

# Optimización de Diseño y Control en el Tren de Potencia de Robots Manipuladores

Erick A. Padilla-García, Carlos A. Cruz-Villar y Rodríguez-Angeles, A.\*

\* Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica,  
CINVESTAV-IPN, Av. Instituto Politecnico Nacional 2508, San Pedro  
Zacatenco, Gustavo A. Madero, 07360 Ciudad de México, D.F.  
(e-mails: epadilla@gdl.cinvestav.mx, cacruz@cinvestav.mx,  
aangeles@cinvestav.mx).

---

## Resumen

Se presenta un método de optimización secuencial en el diseño y control del tren de potencia de un robot manipulador, cuyos componentes principales son motor, reductor y carga en cada articulación. Los objetivos de optimización son minimizar el peso/costo total de diseño mediante una selección apropiada de componentes comercialmente disponibles, y minimizar el error de seguimiento de trayectoria. La dinámica del robot y las características de los componentes como: las inercias de ambos motor y reductor, la eficiencia de los reductores del robot, la relación de reducción, entre otros, son considerados en el modelo del tren de potencia. La optimización de diseño en las articulaciones del robot esta sujeta a criterios de factibilidad dinámica y operación para realizar alguna tarea determinada. Para mostrar el desempeño del método propuesto, se presenta un ejemplo de aplicación con parámetros de un robot de 3 grados de libertad que se encuentra en el laboratorio de la Sección de Mecatrónica, en el Cinvestav; utilizando un algoritmo evolutivo de optimización con restricciones llamado *Método Complex* propuesto por Box (1965), que puede utilizar tanto variables de decisión discretas como continuas.

*Palabras Clave:* Diseño mecatrónico, Tren de potencia, Optimización, Robots manipuladores

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Las estrategias de diseño en sistemas robóticos son una manera de hacer frente a los desafíos de procesos eficientes donde el tren de potencia del robot tiene alto impacto en el costo y rendimiento del sistema. Definir los parámetros de decisión en el modelo lleva a un diseño en particular, por lo cual, considerando que existe una interacción sinérgica de componentes en el tren de potencia del robot, el problema de diseño puede consistir en la apropiada selección de componentes, asegurando que éstos puedan realizar la tarea requerida.

Se han propuesto métodos que llevan obtener un diseño óptimo para un sistema motor/reductor que pueda operar un perfil de carga deseado, aunque no están enfocados a un sistema robótico, proponen importantes criterios de selección. En Fredrik Roos (2006) se propone un método cuyo objetivo es determinar la mejor combinación motor/reductor para realizar una tarea dada, donde se calculan valores en parámetros de diseño como peso, tamaño, potencia máxima, etc., sin embargo, se menciona la dificultad de obtener elementos disponibles en el mercado con las características calculadas, llevando el problema de diseño a enfoques de construcción con características y parámetros específicos.

Los trabajos Cusimano (2013) y Cusimano (2007) proponen obtener la selección óptima de componentes en la combinación motor/reductor mediante el cumplimiento

de criterios deseados que llevan considerar componentes *factibles* para la tarea deseada.

En un enfoque a robots manipuladores, en Chedmail P (1990) se plantea la optimización del peso total en los actuadores como factor determinante en el costo total de diseño. Con el mismo enfoque, en Lelai Zhou (2011) y Lelai Zhoua (2012) se propone una optimización de diseño mediante la selección de motores y reductores ligeros comercialmente disponibles.

En este trabajo, se propone un método de optimización secuencial de Diseño y Control cuyo objetivo es la apropiada decisión de parámetros mediante la selección óptima de componentes con un criterio de minimización de peso(costo) del brazo con restricciones de factibilidad dinámica. Luego, se propone reducir el error de seguimiento de trayectoria con un controlador PID en cada articulación, siendo éste un estándar industrial ampliamente utilizado en el control de procesos industriales en lazo cerrado, tomando en cuenta la dinámica del brazo completo, tren de potencia en cada articulación y la sintonización óptima de ganancias del controlador.

Este artículo se presenta de la siguiente manera: En la sección 2 se describen los modelos de robot y tren de potencia utilizados. La sección 3 define los problemas de optimización y el algoritmo utilizado. En la sección 4 se muestra un ejemplo de aplicación para un caso de estudio particular. La sección 5 presenta las conclusiones del trabajo realizado.

## 2. MODELOS DEL ROBOT MANIPULADOR Y TREN DE POTENCIA

Mientras que se considera una topología fija de la estructura en el manipulador, pueden seleccionarse los componentes del tren de potencia, es decir, motores y reductores. Sin embargo, para el problema de diseño de robots es esencial tener en cuenta la cinemática y dinámica del brazo.

