

Optimización por Enjambre de Partículas para resolver el problema de control óptimo inverso en Seguimiento de Trayectorias

E. Rangel-Carrillo*, Santiago Elvira-Ceja**
Edgar N. Sánchez**, Alma Y. Alanis*, Nancy Arana-Daniel*

*CUCEI, Universidad de Guadalajara.

**Cinvestav, unidad Guadalajara.

Resumen: En este artículo se aplica exitosamente un optimizador por enjambre para resolver el problema de la búsqueda de una matriz real, simétrica y definida positiva; la cual resulta de suma importancia en un esquema de control óptimo inverso discreto para seguimiento de trayectorias en sistemas no lineales estocásticos. El esquema de optimización propuesto involucra una variante del algoritmo de optimización por enjambre de partículas original que consta de una partícula líder y un proceso de envejecimiento con inspiración biológica.

Palabras clave: Control Óptimo inverso, PSO, Optimización, Seguimiento de trayectorias, Computación natural.

1. INTRODUCCIÓN

En control óptimo no lineal estocástico se busca determinar una ley de control para un sistema determinado tal que el criterio de selección a priori sea minimizado (Yong and Zhou. 1999). En este esquema, la mayor dificultad radica en resolver la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman la cual es de tipo diferencial parcial de segundo orden. El problema fue resuelto por Crandall y Lions mediante la denominada solución viscosa (Crandall and Lions. Mayo 1983), mientras que Deng y Krstic utilizaron el esquema de control óptimo (Krstic and Deng. 1998). Ambos consideran únicamente el caso continuo en el tiempo.

Una ley de control óptimo inverso para la estabilización asintótica probabilística sobre una trayectoria deseada en un sistema estocástico no lineal discreto, fue propuesta por Elvira-Ceja y Sánchez (Elvira-Ceja and Sanchez, 2013). En este esquema, una ley de control basada en el conocimiento previo de una función de control estocástico en tiempo discreto de Lyapunov (DSCLF), es primeramente sintetizada y luego se establece que dicha ley optimiza una función de costo. Un requerimiento, para la estabilidad asintótica de la ley de control anterior, es la selección correcta de una matriz simétrica definida positiva, la cual se propone encontrar por medios heurísticos (Elvira-Ceja and Sanchez 2013).

Una alternativa a los medios heurísticos tradicionales y uno de los algoritmos más populares de optimización es el denominado: Optimización por enjambre de partículas (PSO) propuesto por Kennedy y Eberhart en 1995 (Kennedy and Eberhart 1995). Este esquema de optimización ha resultado muy popular en la solución de un gran número de problemas de ingeniería (Vrahatis N. and Parsopoulos 2010); una de sus características más notables es su alta velocidad de convergencia y su sencillez matemática. Sin embargo en condiciones de alta dimensionalidad, el PSO se enfrenta al problema de convergencia prematura, el cual ha sido resuelto

mediante la creación de variantes del algoritmo original, tales como: la optimización por enjambre de partículas con envejecimiento de líder y competidores (ALC-PSO) propuesta por Wei-Neng (Wei-Neng, et al. 2013) o la optimización por enjambre de partículas con operador de envejecimiento para la optimización de funciones multimodales (PSOA) propuesta por Jiang, Wang y Li (Jiang, Wang and Li 2014).

En este artículo se propone el uso de una variante de PSO con un factor de envejecimiento como solución del problema de la selección de la matriz simétrica definida positiva requerida para la DSCLF mencionada con anterioridad.

Este artículo se organiza de la siguiente manera: En la Sección 2 se presenta un resumen sobre el DSCLF. La Sección 3 se dedica al PSO y una de sus variantes con factor de envejecimiento. La Sección 4 presenta el esquema propuesto para utilizar PSO en DSCLF. En la Sección 5 se muestran los resultados comparativos con diferentes configuraciones. Finalmente este artículo ofrece en la Sección 6 las conclusiones y el trabajo futuro.

