

Problema de Consenso en Redes de Agentes de Primer Orden con Retardo en la Comunicación

J. Heras-Godínez * M. Velasco-Villa * J. A. Vásquez **

* CINVESTAV-IPN, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica, Av. IPN, No. 2508, Col. San Pedro Zacatenco, 07300

México D.F., México. e-mail: {jheras, velasco}@cinvestav.mx

** Universidad Veracruzana, Facultad de Ingeniería, Boca del Río, Veracruz, México. e-mail: alejanvasquez@uv.mx

Resumen. En este trabajo se presenta el estudio del problema de consenso en redes de agentes de primer orden considerando que en la comunicación entre los nodos existe un retardo de tiempo asociado. Estudios reportados anteriormente muestran que el retardo máximo en la comunicación que puede soportar una red depende de la topología de la misma. En este documento se propone un esquema de control basado en la predicción de estados futuros que permite aumentar el retardo de tiempo en la comunicación, lo que significa, que no depende de la topología de la red. Se presenta el desarrollo teórico del problema y se realizan simulaciones numéricas que muestran la efectividad de la solución propuesta.

Palabras Clave: Problema de consenso, redes de agentes, predicción-observación, tiempo de retardo.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el estudio de sistemas multiagentes ha tenido una creciente atención dentro de la comunidad de control. Los sistemas multiagentes en general, han aparecido en muchas aplicaciones de la vida cotidiana o de la industria, por ejemplo, en la formación de vuelo de vehículos aéreos no tripulados (Ren and Beard [2004]) (UAVs por sus siglas en inglés), grupos de satélites (Russell Carpenter [2002]), control de formación de vehículos (Fax and Murray [2004], Olfati-Saber and Murray [2002] y Vidal et al. [2003]). Algunas aplicaciones adicionales como redes de sensores distribuidos, sistemas automáticos de control vehicular o control de congestión en redes de comunicación pueden encontrarse en (Ren et al. [2005], Ren and Beard [2007]).

Un problema importante que aparece con frecuencia en el contexto de coordinación de sistemas multiagentes es el convenio del grupo o *problema de consenso* (Ren et al. [2007]). El objetivo principal consiste en controlar y coordinar un grupo de agentes conectados a través de una red de comunicación. Este problema tiene una larga historia en el campo de la computación, particularmente en la teoría de autómatas y en la computación distribuida. En muchas aplicaciones que se relacionan con sistemas multiagentes, los elementos del grupo necesitan estar en común acuerdo con respecto a algún parámetro de interés, como una posición específica, la velocidad de cada agente, una formación de interés entre otras opciones.

En Fax and Murray [2004] se muestra la importancia del Laplaciano de la red, una matriz bien conocida en la teoría de grafos (Godsil and Royle [2001]), como parte de la solución del problema de consenso cuando se considera un grupo de vehículos comunicados bajo condiciones ideales y donde las dinámicas de los agentes son lineales. Este problema también ha sido abordado por diferentes autores (Olfati-Saber and Murray [2004], Ren et al. [2007], Bli-

man and Ferrari-Trecate [2005], Namerikawa and Yoshioka [2008], Wang and Uchida [2013], Qin et al. [2009], Ren and Cao [2011]) buscando garantizar que los agentes alcancen asintóticamente un consenso, es decir, que estén de acuerdo en un valor común de una cantidad de interés.

Un reto adicional que se presenta dentro de la coordinación de agentes, implica alcanzar un consenso aún ante la presencia de retardos de tiempo en la comunicación entre los agentes. Estos retardos que se encuentran presentes frecuentemente en problemas de coordinación de agentes, pueden originarse en fenómenos como el transporte de material, lazos de reciclaje o bien en la aproximación de sistemas de alto orden por medio de sistemas de orden reducido con retardo de tiempo (Skogestad [2003]). Diversas soluciones han sido propuestas para tratar tiempos de retardo en procesos estables. En el caso lineal, cuando el tiempo de retardo afecta a la señal de entrada (o de salida) del sistema, un enfoque común es eliminar el efecto de la señal de retraso mediante una adecuada retroalimentación (Smith [1957], Palmor [1996]).

Hasta el momento, pocos han sido los trabajos que consideran el problema de consenso cuando la comunicación es afectada por retardo en el tiempo. En particular, asumiendo que los agentes se comportan como integradores y el retardo en comunicación es constante y uniforme en el tiempo (es decir, tienen el mismo valor en todos los canales de comunicación), un análisis del retardo máximo que puede ser tolerado sin comprometer el consenso ha sido realizado en Olfati-Saber and Murray [2004], Moreau [2004], Wang and Uchida [2013] y Qin et al. [2009].