### 2.1 Modelado de un robot manipulador

Considere un robot rígido de  $n$ -articulaciones completamente actuado, es decir,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ . Utilizando la formulación de *Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_i} = \tau_i \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

donde el lagrangiano se obtiene como  $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n (\mathcal{K}_i - \mathcal{U}_i)$  y  $\mathcal{K}_i$  y  $\mathcal{U}_i$  son la energía cinética y potencial, respectivamente, para la  $i$ -ésima articulación. Las ecuaciones de movimiento pueden llegar a describirse por

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}(t) \quad (2)$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de inercia,  $\mathbf{C}$  representa las fuerzas de Coriolis y fuerzas centrífugas,  $\mathbf{g}$  es el vector de fuerzas gravitacionales, y  $\boldsymbol{\tau}(t)$  el vector de pares de las articulaciones. Por simplicidad, se omite la notación de dependencia del tiempo  $t$  en las coordenadas generalizadas  $q$ .

### 2.2 Modelo del tren de potencia

El tren de potencia involucra pares requeridos para realizar alguna tarea dada, cuyo perfil de carga puede obtenerse con la ecuación (2). Una representación esquemática del tren de potencia se muestra en la Figura (1).

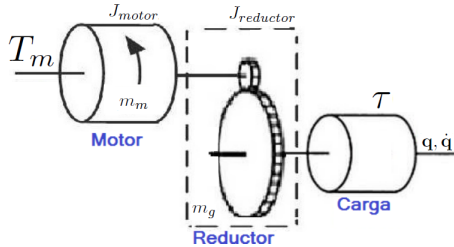


Figura 1. Modelo esquemático. Tren de potencia en un eje

Analizando pares y fuerzas; y la interacción en la conexión de la combinación de motor, reductor y carga, se puede obtener un modelo del tren de potencia bajo las siguientes consideraciones: la conexión entre el reductor y el motor es rígida, la carga está unida al eje de salida del reductor, no hay holgura ni deformación elástica, el número de dientes de cada engrane es proporcional al radio y la relación de reducción  $n_r \gg 1$ . Para cada articulación  $i$ , el par requerido en cada motor  $T_{m_i}$  para seguir un perfil de carga  $\tau_i(t)$  puede obtenerse por la ecuación (3).

$$T_{m,i} = J_{eq_i} \ddot{q}_i \cdot n_{r_i} + b_{eq_i} \dot{q}_i \cdot n_{r_i} + \frac{\tau_i(t)}{\eta_i \cdot n_{r_i}} \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

$\eta_i$  es la eficiencia del reductor  $i$ ,  $J_{i,eq}$  y  $b_{i,eq}$  son, respectivamente, la inercia y fricción viscosa equivalentes en la articulación, donde:

$$J_{eq_i} = J_{motor,i} + J_{reductor,i}, \quad b_{eq_i} = b_{motor,i} + b_{reductor,i}$$

### 2.3 Modelo del tren de potencia en espacio de estados

Considerando una conexión rígida en cada articulación del robot, se puede obtener una representación matricial del tren de potencia para el sistema robótico completo como

$$\mathbf{T}_m = \mathbf{J}_q \mathbf{K}_r \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_q \mathbf{K}_r \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_r \mathbf{N})^{-1} \boldsymbol{\tau}(t) \quad (4)$$

donde  $\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \mathbf{T}_m, \boldsymbol{\tau}(t) \in \mathbb{R}^n$ .

$\mathbf{N} = \text{diag}\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ ,  $\mathbf{K}_r = \text{diag}\{n_{r_1}, n_{r_2}, \dots, n_{r_n}\}$

$\mathbf{J}_q = \text{diag}\{J_{eq_1}, J_{eq_2}, \dots, J_{eq_n}\}$

$\mathbf{B}_q = \text{diag}\{b_{eq_1}, b_{eq_2}, \dots, b_{eq_n}\}$

Teniendo en cuenta la ecuación (2), se puede llegar a la expresión

$$\mathbf{T}_m = [\mathbf{J}_q \mathbf{K}_r + (\mathbf{K}_r \mathbf{N})^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{q})] \ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{B}_q \mathbf{K}_r + (\mathbf{K}_r \mathbf{N})^{-1} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_r \mathbf{N})^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (5)$$

entonces, la dinámica del sistema completo puede describirse por

$$\mathbf{T}_m = \mathbb{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbb{G}(\mathbf{q}) \quad (6)$$

donde

$$\mathbb{H}(\mathbf{q}) = [\mathbf{J}_q \mathbf{K}_r + (\mathbf{K}_r \mathbf{N})^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{q})]$$

$$\mathbb{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = [\mathbf{B}_q \mathbf{K}_r + (\mathbf{K}_r \mathbf{N})^{-1} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]$$

$$\mathbb{G}(\mathbf{q}) = (\mathbf{K}_r \mathbf{N})^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{q})$$