2. FUNCIÓN DE CONTROL DE LYAPUNOV EN TIEMPO DISCRETO (DSCLF)

En (Elvira-Ceja and Sanchez 2013) se considera la siguiente ecuación estocástica a diferencias:

$$x_{k+1} = f(x_k) + g(x_k)u_k + h(x_k)\omega_k, \quad x_0 = \hat{x}_0 \quad (1)$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $u_k \in \mathbb{R}^{m_1}$ es la entrada de control y $\omega_k \in \mathbb{R}^{m_2}$ es una secuencia de variables aleatorias independientes con media igual a cero y covarianza Φ ; los mapeos suaves $f(x_k) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(x_k) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m_1}$ y $h(x_k) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m_2}$ se

consideran conocidos con $f(0) = h(0) = 0$ y $g(x_k) \neq 0$ para todo $x_k \neq 0$. La condición inicial x_0 es una variable aleatoria normalizada con media m y covarianza Ψ , tal que x_k y ω_k sean independientes. También se supone que Ψ y Φ son matrices semi-definidas positivas de dimensión apropiada.

Elvira-Ceja y Sánchez desarrollan la síntesis de la ley de control para el sistema (1) mediante el esquema óptimo inverso (Elvira-Ceja and Sanchez 2013) y proponen la siguiente DSCLF:

$$V(z_k) = \frac{1}{2} z_k^T P z_k \quad (2)$$

donde $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz real definida positiva. $z_k = x_k - \tilde{x}_k$ es el error de aproximación y \tilde{x}_k es la trayectoria deseada para x_k .

Se propone la siguiente ley de control para el sistema (1).

$$u_k^* = \alpha(x_k) = -\frac{1}{2}(R + P_2(x_k))^{-1} P_1(x_k, \tilde{x}_{k+1}) \quad (3)$$

donde $P_1(x_k, \tilde{x}_{k+1}) = g^T(x_k)P(f(x_k) - \tilde{x}_{k+1}), P_2(x_k) = \frac{1}{2}g^T(x_k)Pg(x_k)$ y R es un escalar que se supone conocido.

Para lograr la estabilidad asintótica del punto de equilibrio $z = 0$ del sistema (1), utilizando la ley de control (3) con la DSCLF (2), es necesario que la siguiente desigualdad se cumpla:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(f^T(x_k)Pf(x_k) - x_k^T P x_k - \tilde{x}_k^T P \tilde{x}_k + \tilde{x}_{k+1}^T P \tilde{x}_{k+1} + \\ & \quad \text{tr}[\Phi h^T(x_k)Ph(x_k)]) - \\ & \quad \frac{1}{4}P^T_1(x_k, \tilde{x}_{k+1})(R + P_2(x_k))^{-1}P_1(x_k, \tilde{x}_{k+1}) \leq \\ & -\frac{1}{2}\|P\|(\|f(x_k)\|^2 + \|x_k\|^2 + \|\tilde{x}_k\|^2 + \|\tilde{x}_{k+1}\|^2) \quad (4) \end{aligned}$$

Para obtener P , se propone en (Elvira-Ceja and Sanchez 2013) utilizar métodos heurísticos. De entre los diferentes esquemas de optimización disponibles en el estado del arte, en este artículo se decidió utilizar el algoritmo de optimización por enjambre de partículas, debido a su gran velocidad de convergencia y su bajo costo computacional.

3. OPTIMIZACIÓN POR ENJAMBRE DE PARTÍCULAS

La optimización por enjambre de partículas (Kennedy and Eberhart 1995) es un algoritmo evolutivo basado en las observaciones del comportamiento de parvadas de pájaros y enjambre de insectos, el cual provee una velocidad de convergencia alta y ha mostrado resultados excelentes en la solución de diversos problemas de ingeniería (Vrahatis N. and Parsopoulos 2010).

