimo global  $x^*$  coincida con un punto de equilibrio  $\bar{x}$  de (2),  $dx/dt = f(x)$ , que queremos estabilizar, entonces podemos proponer  $V(x)$  como su candidata a CLF. Este es el caso que abordamos en Solís-Daun (2013b), obteniendo la síntesis de controles regulares y *acotados* que hacen que cualquier sistema afín con dinámicas libres punto-disipativas sea GAS, bajo ciertas hipótesis. Este método lo ejemplificamos con un sistema suave (cúbico) de Chua.

Sin embargo, en caso contrario,  $V(x)$  tendría que ser “deformada” en una nueva función de Lyapunov  $W(x)$ , tan regular como se quiera, cuyo mínimo global  $x^* = \bar{x}$ , y tal que  $W(x)$  coincida con  $V(x)$  en  $\mathbb{R}^n \setminus \text{int}V^{-1}[0, c]$ , para alguna  $c > 0$ . Este es un problema que trataremos en el futuro, el cual nos permitirá abordar la estabilización global de sistemas afines de control con dinámicas libres punto-disipativas con respecto a “cualquier” punto usando controles retroalimentados regulares y *acotados*.

#### REFERENCIAS

- Andrievskii, B. & Fradkov, A. (2003). Control of Chaos: Methods and Applications. I. Methods. *Autom. & Remote Control* **64**, 673–713.
- Andrievskii, B. & Fradkov, A. (2004). Control of Chaos: Methods and Applications. II. Applications. *Autom. & Remote Control* **65**, 505–533.
- Artstein, Z. (1983). Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications* **7**, 1163–1173.
- Bacciotti, A. & Rosier, L. (2005). *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. 2nd Ed. Springer. Berlin.
- Hale, J. K. (1988). *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*. Providence RI: Math. Surveys & Monographs **25**, Amer. Math. Soc.
- Hale, J. K. (2006). Dissipation and compact attractors. *J. Dynamics & Differential Equations* **18**, 485–523.
- Liao, X. & Yu, P. (2006). Study of globally exponential synchronization for the family of Rössler chaotic systems. *Int. J. Bifurcation & Chaos* **16**, 2395–2406.
- Malisoff, M. & Sontag, E. (2000). Universal formulas for feedback stabilization with respect to Minkowski balls. *Syst. & Control Lett.* **40**, 247–260.
- Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, J. (1990). Controlling chaos. *Physics Review Lett.* **64**, 1196–1199.
- Rössler, O. (1979). Continuous chaos - four prototype equations. *Annals N.Y. Acad. Sciences* **316**, 376–392.
- Solís-Daun, J. (2013a). Global CLF stabilization of nonlinear systems. Part I: A geometric approach – compact strictly convex cvs. *SIAM J. Control Optim.* **51**, 2152–2175.
- Solís-Daun, J. (2013b). Global CLF stabilization of systems with point-dissipative free dynamics via admissible controls: Chaos control of a Chua’s system. *Int. J. Bifurcation & Chaos* **23**.  
<http://dx.doi.org/10.1142/S0218127413501769>
- Solís-Daun, J. (2014). Global CLF stabilization of nonlinear systems. Part II: An approximation approach – closed cvs. *SIAM J. Control Optim.*, sometido.
- Sontag, E. (1989). A “universal” construction of Artstein’s theorem on nonlinear stabilization. *Syst. Control Lett.* **13**, 117–123.
- Sontag, E. (1998). Control-Lyapunov functions. V. Blondel, E. Sontag, M. Vidyasagar, and J. Willems, Eds., *Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory*. Springer. New York. 211–216.
- Sparrow, C. (1982). *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. Applied Math. Sci. **41**, Springer. N.Y.
- Zhang, F., Zhang, G., Lin, D. & Sun, X.-K. (2014). Global attractive sets of a novel bounded chaotic system. *Neural Comput. & Applic.* <http://dx.doi.org/10.1007/s00521-014-1601-5>