Específicamente, el protocolo adoptado en Olfati-Saber and Murray [2004] es capaz de garantizar un consenso promedio en el que los estados de cada agente convergen asintóticamente a la media de sus condiciones iniciales en lugar de una constante arbitraria. Además, los autores proveen una fórmula explícita para el retardo más grande en la transmisión, demostrando que el tiempo de retardo

máximo que puede ser tolerado por una red de integradores aplicando un protocolo lineal de consenso es inversamente proporcional al valor propio máximo de la matriz Laplaciana que presenta la topología de la red.

A partir de la restricción del valor propio máximo de la matriz Laplaciana en la solución del problema dado en Olfati-Saber and Murray [2004], el objetivo de este trabajo consiste en incrementar el valor de dicho tiempo de retardo mediante la implementación de un esquema Predictor–Observador que proporciona estados estimados futuros que pueden ser utilizados en el diseño de una retroalimentación apropiada.

El resto del documento se organiza de la siguiente manera. En la Sección 2, se presenta una breve reseña de la teoría de grafos y se muestran las propiedades de la matriz Laplaciana. En la Sección 3, se realiza el planteamiento del problema haciendo referencia a los resultados obtenidos en Olfati-Saber and Murray [2004]. En la Sección 4, se detalla la propuesta de solución del problema, implementando el esquema predictor–observador así como la retroalimentación basada en estados estimados considerada y se muestra formalmente la estabilidad en lazo cerrado del sistema. En la Sección 5, simulaciones numéricas muestran la efectividad de la estrategia considerada. Finalmente, en la Sección 6 se presentan algunas conclusiones del trabajo.

2. TEORÍA DE GRAFOS Y MATRIZ LAPLACIANA

La teoría de grafos estudia las propiedades de estructuras que constan de dos partes, un conjunto de vértices, nodos o puntos; y un conjunto de aristas, líneas o lados que pueden ser orientados o no, y que conectan a los vértices entre sí (Godsil and Royle [2001], Ren et al. [2007]). Por ser de interés para este trabajo a continuación se presenta un breve resumen de este tópico.

Un grafo G es un par ordenado $G = \{N, E\}$ donde:

- N es un conjunto de vértices o nodos el cual suele ser finito, $N = \{1, \dots, n\}$.
- E es un conjunto de aristas que relacionan dichos nodos, $E \subseteq N \times N$.
- Una arista de G es denotada como $e_{ij} = (i, j)$
- El grado de un vértice o nodo N es igual al número de arcos E que se encuentran en él.

2.1 Tipos de grafos y definiciones

Un *grafo directo o dirigido* es un par (N, E) donde las aristas $(i, j) \in E$ denotan que el vehículo j puede obtener información del vehículo i , pero no necesariamente al revés.

Para la arista (i, j) , i es el “nodo padre”, mientras que j es el “nodo hijo”. En contraste con un grafo dirigido, los pares de nodos de un *grafo no directo o no dirigido* están en desorden, lo que significa que la arista (i, j) indica que los vehículos i y j pueden obtener información uno del otro. Un *camino dirigido* es una secuencia de aristas en un grafo dirigido de la forma $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots$. Un *camino no dirigido* en un grafo no dirigido, es definido análogamente. Un *ciclo* es un camino dirigido que empieza y finaliza en el mismo nodo. Un grafo dirigido está *fuertemente conectado* si hay un camino dirigido desde cada nodo a cada uno de los otros nodos. Un grafo no dirigido está *conectado* si hay un camino no dirigido entre cada par de nodos distintos. La *Matriz de Adyacencia* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de un grafo dirigido con un conjunto de nodos $N = \{1, \dots, n\}$ es definida tal que a_{ij} es ponderada positiva si $(j, i) \in E$,

mientras que $a_{ij} = 0$ si $(j, i) \notin E$. Si la ponderación no es relevante, entonces a_{ij} es un conjunto igual a 1 para todo $(j, i) \in E$. Un grafo es *balanceado* si $\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji}$ para todo i . Para un grafo no dirigido, A es simétrica y por lo tanto el grafo no dirigido es balanceado.

2.2 Matriz Laplaciana y propiedades

La *Matriz Laplaciana* $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de un grafo dirigido está dada por $l_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij}$ y $l_{ij} = -a_{ij}$ para todo $i \neq j$. Si $(j, i) \notin E$ entonces $l_{ij} = -a_{ij} = 0$.