El modelo matemático del algoritmo en (Kennedy and Eberhart 1995) se define como sigue:

$$v_{ij}(t+1) = v_{ij}(t) + c_1 R_1 (p_{ij}(t) - c_{ij}(t)) + c_2 R_2 (p_{gj}(t) - c_{ij}(t)) \quad (5)$$

$$x_{ij}(t+1) = c_{ij}(t) + v_{ij}(t+1) \quad (6)$$

con:

$$i = 1, 2, \dots, S \quad j = 1, 2, \dots, D$$

donde i es la i -ésima partícula del enjambre $S \in \mathbb{R}^D$; j es el j -ésimo elemento del problema de dimensión D ; t es el contador de iteraciones; R_1 y R_2 son valores aleatorios, normalizados y uniformemente distribuidos; c_1 y c_2 son los parámetros social y cognitivo respectivamente; $c_{ij}(t)$ es la posición de la partícula ij en la iteración t ; $v_{ij}(t)$ es la velocidad de la partícula ij en la iteración t ; $p_{ij}(t)$ es la mejor posición local de la partícula ij en la iteración t ; $p_{gj}(t)$ es la mejor posición global del enjambre en la iteración t .

Este método sencillo para calcular iterativamente la posición y velocidad de una partícula, resulta en una relación de convergencia alta, dado que p_{gj} atrae a cada partícula del enjambre hacia la mejor posición. Las partículas se mueven a través del espacio de búsqueda a una velocidad v_{ij} . Existe la posibilidad de que una partícula “toque” una mejor posición durante su movimiento, reemplazando así a p_{gj} . La dinámica anterior se sostiene para muchos problemas de ingeniería de complejidad alta (Clerc and Kennedy 2002); sin embargo, en problemas multimodales el algoritmo presenta convergencia prematura hacia un mínimo local en lugar de encontrar la solución global (Chen and Huang 2007).

3.1 Variante de PSO con función de envejecimiento

En 2013 Jiang, Wang y Li propusieron una variante de PSO denominada PSO con envejecimiento de líder y competidores (ALC-PSO) (Wei-Neng, et al. 2013) Este nuevo algoritmo mejora el problema de la convergencia prematura de PSO asignando una propiedad de liderazgo del enjambre a una partícula (denominada *líder*) e incluyendo un coeficiente linealmente creciente de envejecimiento para dicha partícula; posteriormente se evalúa la eficiencia del *líder* para guiar al enjambre hacia una posible solución global y se ajusta si expectativa de vida acorde a lo anterior. Mediante el agotamiento de la expectativa de vida, esta variante de PSO controla la guía del enjambre y selecciona aleatoriamente partículas que “retan” al *líder* por la guía del enjambre (Wei-Neng, et al. 2013).

El modelo matemático del algoritmo ALC-PSO satisface la siguiente igualdad:

$$v_{ij}(t+1) = v_{ij}(t) + c_1 R_1 (p_{ij}(t) - c_{ij}(t)) + c_2 R_2 (\textit{líder} - c_{ij}(t)) \quad (7)$$

donde *líder* es la partícula que contiene la mejor posición del enjambre en la iteración t . El resto de los parámetros de (7) es similar a los descritos en (5).

4. PSO UTILIZADO EN EL ESQUEMA DSCLF

En este artículo, se considera una variante de PSO con factor de envejecimiento aplicado al enjambre de partículas con el objetivo de encontrar la matriz P tal que cumpla con la desigualdad (4). El esquema propuesto cumple con el pseudocódigo mostrado en Fig. 1:

```

Inicializar  $c_1, c_2$ .
Inicializar total de iteraciones permitidas  $t_{max}$ .
Inicializar el error mínimo para la evaluación de
desempeño  $e_T$ 
Inicializar la expectativa de vida  $\theta$  en  $\theta_{max}$ 

Para cada partícula  $ij$  hacer
    Inicializar  $v_{ij}$ 
    Inicializar  $c_{ij}$  aleatoriamente dentro del espacio de
    búsqueda.
Fin
Obtener  $p_i(t)$ 
Mientras ( $t \leq t_{max}$ ) Y ( $e_g(t) > e_T$ ) hacer
    Para cada partícula  $ij$  hacer
        Evaluar  $f(c_{ij})$ .
        Calcular el desempeño de cada partícula  $e_i$ 
    Fin
    Calcule  $e_g(t) = \min_t e_i(t)$ 
    Si ( $e_i < e_i(p_{ij})$ ) entonces
        Actualizar  $p_i(t)$ 
    Fin
    Evaluar líder.
    Actualizar  $\theta$ .
    Si ( $\theta > \theta_{max}$ ) entonces
        Obtener competidor válido
    Fin
    Para cada partícula  $ij$  hacer
        Calcular  $v_{ij}(t + 1)$  y  $c_{ij}(t + 1)$ 
    Fin
Fin
    
```