Reescribiendo la ecuación (6) y resolviendo para la aceleración puede obtenerse la ecuación

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbb{H}(\mathbf{q})^{-1} [\mathbf{T}_m - \mathbb{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbb{G}(\mathbf{q})] \quad (7)$$

## 3. FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

### 3.1 Problema de diseño

Una selección conveniente de componentes puede obtenerse mediante un algoritmo de optimización con respecto a criterios de selección y requerimientos de tarea. Esta se basa tanto en características de carga como consideraciones económicas que son directamente proporcionales al dimensionamiento y peso de los componentes.

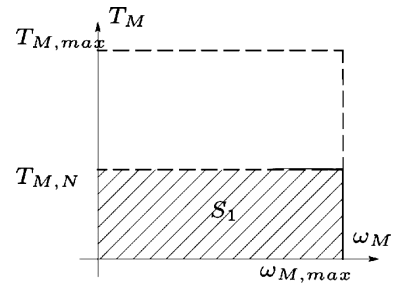


Figura 2. Gráfica  $(\omega_M, T_M)$  genérica de un motor eléctrico

*Criterios de selección de motor.* En la Figura (2) se muestran la *zona de operación continua* y la *zona dinámica* para un motor genérico, respectivamente acotadas por el par continuo  $T_{M,N}$  y el par máximo del motor  $T_{M,max}$ . Basándose en Giberti and Cinquemani (2012), Cusimano (2013) y Cusimano (2007) se puede obtener de manera genérica un criterio de selección donde debe asegurarse

que el motor trabajará dentro de una zona factible de operación continua,  $S_1$ .

El par continuo del motor  $T_{M,N}$  se define como el par que puede ejercer el motor en tiempo infinito, sin sobrecalentarse, cuyo valor está especificado por el fabricante. Aún cuando  $T_{M,N}$  está en función de la velocidad angular, éste es considerado constante e igual para todo el rango de velocidad alcanzable y acotado por  $\omega_{M,max}$ .  $T_{M,rms}$  es el par en estado estacionario que produce la misma cantidad de calentamiento durante periodos de tiempo continuo y es un equivalente térmico comparable con  $T_{M,N}$ . El par máximo que puede entregar el motor durante un tiempo ciclo depende estrechamente de la unidad eléctrica utilizada durante la operación, éste no debe sobrepasar la zona dinámica del motor limitada por un par máximo  $T_{M,max}$ , especificado por el fabricante.

Así, los requerimientos para un motor, *utilizable*, son los siguientes

$$\text{par continuo de motor: } T_{M,rms} \leq T_{M,N} \quad (8)$$

$$\text{velocidad máxima de motor: } \omega \leq \omega_{M,max} \quad (9)$$

$$\text{par máximo de motor: } T_M \leq T_{M,max} \quad (10)$$

donde  $T_{M,rms} = \sqrt{\frac{1}{t_c} \int_0^{t_c} T_m^2 dt}$  y  $t_c$  es el tiempo ciclo de la tarea asignada.

*Criterios de selección de reductor.* El par  $\tau_g$  y velocidad  $\omega_g$  del reductor coinciden con los de carga  $\tau_i(t)$  y  $\dot{q}_i$ . Éstos no deben sobrepasar los requerimientos del reductor dados por el fabricante  $T_{g,max}$  y  $N_g^{max}$ , respectivamente. Por otro lado, un par  $\tau_{rmc}$  es un valor medido de la fatiga acumulada en los componentes de la estructura, que puede compararse con el par continuo  $T_{N,g}$  en el reductor. Considerando la conexión motor/reductor, los criterios de selección son

$$\text{par nominal de salida: } \tau_{rmc} \leq T_{N,g} \quad (11)$$

$$\text{par máximo de salida: } \tau_g \leq T_{g,max} \quad (12)$$

$$\text{velocidad máxima permisible: } n_{in} \leq N_g^{max} \quad (13)$$

donde  $\tau_{rmc} = \sqrt[3]{\frac{1}{t_c} \int_0^{t_c} \tau_i(t)^3 dt}$  y  $n_{in} = \max |\dot{q}_i(t) \cdot n_r|$ .

### 3.2 Problema de Control

Se propone utilizar un control PID en el espacio de trabajo de la forma

$$F_{PID}(\dot{\mathbf{x}}_d, \mathbf{x}_d, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \xi, t) = \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_d \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_i \xi \quad (14)$$

$$\dot{\xi} = \tilde{\mathbf{x}}$$

donde  $\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_d, \mathbf{K}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son las matrices de ganancias del controlador, propuestas como diagonales y definidas positivas. La relación entre pares y fuerzas del manipulador está dada por  $\mathbf{F}(\mathbf{t}) = \mathbf{J}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}(\mathbf{t})$ , de esta manera, utilizando la cinemática directa del manipulador  $\mathbf{x} = \varphi_D(\mathbf{q})$ , se puede aplicar un control PID en términos del espacio de trabajo.