Propiedades de la matriz Laplaciana

- $l_{ij} \leq 0, i \neq j$.
- La suma de los elementos de cada fila son iguales a cero, $\sum_{j=1}^n l_{ij} = 0, i = 1, \dots, n$.
- Para un grafo no dirigido, L es simétrica.
- Para grafos dirigido y no dirigidos, 0 es un eigenvalor de L , ya que la suma de los elementos de cada fila es igual a cero y L tiene un eigenvector $1_n \triangleq [1, \dots, 1]^T$, de $n \times 1$, asociado al valor propio cero.
- L es diagonalmente dominante y no tiene entradas negativas en su diagonal.
- La matriz L es semidefinida positiva.
- Todos los eigenvalores no cero de L son positivos, mientras que para un grafo directo, todos los eigenvalores no cero de L tienen parte real positiva. Por lo que todos los eigenvalores no cero de $-L$ tienen partes reales negativa.
- Cero es siempre un valor propio de L con multiplicidad al menos unitaria, por lo tanto $\lambda_0 = 0$.
- Para un grafo no dirigido, 0 es un eigenvalor simple de L si y sólo si el camino no dirigido es conectado.
- Para un grafo dirigido, 0 es un eigenvalor simple de L si y sólo si el camino dirigido es fuertemente conectado.
- Si el i -ésimo vértice o nodo de G esta desconectado, entonces $l_{ij} = l_{ji} = 0$ para todo j .

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Protocolo de consenso

La idea básica del algoritmo de consenso es imponer una dinámica similar en la información de los estados de cada agente. Si la comunicación de la red entre los vehículos permite una comunicación continua, entonces la actualización de la información del estado de cada vehículo puede ser modelada por una ecuación diferencial.

3.1 Protocolo de consenso para sistemas de primer orden

Considérese la clase de sistemas lineales una entrada-una salida de la forma

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t) \quad (1)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$ y donde $x_i \in \mathbb{R}^n$ es el estado correspondiente al i -ésimo agente y $u_i \in \mathbb{R}^n$ es la entrada de control correspondiente. Definase además, para el grupo de n agentes, $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ y $u = [u_1, \dots, u_n]^T \in \mathbb{R}^n$.

El protocolo de consenso en el caso de una topología fija (Olfati-Saber and Murray [2002], Olfati-Saber and Murray [2004], Ren et al. [2007]) o variante (Olfati-Saber and Murray [2004]), donde no existe retardo en la comunicación está dado por,

$$u_i(t) = - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)(x_i(t) - x_j(t)). \quad (2)$$

Denótese ahora, τ_{ij} al tiempo de retardo en la comunicación de la información entre el vehículo j y el vehículo i . En este caso, (2) se modifica en la forma,

$$u_i(t) = - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)(x_i(t - \tau_{ij}) - x_j(t - \tau_{ij})). \quad (3)$$

En el caso más simple se considera que $\tau_{ij} = \tau$, es decir, el retardo en la comunicación es el mismo para todos los agentes en la red.

El protocolo de consenso para el caso sin retardo dado en la ecuación (2), para una red fija, es escrito en forma matricial como

$$\dot{x}(t) = -Lx(t) \quad (4)$$

donde L es el Laplaciano generado por la topología considerada y definido como

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1, k \neq i}^n a_{ik} & j = i \\ -a_{ij} & j \neq i. \end{cases}$$

El problema de consenso es resuelto para un grupo de vehículos si, para todo $x_i(0)$ y todo $i, j = 1, \dots, n$,

$$|x_i(t) - x_j(t)| \rightarrow 0$$

cuando $t \rightarrow \infty$. La propiedad de estabilidad del sistema (4) depende entonces de los valores propios de la matriz Laplaciana generada por la topología de la red.

Cuando existe un tiempo de retardo en la comunicación, el protocolo de consenso dado en (3) se expresa matricialmente como,

$$\dot{x}(t) = -Lx(t - \tau) \quad (5)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $x_i(t - \tau)$ es la posición del i -ésimo agente retardado τ unidades de tiempo.

Considerando una topología fija, no directa y conectada, el problema de consenso es resuelto (ver Olfati-Saber and Murray [2004] para más detalles) sí y solo sí,

$$0 \leq \tau < \frac{\pi}{2\sigma_{max}(L)} \quad (6)$$

donde L es el Laplaciano de la gráfica de comunicación y $\sigma_{max}(L)$ es el máximo valor propio de L .