Fig. 1. Pseudocódigo del esquema PSO con envejecimiento para DSCLF.

En el esquema mostrado en la Fig. 1, c_{ij} representa un enjambre de i matrices cuadradas P de dimensión j tales que cumplen con (4); $f(c_{ij})$ es la función de costo y corresponde a la evaluación de cada matriz P (partícula) en la desigualdad (4) para todo x_k ; e_T corresponde entonces a la suma de estados x_k para los cuales se cumple (4). El acotamiento del espacio de búsqueda para el algoritmo de PSO es un parámetro configurable del esquema y requiere cierto conocimiento previo del problema; por lo que en este artículo se proponen diferentes cotas para dicho espacio.

5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Para el desarrollo de este capítulo, se consideraron dos algoritmos de optimización: PSO y PSO con factor de envejecimiento. Para efectos comparativos se mantuvo la configuración de ambos algoritmos con la mayor semejanza posible. Dicha configuración consta de un enjambre de 20 partículas, cada partícula contiene 3 dimensiones (elementos de la matriz P), $c_1 = c_2 = 2.0$, $t_{max} = 1000$. Para el caso de la variante de PSO con envejecimiento, se seleccionó $\theta_{max} = 60$.

Los parámetros de configuración utilizados para la función de costo dada por (4) son: $x = [3.5; -1.5]$, $R = 0.5$, $\Phi = 0.2$, $\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, con $k = 1, \dots, 50$.

La Tabla 1 muestra las matrices P que cumplen con (4) encontradas por PSO y PSO con factor de envejecimiento en las diferentes cotas del espacio de búsqueda seleccionadas ($\pm 10, \pm 100$ y ± 1000).

Las figuras 2, 3 y 4 muestran el comportamiento del error global del enjambre ($e_g(t)$) para el esquema mostrado en la Fig. 1 con diferentes cotas para el espacio de búsqueda; en ellas se observa que la matriz P que cumple con (4) se encuentra en la iteración donde el error global del enjambre alcanza el valor esperado ($e_g(t) = 0$).

Los resultados comparativos de las tres diferentes cotas del espacio de búsqueda para el esquema mostrado en la Fig. 1 se pueden observar en la Tabla 2.

Las figuras 5, 6 y 7 muestran el comportamiento del error global del enjambre ($e_g(t)$) para el algoritmo de PSO original con diferentes cotas para el espacio de búsqueda; en ellas se observa que la matriz P que cumple con (4) se encuentra en la iteración donde el error global del enjambre alcanza el valor esperado ($e_g(t) = 0$).

Los resultados comparativos de las tres diferentes cotas del espacio de búsqueda utilizando el algoritmo de PSO original se pueden observar en la Tabla 3.

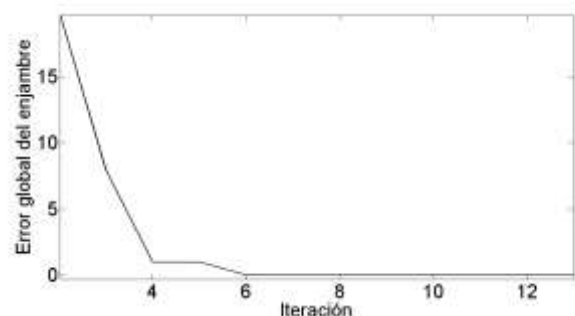


Fig. 2. Gráfica resultante del error $e_g(t)$ de PSO con variante de envejecimiento para un espacio de búsqueda = $[-10, 10]$.