Definiendo los errores de seguimiento como

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_d - \varphi_D(\mathbf{q}) \quad (15)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (16)$$

la dinámica del robot considerando el tren de potencia del sistema completo (6) con el control propuesto (14) puede llegar a describirse por las ecuaciones

$$\dot{\xi} = \mathbf{x}_d - \varphi_D(\mathbf{q})$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbb{H}(\mathbf{q})^{-1} [J(\mathbf{q})^{-1}u(t) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G}(\mathbf{q})]$$

donde  $u(t) = F_{PID}(\dot{\mathbf{x}}_d, \mathbf{x}_d, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \xi, t)$  es la señal de control.

### 3.3 Formulación de función objetivo de diseño

Se define un vector con entradas discretas  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^{+2n}$  que incluye los índices de selección de motores  $\mathbf{z}_m = [z_{m_1}, z_{m_2}, \dots, z_{m_n}]$  y reductores  $\mathbf{z}_g = [z_{g_1}, z_{g_2}, \dots, z_{g_n}]$  relacionados a las bases de datos con  $d_m$  motores y  $d_g$  reductores comercialmente disponibles.

La función objetivo  $f(\mathbf{z})$  se define como la suma total de peso de los motores y reductores del sistema. El objetivo de optimización en el diseño es minimizar el peso del brazo, mediante la selección del conjunto más ligero de componentes para cada tren de potencia

$$\min_{\mathbf{z}} f(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^n \{m_m(z_{m,k}) + m_g(z_{g,k})\} \quad (17)$$

sujeto a las restricciones (8)-(13) para cada articulación  $i$  del robot donde  $i = 1, \dots, n$ .

### 3.4 Formulación de la función objetivo de control

Se define el vector de ganancias

$$\mathbf{x}_k = [kp_1, kp_2, \dots, kp_n, kd_1, kd_2, \dots, kd_n, ki_1, ki_2, \dots, ki_n]$$

como el vector de decisión con valores continuos  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{3n}$ , donde

$$\mathbf{K}_p = \text{diag}([kp_1, kp_2, \dots, kp_n])$$

$$\mathbf{K}_d = \text{diag}([kd_1, kd_2, \dots, kd_n])$$

$$\mathbf{K}_i = \text{diag}([ki_1, ki_2, \dots, ki_n])$$

Considerando matrices de ganancias diagonales y definidas positivas, el objetivo de control se resume a sintonizar las ganancias del controlador, con el fin de minimizar el error de seguimiento de trayectoria en espacio tarea  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{X}_d - \varphi_D(\mathbf{q})$  donde la función objetivo  $\mathbf{J}$  está definida como la norma cuadrada del error

$$\min_{\mathbf{x}_k} \mathbf{J} = \int_0^{t_c} |\mathbf{e}(t)|^T \mathbf{Q} |\mathbf{e}(t)| dt, \quad \mathbf{Q} > 0 \quad (18)$$

sujeto a la dinámica (7) del sistema completo con una entrada de control (14).

### 3.5 Procedimiento de optimización vía método Complex

El *Método Complex* es un algoritmo de optimización con restricciones, propuesto por Box (1965), que no se basa en el gradiente para encontrar el vector de decisión óptimo y puede utilizar tanto variables continuas como discretas. Consiste en llevar un espacio de puntos a nuevos puntos factibles que produzcan mejoras en la respuesta.

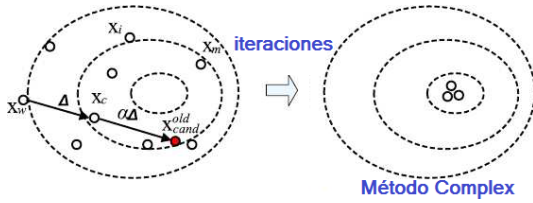


Figura 3. Esquema de Optimización por Método Complex

Se crea una población inicial aleatoria de tamaño  $m$  que cumpla con las restricciones dadas (llamado *Espacio de Factibilidad*). El punto cuya evaluación de la función objetivo es mínimo se denota como *mejor punto*,  $x_b$ , mientras que el máximo como el *peor*,  $x_w$ . Un criterio de convergencia del algoritmo, es propuesto mediante un umbral de error  $\delta$  entre  $x_b$  y  $x_w$ . En caso de no llegar al umbral se propone un criterio de paro mediante un número máximo de generaciones  $gen_{max}$ .

