

## Modelo Complejo Extendido de Lü <sup>★</sup>

L. A. Quezada-Téllez <sup>\*</sup> G. Fernández-Anaya <sup>\*</sup> J. J. Flores-Godoy <sup>\*\*</sup>,<sup>1</sup>

<sup>\*</sup> Departamento de Física y Matemáticas, Universidad Iberoamericana,  
01219, Mexico, Mexico (e-mail: alquezada@ciencias.unam.mx,  
guillermo.fernandez@ibero.mx).

<sup>\*\*</sup> Departamento de Matemáticas, Facultad de Ingeniería y Tecnologías,  
Universidad Católica del Uruguay, 11600, Montevideo, Uruguay (e-mail:  
jose.flores@ucu.edu.uy).

---

**Resumen:** En el presente trabajo se propone un modelo complejo extendido de Lü, el cual se obtiene por una ampliación del espacio de  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{C}^3$ , tomando las mismas ecuaciones del modelo tradicional de Lü (ML). Se analiza la estabilidad local del sistema, el cual es inestable en los puntos de equilibrio del mismo. No es claro el comportamiento dinámico global de este modelo, y tenemos argumentos para pensar que este sistema es hipercaótico en  $\mathbb{R}^6$ , dado que dos exponentes de Lyapunov son positivos. Mostramos algunas simulaciones de las trayectorias del sistema, dando como resultado un comportamiento con dinámica compleja. Existen evidencias fuertes de ciclos límites en algunas de las trayectorias mostradas, el caso más interesante es una comportamiento que hemos llamado las “*alas de Lü*”.

**Palabras Clave:** Sistemas caóticos, variable compleja.

---

### 1. INTRODUCCIÓN

Un sistema dinámico continuo no lineal como el atractor de Lorenz de 1963 ha sido ampliamente estudiado en la literatura sobre sistemas dinámicos caóticos. Este modelo despertó gran interés al visualizar el comportamiento que tenían sus trayectorias en el plano fase [Lorenz, 1963]. En 1999, Chen formuló otro atractor a partir de un simple sistema autónomo tridimensional, este sistema no es difeomorfo con el de Lorenz, y es conocido ahora como el atractor de Chen [Chen and Ueta, 1999]. Para el 2002, Lü propuso otro atractor también a partir de un sistema autónomo tridimensional. Este sistema presenta un rango en el que ciertos valores del parámetro el sistema muestra un atractor caótico de diferentes formas, el cual tampoco es difeomorfo con el de Lorenz. A partir de estos tres atractores podemos encontrar una amplia gama de investigaciones sobre aplicaciones a diferentes áreas del conocimiento. Cuando se aplica variables complejas a los sistemas de comunicación se duplica el número de variables, incrementando el contenido y la seguridad de la información transmitida. [Lü and Chen, 2002].

Comportamientos más complejos han presentado sistemas dinámicos que en la actualidad se denominan sistemas hipercaóticos. El hipercaos fue introducido por Rössler en 1979 [Moghtadaei and Golpayegani, 2012], como una forma superior al caos con al menos dos direcciones de inestabilidad hiperbólica en el atractor (dos o más exponentes de Lyapunov positivos). En contraste con los atractores caóticos, los atractores hipercaóticos han captado mayor atención debido a la alta complejidad que presentan. Una

de múltiples aplicaciones de estos sistemas hipercaóticos en altas dimensiones es la comunicación segura; los mensajes y las imágenes encriptadas brindan una alta impredecibilidad a los que transmiten y reciben la información, siendo una manera segura de compartir información [Moghtadaei and Golpayegani, 2012].

El Modelo Complejo de Lorenz fue introducido por primera vez por Gibbon & McGuinness en 1982 [Gómez-Mont et al., 2013], como una generalización del modelo original de Lorenz. En este trabajo toman las variables  $x$  y  $y$  como variables complejas y  $z$  como variable real. Más adelante en el trabajo de Mahmoud, Ahmed, M. E. & Mahmoud, E. E. en 2008 [Mahmoud et al., 2008] desarrollan un modelo complejo de Lorenz hipercaótico. En 2012 Gómez-Mont et al, presentan el estudio de un modelo complejo extendido de Lorenz, donde las tres variables  $x, y$  y  $z$  son complejas y los parámetros son reales. En el modelo complejo extendido de Lorenz presentan dos exponentes de Lyapunov positivos, por lo que en dicho atractor se sospecha un comportamiento hipercaótico en  $\mathbb{R}^5$  [Gómez-Mont et al., 2013].

En este trabajo presentamos resultados parciales del análisis de estabilidad local del Modelo Complejo Extendido de Lü (MCEL), en este modelo todas sus variables son complejas y los parámetros son reales. En la siguiente sección se presentan algunos preliminares matemáticos para abordar el análisis de estabilidad, posteriormente se presenta el modelo complejo extendido de Lü, así como algunas simulaciones hechas sobre el comportamiento del sistema.