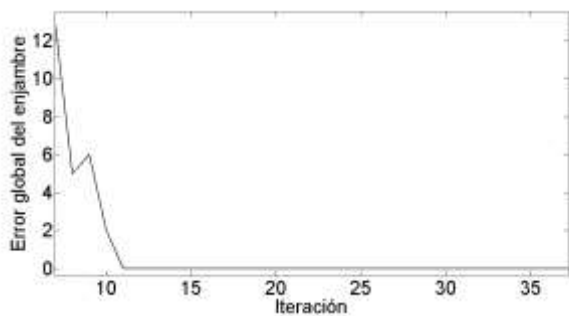


Fig. 3. Gráfica resultante del error $e_g(t)$ de PSO con variante de envejecimiento para un espacio de búsqueda = $[-100, 100]$.

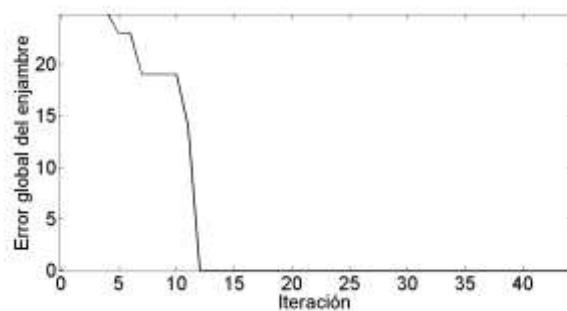


Fig. 6. Gráfica resultante del error $e_g(t)$ de PSO para un espacio de búsqueda = $[-100, 100]$.

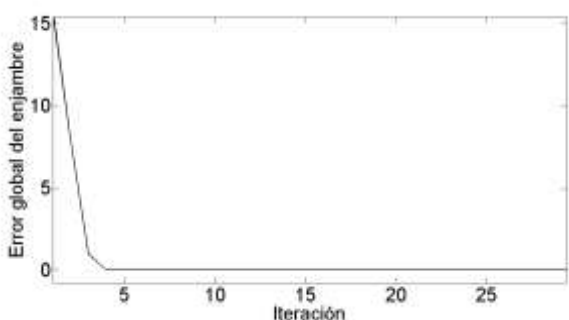


Fig. 4. Gráfica resultante del error $e_g(t)$ de PSO con variante de envejecimiento para un espacio de búsqueda = $[-1000, 1000]$.

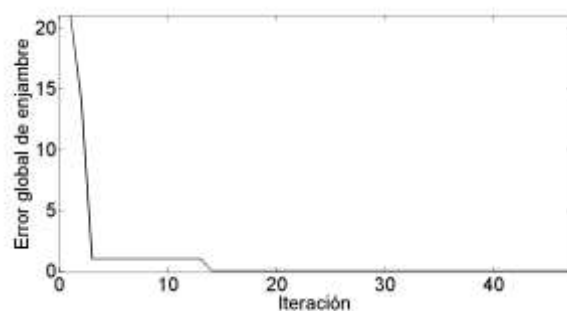


Fig. 7. Gráfica resultante del error $e_g(t)$ de PSO para un espacio de búsqueda = $[-1000, 1000]$.

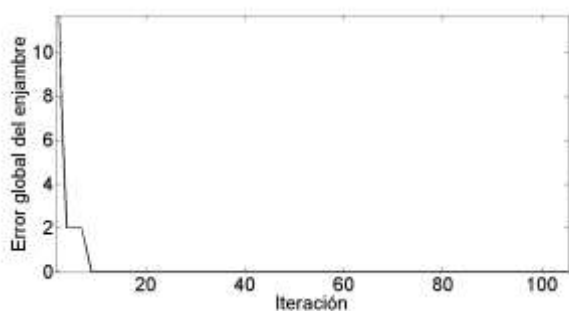


Fig. 5. Gráfica resultante del error $e_g(t)$ de PSO para un espacio de búsqueda = $[-10, 10]$.