El punto centroide  $x_c$  se calcula como

$$x_c = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m x_i, \quad x_i \neq x_b \quad (19)$$

$$x_i = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad m > n \quad (20)$$

Un nuevo punto  $x_{cand}$  se encuentra por reflejo de  $x_w$  y  $x_c$  mediante un coeficiente  $\alpha = 1.3$  y un parámetro de síntesis  $N_r = 4$  (valores recomendados por Box (1965))

$$x_{cand} = x_c + \alpha(x_c - x_w) \quad (21)$$

Se dice que el algoritmo se colapsa cuando existe un ciclo indeterminado en el proceso, para atacar este problema se usa una reflexión a un nuevo punto  $x_{cand}^{new}$

$$x_{cand}^{new} = \frac{1}{2} (x_{cand}^{old} + \varepsilon x_c + (1 - \varepsilon)x_b) + (x_c - x_b)(1 - \varepsilon)(2k - 1) \quad (22)$$

donde  $k$  es un número aleatorio entre  $[0, 1]$  con

$$\varepsilon = \left( \frac{N_r}{N_r + k_r - 1} \right)^{\frac{N_r + k_r - 1}{N_r}} \quad (23)$$

$k_r$  es el número de veces en que el mismo punto ha sido identificado de manera repetida. El algoritmo utilizado via Método Complex se muestra en el Algoritmo 1.

#### 4. EJEMPLO DE OPTIMIZACIÓN EN UN CASO DE ESTUDIO

Se utiliza un robot planar redundante de 3 grados de libertad que se encuentra en el laboratorio 1, de la Sección de Mecatrónica, Figura (4). Los tres eslabones del robot están contruidos con aluminio (aleación 6063T - 5) de espesor 9.525 mm. Las articulaciones son accionadas por motores de CD sin escobillas, servomotores de la marca MicroMo Electronics Inc. Cuadro 1.

Cuadro 1. Componentes del robot

No.	Parte	$Tm$ (Nm)	$Tm_{max}$ (Nm)	$\omega_{max}$ (rpm)	$Jm$ (gcm <sup>2</sup> )	$m$ (kg)
1,2,3	Motor	0.0118	0.11	38000	6.5	0.1
1,2,3	Reductor	$Tg$ (Nm)	$Tg_{max}$ (Nm)	$N_{max}$ (rpm)	$Jg$ (gcm <sup>2</sup> )	$m$ (kg)
		4.5	6	40000	0.85	0.203
		$n_r = 159$				

#### Algoritmo 1 Optimización Método Complex

```

Para  $x^{(L)} \leq x \leq x^{(U)}$ ,  $\alpha$ ,  $N_r$ , y  $\delta$ 
1: Se crea población inicial aleatoria  $x^p$  de  $m$  puntos
   factibles,  $x^p \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 
2: for  $i = 1 : m$  do                                ▷ evaluar factibilidad de  $x_i^p$ 
3:   if  $x_i^p$  no es factible then
4:     Reemplazar  $x_i^p$  hasta que sea factible          ▷
     replazo aleatorio o usando centroide
5:   end if
6:   Evaluar  $f(x_i^p)$                                 ▷ fitness
7: end for
8: while  $gen < gen_{max}$  ó  $|f(x_b) - f(x_w)| > \delta$  do
9:    $x_b = f_{\min}(x^p)$                                 ▷ identifica mejor punto
10:   $x_w = f_{\max}(x^p)$                                 ▷ identifica peor punto
11:  Calcular  $x_c$                                     ▷ centroide
12:  Calcular  $x_{cand}$                                   ▷ reflexión de  $x_w$  por  $x_c$ 
13:  for  $j=1:n$  do
14:    if  $x_{cand}^j < x^{(L)}$  then  $x_{cand}^j = x^{(L)}$     ▷ límites
15:    if  $x_{cand}^j > x^{(U)}$  then  $x_{cand}^j = x^{(U)}$ 
16:  end for
17:  Evaluar factibilidad de  $x_{cand}$ 
18:  Evaluar  $f(x_{cand})$                                 ▷ fitness
19:  if  $f(x_{cand}) > f(x_w)$  then
20:     $k_r = 1$ 
21:    while  $f(x_{cand}) > f(x_w)$  do
22:      Calcular  $\varepsilon$                                 ▷ ajuste de reflexión
23:       $k = rand[0, 1]$ 
24:      Calcular  $x_{cand}^{new}$                             ▷ nueva reflexión
25:      for  $j=1:n$  do
26:        if  $x_{cand}^{j,new} < x^{(L)}$  then  $x_{cand}^{j,new} = x^{(L)}$ 
27:        if  $x_{cand}^{j,new} > x^{(U)}$  then  $x_{cand}^{j,new} = x^{(U)}$ 
28:      end for
29:      Evaluar factibilidad de  $x_{cand}^{new}$ 
30:      Evaluar  $f(x_{cand} = x_{cand}^{new})$                 ▷ fitness
31:       $k_r = k_r + 1$ 
32:       $gen = gen + 1$ 
33:    end while
34:     $x_w = x_{cand}^{new}$ 
35:  else
36:     $x_w = x_{cand}$ 
37:  end if
38:   $gen = gen + 1$ 
39: end while
40:  $x^* = x_b$                                         ▷ vector óptimo
    
```