Las propiedades de estabilidad de la solución propuesta en Olfati-Saber and Murray [2004] para el sistema (1) en lazo cerrado con (3) se muestran a continuación mediante un ejemplo descrito en el mismo trabajo.

Ejemplo 1 Considere un sistema de 3 agentes con la configuración de red dada en la Figura 1.

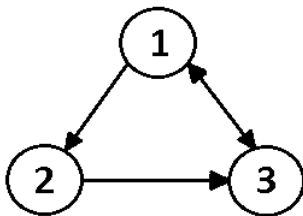


Figura 1. Topología de 3 agentes de tipo mixta.

Se considera un conjunto de agentes retardados de primer orden de la forma,

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t - \tau) \quad (7)$$

para $i = 1, 2, 3$ y donde $u_i(t)$ esta formado por los valores de la matriz de adyacencia a_{ij} como se muestra en (3). A partir de la Figura 1, la matriz Laplaciana resulta,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

donde además se deduce que $\lambda_{max}(L) = 2$.

Siguiendo el análisis dado en Olfati-Saber and Murray [2004], el tiempo de retardo máximo resulta, $\tau_{max} < \frac{\pi}{2\sigma_{max}(L)} = 0.785$, esto es, el sistema se estabilizará para todo tiempo de retardo $\tau < 0.785$ s.

4. PROPUESTA DE SOLUCIÓN

Dado que la solución al problema de consenso para sistemas multiagentes con tiempos de retardo está ligado con la topología del sistema y no depende del diseño de una señal de retroalimentación, en este trabajo se plantea ampliar el valor del tiempo de retardo soportado por el sistema antes de inestabilizarse.

Como solución del problema se propone implementar un control basado en un esquema predictor-observador que proveerá los estados futuros del sistema, adelantados τ unidades de tiempo. El esquema propuesto tiene la ventaja de que las condiciones de estabilización dependen de los parámetros de diseño y no de una topología en particular.

4.1 Solución al problema de consenso con tiempos de retardo

Para plantear la solución al problema de consenso por medio de un esquema de predicción-observación primero se mostrará cómo la dinámica de los agentes considerados, descritos en la ecuación (7), puede expresarse en términos de estados adelantados. Para tal efecto, considere las variables

$$\begin{aligned} w_i(t) &= x_i(t + \tau) \\ w_i(t - \tau) &= x_i(t). \end{aligned} \quad (8)$$

que para el grupo de agentes producen el vector de estados, $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$. Al derivar con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{w}_i(t - \tau) = \dot{x}_i(t) = u_i(t - \tau)$$

donde considerando además un adelantando de tiempo τ , se produce

$$\dot{w}(t) = u(t). \quad (9)$$

lo que produce un sistema en adelante, con respecto al sistema original (7), libre de retardo.

El sistema (9) se utilizará para proponer el esquema de predicción-observación que resuelva el problema de consenso por medio de la utilización de los estados estimados futuros del sistema (7). El esquema predictor-observador que se propone es de la forma,

$$\dot{\hat{w}}(t) = u(t) + \lambda e_w(t - \tau) \quad (10)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ es una constante de diseño del observador, $\hat{w} \in \mathbb{R}^n$ es el estado estimado, $u(t)$ es la entrada del sistema y $e_w(t - \tau)$ es el error de seguimiento, retrasado τ unidades de tiempo, definido como,

$$e_w(t - \tau) = w(t - \tau) - \hat{w}(t - \tau). \quad (11)$$

Nótese que en el predictor-observador (10), no es posible utilizar la señal $e_w(t)$ dado que,

$$e_w(t) = x(t + \tau) - \hat{x}(t + \tau),$$

lo cual requiere valores del vector de estados $x(t + \tau)$ del sistema original (7) en tiempos futuros que no se encuentran disponibles para su utilización.

En lugar de considerar la solución dada en Olfati-Saber and Murray [2004],

$$u(t) = -Lx(t - \tau),$$

en este trabajo se considera la solución basado en estados estimados futuros de la forma,

$$u(t) = -L\hat{w}(t) = -L\hat{x}(t + \tau) \quad (12)$$

que produce el sistema en lazo cerrado,

$$\dot{x}(t) = -L\hat{x}(t)$$

$$\dot{\hat{w}}(t) = -L\hat{w}(t) + \lambda e_w(t - \tau). \quad (13)$$

En la siguiente sección se mostrará cómo el predictor-observador dado en (10) produce un error de estimación de estados futuros asintóticamente convergentes y que el uso de la retroalimentación basada en estados estimados futuros (12), provee una solución al problema de consenso planteada en este trabajo que mejora sustancialmente al resultado obtenido en Olfati-Saber and Murray [2004].