Tabla 1. Matriz P encontrada por PSO y PSO con factor de envejecimiento para cada cota del espacio de búsqueda

Espacio de búsqueda $\mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz P encontrada con PSO	Matriz P encontrada con PSO con factor de envejecimiento
± 10	$\begin{bmatrix} 8.718 & 1.696 \\ 1.696 & 7.532 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3.791 & 0.194 \\ 0.194 & 3.324 \end{bmatrix}$
± 100	$\begin{bmatrix} 82.557 & 8.530 \\ 8.530 & 66.230 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11.938 & -0.279 \\ -0.279 & 11.847 \end{bmatrix}$
± 1000	$\begin{bmatrix} 480.631 & -181.458 \\ -181.458 & 415.137 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 931.15 & -88.880 \\ -88.880 & 791.218 \end{bmatrix}$

Tabla 2. Resultados comparativos para PSO con factor de envejecimiento

Espacio de búsqueda	Matriz P encontrada	Iteración $e_g(t) = 0$	Tiempo de ejecución en segundos
[-10, 10]	Si	6	0.979192
[-100,100]	Si	11	1.42396
[-1000,1000]	Si	4	0.738997

Tabla 3. Resultados comparativos para PSO

Espacio de búsqueda	Matriz P encontrada	Iteración $e_g(t) = 0$	Tiempo de ejecución
[-10, 10]	Si	9	0.33650 S
[-100, 100]	Si	12	0.46122 S
[-1000, 1000]	Si	14	0.50430 S

6. CONCLUSIONES

Los resultados de la Sección 5 muestran que el esquema propuesto en la Fig. 1 resuelve exitosamente el problema de encontrar una matriz P tal que cumpla con la desigualdad (4) para todo x_k , considerando los parámetros de configuración dados en la Sección 5 de esta publicación.

Si bien el algoritmo de PSO ofrece excelentes resultados como los observados en la Sección 5, la variante de PSO con envejecimiento ofrece una matriz P adecuada en menos iteraciones que el primero; esto es debido a que al implementar un factor de envejecimiento, resuelve el problema de la convergencia prematura del algoritmo de PSO. En el futuro, los autores trabajarán en la aplicación del esquema propuesto en una generalización del seguimiento de trayectorias.

BIBLIOGRAFÍA

- Chen, Guangyi GuoWei., and Kaisheng Huang (2007). "Online parameter identification of an induction motor using improved particle swarm optimization." Proceedings of the 26th Chinese Control Conference.
- Clerc, M., and J. Kennedy (2002). "The particle swarm - explosion, stability, and convergence in amultidimensional complex space." IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 6(1), 58-73.
- Crandall, M. G., and P.-L. Lions (1983). "Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations." Trans. American Mathematical Society, (277) 1-42.
- Elvira-Ceja, Santiago and Edgar N. Sanchez (2013). "Discrete-time inverse optimal control for stochastic nonlinear systems trajectory tracking." 52nd IEEE Conference on Decision and Control: 2483-2487.
- Jiang, B., N. Wang, and X. Li (2014). "Particle swarm optimizer with aging operator for multimodal function optimization." International journal of computational intelligence: 6 (5) 862-880.
- Kennedy, J., and R. Eberhart (1995). "Particle swarm optimization." Neural Networks. Proceedings., IEEE International Conference on, 1995: 1942-1948.
- Krstic, M., and H. Deng (1998). "Stabilization of nonlinear uncertain systems." New York: Springer-Verlag.
- Vrahatis N., Michael, and Konstantinos E. Parsopoulos. "Particle swarm optimization and intelligence, advances and applications." IGI Global, 2010.
- Wei-Neng, Chen, et al. (2013). "Particle swarm optimization with an aging leader and challengers." IEEE transactions on evolutionary computation: Vol. 17, No.2, pp. 241-258.
- Yong, J., and X. Y. Zhou (1999). "Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equation." Springer-Verlag. New York.