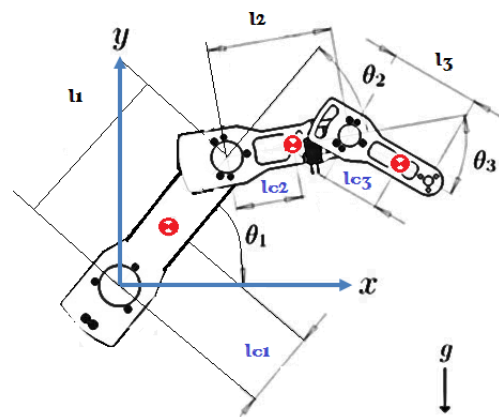


Figura 4. Robot Caso de Estudio

Cuadro 2. Parámetros del robot

Articulación	m [Kg]	I [(Kgm <sup>2</sup> )]	l <sub>c</sub> [m]	l [m]
1	0.7	16.84 × 10 <sup>-03</sup>	0.144	0.175
2	0.6	8.4 × 10 <sup>-03</sup>	0.108	0.130
3	0.12	0.25 × 10 <sup>-03</sup>	0.060	0.145

Los parámetros considerados para modelar el sistema en este caso de estudio, se muestran en el Cuadro 2. Más información sobre construcción y diseño del manipulador en Muro-Maldonado D. (2007).

Se asigna una tarea al robot en una referencia deseada como trayectoria en espacio de trabajo (x, y). Por simplicidad, se propone una trayectoria circular que debe realizarse en un tiempo t<sub>f</sub> = 10 segundos, donde el centro del círculo tiene coordenadas (c<sub>x</sub>, c<sub>y</sub>) = (0.15, 0.15), un radio r = 0.14 m y se fija una orientación para el efector final como φ = 45°.

A partir del ciclo de trabajo se obtiene por cinemática inversa los movimientos deseados en coordenadas articulares.

*Problema de Optimización de Diseño* Para probar el algoritmo se escogieron 9 motores y 7 reductores Maxon de un catálogo, generando la base de datos para la optimización de diseño, Cuadros 3 y 4.

La función objetivo f(z), se define como la ecuación (17) con el vector de estado z = [z<sub>m</sub>, z<sub>g</sub>] con los índices de motores z<sub>m</sub> = [z<sub>m1</sub>, z<sub>m2</sub>, z<sub>m3</sub>] y reductores z<sub>g</sub> = [z<sub>g1</sub>, z<sub>g2</sub>, z<sub>g3</sub>]. Se crea una población m = 1000, z ∈ ℝ<sup>m×6</sup>, población con la cual se mostró una convergencia antes del criterio de paro, gen<sub>max</sub> = 5000. Para el criterio de convergencia, se consideró un umbral δ = 0.0001, el cual se logra a los 97.903444 segundos. El conjunto de variables de decisión evaluados reflejan el peso total calculado, Figura (5). Se obtiene la variable óptima, cuyos índices de motores y reductores son z<sub>op</sub> = [3, 3, 3, 6, 6, 7]. Esta evaluación depende del espacio de factibilidad dado, es decir, de los motores y reductores candidatos, Figuras (6) y (7).

Se comparan los pares iniciales del robot con respecto a los arrojados por el algoritmo, observando mejoría con el algoritmo de optimización. Figuras (8),(9) y (10).

Cuadro 3. Motores. Base de datos

No.	Modelo-Tipo	T <sub>m</sub> (Nm)	T <sub>mmax</sub> (Nm)	ω <sub>max</sub> (rpm)	J <sub>m</sub> (kgm <sup>2</sup> )	m (kg)
1	EC-22	0.0204	0.243	28400	2.39 × 10 <sup>-07</sup>	0.85
2	EC32	0.0472	0.355	9450	2 × 10 <sup>-06</sup>	0.27
3	EC30	0.0338	0.160	7220	1.1 × 10 <sup>-06</sup>	0.195
4	EC30	0.0333	0.154	7090	1.1 × 10 <sup>-06</sup>	0.195
5	EC32F	0.0255	0.0255	2760	3.5 × 10 <sup>-06</sup>	0.46
6	RE 30	0.0882	1.02	12000	3.45 × 10 <sup>-06</sup>	0.238
7	EC 32	0.0426	0.353	25000	2 × 10 <sup>-06</sup>	0.27
8	RE 35	0.0965	0.967	12000	6.74 × 10 <sup>-06</sup>	0.34
9	RE 36	0.0795	0.785	12000	6.72 × 10 <sup>-06</sup>	0.35