4.2 Análisis de estabilidad del sistema

Considerando el error de observación $e_w(t) = w(t) - \hat{w}(t)$ es fácil ver que,

$$\dot{e}(t) = -\lambda e_w(t - \tau)$$

con lo cual, el sistema (7) en lazo cerrado con la retroalimentación (12) produce,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -Lx(t) + Le_w(t - \tau) \\ \dot{e}_w(t) &= -\lambda e_w(t - \tau) \end{aligned} \quad (14)$$

donde $x = [x_1, \dots, x_n]^T$, $e_w = [e_{w1}, \dots, e_{wn}]^T$, $\lambda \in R^+$ y L es el laplaciano generado por el grafo del sistema.

Nótese que un cambio de variable en la forma,

$$x = Pz, \quad z = P^{-1}x \quad (15)$$

produce,

$$\begin{aligned} P\dot{z} &= -LPz + Le_w(t - \tau) \\ \dot{z} &= -P^{-1}LPz + P^{-1}Le_w(t - \tau). \end{aligned}$$

Considerando a P como la matriz formada por los vectores propios generalizados de L se obtiene,

$$J = P^{-1}LP \quad (16)$$

donde J tiene la forma canónica de Jordan. Bajo estas condiciones el sistema (14) toma la forma,

$$\dot{z} = -Jz + P^{-1}Le_w(t - \tau) \quad (17)$$

$$\dot{e}_w(t) = -\lambda e_w(t - \tau). \quad (18)$$

La estabilidad de (18) puede establecerse fácilmente al considerar los resultados presentados en Niculescu [2001], donde se muestra que el sistema será estable para todo $\tau < \tau^*$, tal que,

$$\tau^* = \frac{\pi}{2\lambda} \quad (19)$$

donde λ es un parámetro de diseño que puede ajustarse a voluntad. Es posible ver que la clase del sistema (18) no sólo es asintóticamente estable si no que también es exponencialmente estable.

A continuación se mostrará la obtención explícita de cotas exponenciales para la clase considerada. Este hecho se utilizará posteriormente para mostrar la solución al problema de consenso planteado. Para tal efecto, considere la transformación,

$$z(t) = e^{\alpha t} e_w(t) \quad (20)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \alpha e^{\alpha t} e_w(t) + e^{\alpha t} \dot{e}_w(t) \\ &= \alpha z(t) + e^{\alpha t} (-\lambda e_w(t - \tau)) \\ &= \alpha z(t) - \lambda e^{\alpha t} e^{\alpha(t-\tau)} z(t - \tau). \end{aligned}$$

Obteniéndose entonces,

$$\dot{z}(t) = \alpha z(t) - \lambda e^{\alpha \tau} z(t - \tau). \quad (21)$$

Analizando la ecuación característica de (21), es posible determinar que este sistema será estable para todo $\tau < \tau^*$ tal que,

$$\tau^* = \frac{\arccos\left(\frac{\alpha}{\lambda e^{\alpha \tau}}\right)}{\sqrt{(\lambda e^{\alpha \tau})^2 - \alpha^2}}.$$

En particular, considerando que la tasa de decaimiento α en (20) tiende a cero, se obtiene,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \tau^* &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\arccos\left(\frac{\alpha}{\lambda e^{\alpha \tau}}\right)}{\sqrt{(\lambda e^{\alpha \tau})^2 - \alpha^2}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\arccos\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}} \\ &= \frac{\arccos(0)}{\lambda} = \frac{\pi}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución de (18) es exponencialmente estable.

Observación 1. Nótese que la estabilidad exponencial de (18) puede también establecerse a partir del Corolario 5.10, pp. 240, en Niculescu [2001]. Es posible entonces demostrar que el sistema será exponencialmente estable para tiempos de retardo $\bar{\tau}$, tales que, $\bar{\tau} < \frac{1}{\lambda}$, con tasa de decaimiento $\frac{\sigma}{\bar{\tau}}$, $\sigma > 0$ que satisface la ecuación trascendente, $-\lambda + \frac{\sigma}{\bar{\tau}} + \bar{\tau}\lambda^2 e^{\frac{2\sigma}{\bar{\tau}}\alpha} = 0$. En este caso, la cota obtenida es más conservadora.

Considerando que (18) es exponencialmente estable, las soluciones de este sistema satisfacen ([Niculescu et al., 1998]),

$$\|e_w(t)\| \leq \beta e^{-\alpha t}$$

para algún $\beta \geq 1$, $\alpha \in R^+$ y para todo $t \geq 0$.

Considere ahora la ecuación (17) cuya solución puede escribirse en la forma,

$$z(t) = e^{-Jt} z(0) + \int_0^t e^{-J(t-s)} P^{-1} L e_w(s - \tau) ds. \quad (22)$$

Teorema 2. (Forma canónica de Jordan) Sea A una matriz con valores propios reales λ_j , $j = 1, \dots, k$ y valores propios complejos $\lambda_j = a_j + ib_j$, $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$, $j = k + 1, \dots, n$. Entonces, existe una base $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_n, v_{n+1}, \dots, v_{2n-k}\} \in R^{2n-k}$ donde v_j , $j = 1, \dots, k$ y w_j, v_j , $j = k + 1, \dots, n$ son vectores generalizados de A , $u_j = \text{Re}(w_j)$ y $v_j = \text{Im}(w_j)$ para $j = k + 1, \dots, n$, tal que la matriz $P = [v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_n, v_{n+1}, \dots, v_{2n-k}]$ es invertible y

$$P^{-1}AP = \text{diag}\{B_i\}$$

con $i = 1, \dots, r$ y donde los bloques elementales de Jordan B_j , $j = 1, \dots, r$ son de la forma,

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

para cualquier valor propio λ real de A , o de la forma,

$$B = \begin{bmatrix} D & I_2 & & \\ & D & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ & & & D \end{bmatrix}$$

con

$$D = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para cualquier valor propio complejo $\lambda = a + ib$.

Como en el caso particular de (16), se tiene que $v_1 = 1_n$, entonces,

$$J = P^{-1}LP = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & B_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{J} \end{bmatrix}.$$

Para mostrar la solución al problema de consenso, nótese que,

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-J(t-s)} P^{-1} L e_w(s-\tau) ds &= \\ &= \int_0^t e^{-J(t-s)} J P^{-1} e_w(s-\tau) ds \\ &\leq \int_0^t e^{-J(t-s)} J P^{-1} 1_n \beta e^{-\alpha(s-\tau)} ds \\ &\leq \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-\bar{J}(t-s)} 1_{(n-1)} k \beta e^{-\alpha(s-\tau)} \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ k \beta e^{\alpha\tau} e^{-\bar{J}t} \int_0^t e^{-\alpha s} e^{\bar{J}s} 1_{(n-1)} ds \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nótese que como $|e_{wi}(s-\tau)| \leq \beta e^{-\alpha(s-\tau)}$ entonces siempre se satisface $e_{wi}(s-\tau) \leq \beta e^{-\alpha(s-\tau)}$ y por lo tanto, elemento por elemento, $e_w(s-\tau) \leq 1_n \beta e^{-\alpha(s-\tau)}$. Además se ha considerado el hecho que $J P^{-1} = P^{-1} L$ y que $\|J P^{-1}\| \leq k$.

Tomando en cuenta que $x(t) = Pz(t)$ se obtiene,

$$\begin{aligned} P^{-1}x(t) &= e^{-Jt}z(0) + \int_0^t e^{-J(t-s)} P^{-1} L e_w(s-\tau) ds \\ x(t) &= P e^{-Jt}z(0) + P \int_0^t e^{-J(t-s)} P^{-1} L e_w(s-\tau) ds \\ &= P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\bar{J}t} \end{bmatrix} z(0) \\ &\quad + P \int_0^t e^{-J(t-s)} P^{-1} L e_w(s-\tau) ds. \end{aligned}$$

Considerando ahora que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-J(t-s)} P^{-1} L e_w(s-\tau) ds = 0$$

es claro que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = P \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & 0_{(n-1) \times (n-1)} \end{bmatrix} z(0) = P \begin{bmatrix} z_1(0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

y como la primera columna de la matriz P esta dada por 1_n , se obtiene,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \begin{bmatrix} z_1(0) \\ \vdots \\ z_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1i}^{-1} x(0) \\ \vdots \\ P_{1i}^{-1} x(0) \end{bmatrix} \quad (23)$$

donde P_{1i}^{-1} corresponde a la primera fila de la matriz P^{-1} .