Cuadro 4. Reductores. Base de datos

No.	Modelo-Tipo	Rel. (n <sub>r</sub> )	T <sub>g</sub> (Nm)	T <sub>gmax</sub> (Nm)	N <sub>max</sub> (rpm)	J <sub>g</sub> (kgm <sup>2</sup> )	m (kg)
1	GP22	198	1.8	2.7	8000	4 × 10 <sup>-08</sup>	0.81
2	GP32	71	4.5	6.2	4000	7 × 10 <sup>-08</sup>	0.24
3	GP32	100	4.5	6.2	4000	7 × 10 <sup>-08</sup>	0.24
4	KD32	123	3.5	4.4	8000	2.2 × 10 <sup>-08</sup>	0.23
5	KD32	158	3.5	4.4	8000	3.5 × 10 <sup>-08</sup>	0.23
6	GP32A	111	4.5	6.5	6000	7 × 10 <sup>-08</sup>	0.226
7	GP32A	246	4.5	6.5	6000	7 × 10 <sup>-08</sup>	0.226

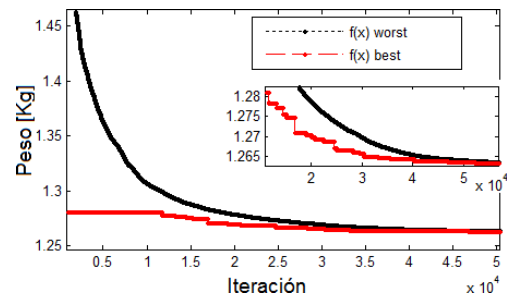


Figura 5. Evolución del algoritmo con respecto al peso

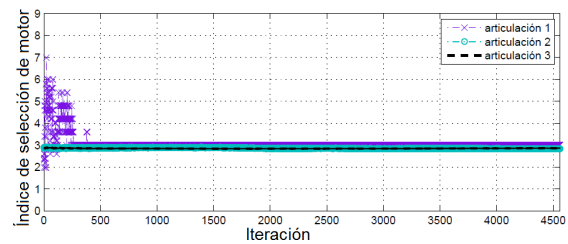


Figura 6. Evolución en el índice de selección de motor

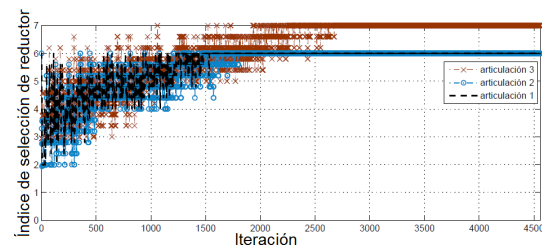


Figura 7. Evolución en el índice de selección del reductor

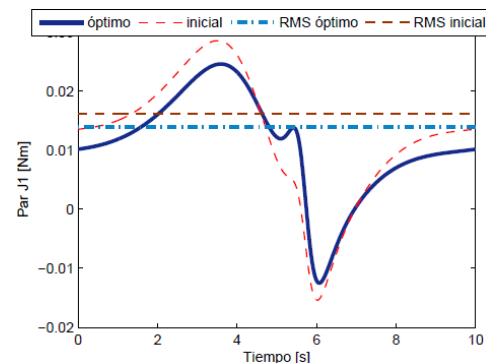


Figura 8. Comparación de pares en articulación 1

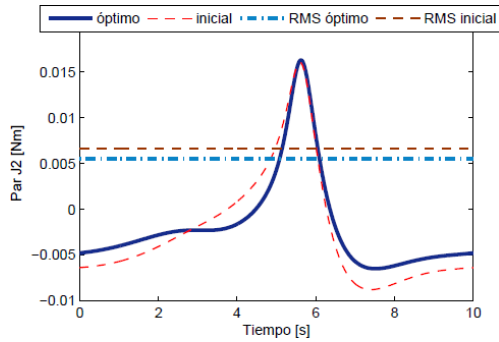


Figura 9. Comparación de pares en articulación 2

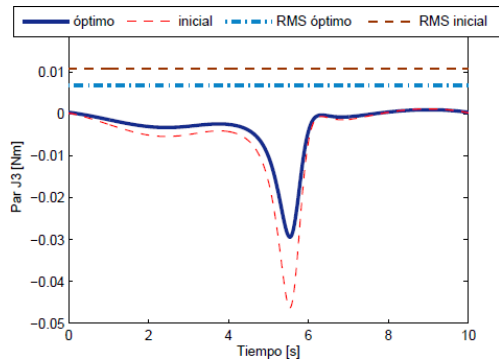


Figura 10. Comparación de pares en articulación 3

**Problema de Optimización de Control** Dada una selección óptima de componentes, se considera obtener las señales de control del sistema mediante el problema de optimización descrito en (18) y sujeto al modelo del sistema completo. Se propone una población  $m = 1000$  con un umbral de convergencia  $\delta = 0.0001$  el cual se logra antes de las 300 generaciones ( $gen_{max} = 1000$ ). Las matrices de ganancias óptimas obtenidas son

$$\mathbf{K}_p = \text{diag}([79.4904, 102.7671, 82.7926])$$

$$\mathbf{K}_d = \text{diag}([58.496, 139.9129, 202804])$$

$$\mathbf{K}_i = \text{diag}([170.6924, 170.6924, 170.6924])$$

donde la respuesta con condiciones iniciales  $x_0 = 0.15$ ,  $y_0 = 0.15$  y  $\phi_0 = 45^\circ$  se muestra en la Figura (11) y los errores de posición son mostrados en la Figura (12), mostrando el desempeño del sistema completo.

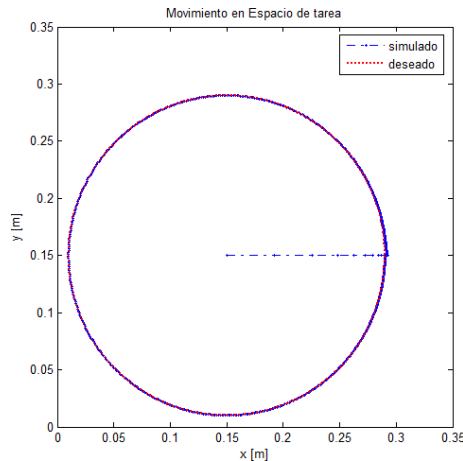