A partir de la ecuación (23), se muestra que los estados de los agentes $x_i(t)$ par $i = 1, \dots, n$ convergen a un mismo valor dado por

$$x_i(\infty) = z_i(0) = P_{1i}^{-1} x(0)$$

que depende de las condiciones iniciales de los agentes y representa una solución al problema de consenso.

5. EVALUACIÓN NUMÉRICA

Considérese nuevamente el sistema de la Figura 1, del cual se ha mostrado que el tiempo de retardo máximo que resuelve el problema de consenso sin la utilización del observador, está dado por $\tau_{max} = 0.785$ s.

Como también se ha mostrado, la consideración de un predictor-observador como el propuesto en este trabajo permite la elección de un tiempo de retardo máximo τ_{max} que depende del parámetro λ , que puede ser ajustado a voluntad dado que es un parámetro de diseño en la ecuación (10). Es fácil ver que con $\lambda = 1.0472$ se obtiene un tiempo de retardo máximo $\tau_{max} = 1.5$ s, lo cual supera el resultado obtenido en Olfati-Saber and Murray [2004]. A partir de este hecho, se desarrolla una simulación numérica para validar la estrategia propuesta, obteniéndose los resultados que se muestran enseguida.

En la Figura 2a se observa que el error de observación $e_w(t-\tau)$ converge a cero y que en la Figura 2b, los estados del sistema alcanzan el consenso, resolviendo el problema planteado a pesar del aumento en el tiempo de retardo al límite de la solución dada en Olfati-Saber and Murray [2004]. También se puede observar, en la Figura 2c, las señales de control, obtenidas a partir de estados estimados futuros.

Por otra parte, en la Figura 3 se observa la evolución del sistema cuando el tiempo de retardo es $\tau = 1.2$ s. Nótese que el sistema logra el consenso pero la tasa de convergencia resultante es baja, con respecto a los resultados mostrados en la Figura 2, dado que el retardo considerado está cerca del límite máximo permitido por los parámetros elegidos.

Para determinar el valor al cual convergen los estados de los agentes, es posible ver que las matrices P y P^{-1} toman la forma,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ -0.5 & -0.25 & 0.75 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, considerando la ecuación (23), con las condiciones iniciales $x(0) = [-4, 1, 3]^T$ y $P_{1i}^{-1} = [0.5, 0.25, 0.25]$ se tiene que,

$$P_{1i}^{-1} x(0) = [0.5 \ 0.25 \ 0.25] \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = -1$$

lo cual concuerda con los resultados obtenidos.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se analiza el problema de consenso para un grupo de agentes sujetos a tiempos de retardo fijo en la comunicación entre ellos. Para resolver este problema

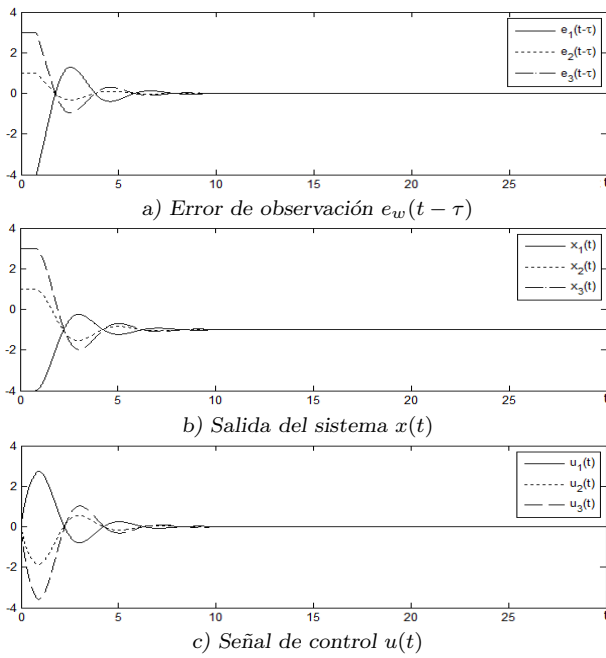


Figura 2. Evolución en el tiempo para el sistema de la Figura 1 con $\tau = 0.785$ s.

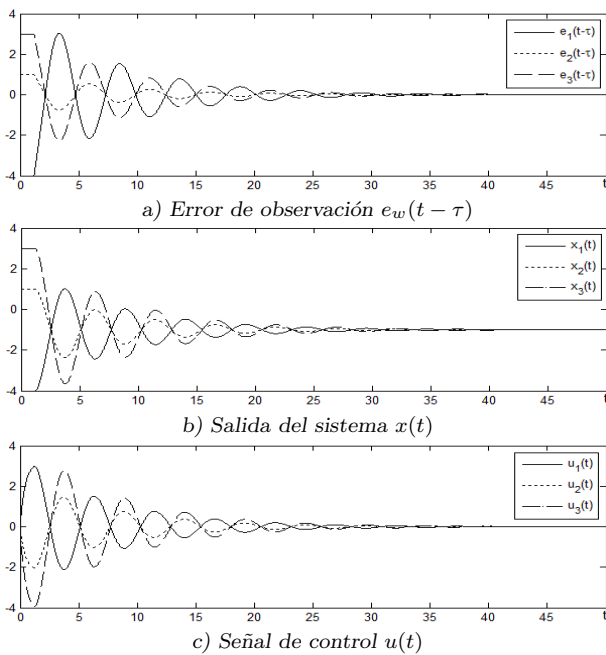


Figura 3. Evolución en el tiempo para el sistema de la Figura 1 con $\tau = 1.2$ s.

se propone una retroalimentación basada en un esquema predictor-observador, el cual provee una solución al problema de consenso que mejora sustancialmente el resultado presentado en Olfati-Saber and Murray [2004]. El esquema propuesto tiene la ventaja de que las condiciones de estabilización dependen de los parámetros de diseño y no de una topología en particular. La evaluación del esquema propuesto se realiza mediante experimentos en simulación numérica.

REFERENCIAS

P. Bliman and G. Ferrari-Trecate. Average consensus problems in networks of agents with delayed commu-

nications. *IEEE Conference Decision Control*, pages 7066–7071, 2005.

A. Fax and R. M. Murray. Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(9):1465–1476, 2004.

C. Godsil and G. Royle. *Algebraic Graph Theory*. Springer-Verlag, 2001.

L. Moreau. Stability of continuous-time distributed consensus algorithms. *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, 4:3998–4003, 2004.

T. Namerikawa and C. Yoshioka. Consensus control of observer-based multi-agent system with communication delay. *SICE Annual Conference*, pages 2414–2419, 2008.

S. I. Niculescu. *Delay effects on Stability: A Robust Control Approach*. Springer-Verlag, 2001.

S. I. Niculescu, C. E. de Souza, L. Dugard, and J. M. Dion. Robust exponential stability of uncertain systems with time-varying delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(5):743–748, 1998.

R. Olfati-Saber and R. M. Murray. Distributed cooperative control of multiple vehicle formations using structural potential functions. *15th IFAC Triennial World Congress*, 2002.

R. Olfati-Saber and R. M. Murray. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(9): 1520–1533, 2004.

Z. J. Palmor. Time-delay compensation smith predictor and its modifications. *The control handbook*, pages 224–237, 1996.

J. Qin, H. Gao, and W. X. Zheng. A new result on average consensus for multiple agents with switching topology and communication delay. *Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, pages 3703–3708, 2009.

W. Ren and R. W. Beard. Trajectory tracking for unmanned air vehicles with velocity and heading rate constraints. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 12(5):706–716, 2004.

W. Ren and R. W. Beard. *Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control: theory and applications*. Springer, 2007.

W. Ren and Y. Cao. *Distributed Coordination of Multi-agent Networks Emergent Problems, Models, and Issues*. Springer-Verlag, 2011.

W. Ren, R. W. Beard, and E. M. Atkins. A survey of consensus problems in multi-agent coordination. In *American Control Conference. Proceedings of the 2005*, pages 1859–1864. IEEE, 2005.

W. Ren, R. W. Beard, and E. M. Atkins. Information consensus in multivehicle cooperative control. *IEEE Control Systems*, 27(2):71–82, 2007.

J. Russell Carpenter. Decentralized control of satellite formations. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12(2-3):141–161, 2002.

S. Skogestad. Simple analytic rules for model reduction and pid controller tuning. *Journal of Process Control*, 13(4):291–309, 2003.

O. J. M. Smith. Closer control of loops with deadtime. *Chem. Eng. Prog.*, 53(5):217–219, 1957.

R. Vidal, O. Shakernia, and S. Sastry. Formation control of nonholonomic mobile robots omnidirectional visual servoing and motion segmentation. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1:584–589, 2003.

M. H. Wang and K. Uchida. Cluster consensus of multi-agent systems with communication delay (iccas 2013). *13th International Conference on Control, Automation and Systems*, pages 617–622, 2013.