Figura 11. Respuesta en espacio de trabajo

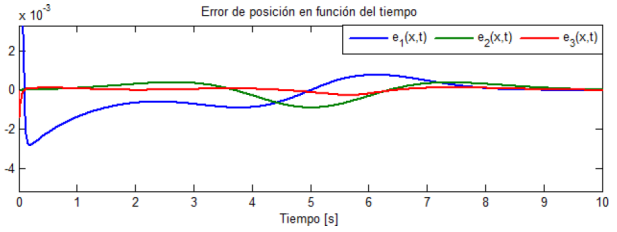


Figura 12. Errores de posición en el tiempo

## 5. CONCLUSIONES

Se implementó un método de optimización secuencial en el Diseño y Control del tren de potencia de un robot manipulador con variables discretas y continuas para la selección óptima en la combinación motor/reductor considerando componentes comercialmente disponibles y sintonización de ganancias del controlador. Se propone a futuro, abordar una extensión del presente trabajo mediante una optimización concurrente de Diseño/Control, ya que una estrategia de este tipo implica la solución óptima del sistema combinado completo.

## REFERENCIAS

- Box, M. (1965). A new method of constrained optimization and a comparison with other methods. *Computer Journal* 8, 42–52.
- Chedmail P, G.M. (1990). Optimum choice of robot actuators. *J Eng Ind* 1990;112-361.
- Cusimano, G. (2007). Optimization of the choice of the system electric drive device transmission for mechatronic applications. *Mechanism and Machine Theory*, 42, 48–65.
- Cusimano, G. (2013). Influence of the reducer efficiencies on the choice of motor and transmission: Torque peak of the motor. *Mechanism and Machine Theory*, 16, 122–151.
- Fredrik Roos, Hans Johansson, J.W. (2006). Optimal selection of motor and gearhead in mechatronic applications. *Mechatronics*, 16, 63–72.
- Giberti, H. and Cinquemani, S. (2012). Motor-reducer sizing through a matlab-based graphical technique. *IEEE transactions on education*, 55:4, 552–558.
- Lelai Zhou, Shaoping, M.R.H. (2011). Design optimization on the drive train of a light-weight robotic arm. *Mechatronics* 21, 560–569.
- Lelai Zhoua, Shaoping, M.R.H. (2012). Integrated dimensional and drive-train design optimization of a light-weight anthropomorphic arm. *Robotics and Autonomous Systems* 60, 113–122.
- Muro-Maldonado D., Cruz-Villar C.A., R.A.A. (2007). Diseño, modelado y construcción de un manipulador redundante. *In memories of the 5th congress CIINDET*.