### 2. PRELIMINARES

En esta sección presentamos la notación y definiciones usadas en el presente trabajo. Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  una vecindad del origen en  $\mathbb{C}^n$ , con  $i = \sqrt{-1}$ . Entonces si tenemos:

---

<sup>\*</sup> Este trabajo es apoyado por la Universidad Iberoamericana, Campus Ciudad de México. Agradecemos su colaboración y apoyo al Dr. Salvador Carrillo Moreno.

<sup>1</sup> De licencia del Departamento de Física y Matemáticas, Universidad Iberoamericana, 01219, México, México.

$$\frac{dz}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \quad (1)$$

$$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0 \in \mathbb{C}^n$$

donde  $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = (f_1(\mathbf{z}), \dots, f_n(\mathbf{z}))^\top$ ,  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^\top$ ,  $z_\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $f_\alpha(z) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{z}_e) = \mathbf{0}$ . Por la sustitución de  $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$  donde  $f_\alpha(z) = u_\alpha(x, y) + iv_\alpha(x, y)$ , el sistema (1) se puede reexpresar en el siguiente sistema con funciones reales de variables reales:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^\top$  y  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^\top$ . El homomorfismo entre el sistema de valores complejos (1) y el sistema de valores reales (2), nos permite emplear los métodos existentes de estabilidad para analizar el sistema complejo (1). Si linealizamos el sistema en torno al punto de equilibrio  $z_e = x_e + iy_e$ , tenemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J(x_e, y_e) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3)$$

donde,

$$J(x_e, y_e) = \left[ \frac{\partial(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)} \right]_{(x_e, y_e)} \quad (4)$$

es la matriz jacobiana de  $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$  evaluada en  $z_e = x_e + iy_e$ . Por lo tanto, juzgar la estabilidad local de un sistema no lineal se reduce al problema de encontrar los eigenvalores de su matriz jacobiana relacionada, como en el caso para sistemas evaluados en los reales.

### 3. EL MODELO COMPLEJO EXTENDIDO DE LÜ

Con [Lü and Chen, 2002] apareció un nuevo atractor caótico, conocido como el atractor de Lü, el cual es generado por un sistema autónomo tridimensional de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + ky \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (5)$$

donde los parámetros  $a = 36$  y  $b = 3$  son fijos cuando el parámetro  $k$  varía. Es necesario señalar que el sistema tiene atractores caóticos de diferentes formas, dado los valores que tome el parámetro  $k$ , por lo que el parámetro está acotado en  $12.7 < k < 29.345$ , [Lü and Chen, 2002].

En la Figura 1 se muestra el atractor clásico de Lü para una  $k = 20$ . Se puede observar que las trayectorias son muy parecidas al modelo clásico de Lorenz, a diferencia que su comportamiento se va modificando conforme los valores que adopte el parámetro  $k$ .

Ahora, considerado en  $\mathbb{C}^3$  el campo vectorial de Lü tenemos:

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -x \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6)$$

El campo vectorial del modelo de Lü en variables reales está dado por:

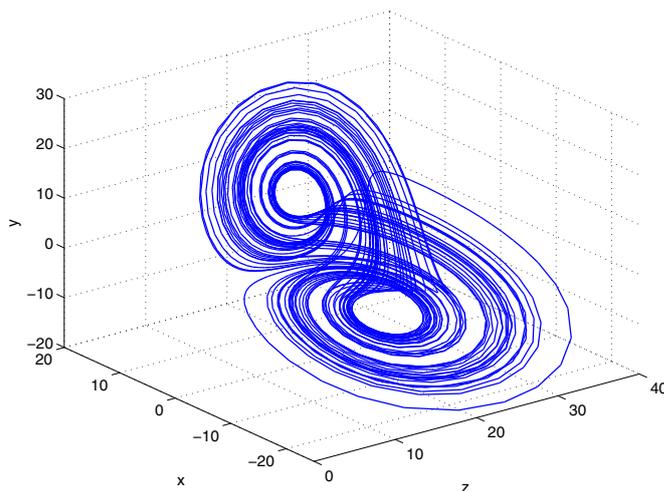


Fig. 1. Atractor clásico de Lü.

$$F = \begin{pmatrix} a(y_1 - x_1) \\ a(y_2 - x_2) \\ ky_1 - x_1z_1 + x_2z_2 \\ ky_2 - x_1z_2 - x_2z_1 \\ x_1y_1 - bz_1 - x_2y_2 \\ -bz_2 + x_1y_2 + x_2y_1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

y el campo vectorial del modelo de Lü imaginario es:

$$G = iF = \begin{pmatrix} a(x_2 - y_2) \\ a(y_1 - x_1) \\ -ky_2 + x_2z_1 + x_1z_2 \\ ky_1 - x_1z_1 + x_2z_2 \\ bz_2 - x_1y_2 - x_2y_1 \\ x_1y_1 - bz_1 - x_2y_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Por lo tanto, en el MCEL las tres variables son complejas y todos los parámetros son reales, esto es, en  $\mathbb{C}^3$  o bien  $\mathbb{R}^6$ . Dado que  $x = x_1 + ix_2$ ,  $y = y_1 + iy_2$  and  $z = z_1 + iz_2$ , obtenemos un nuevo modelo en 6D y haciendo algebra el sistema quedaría descrito por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_1 - ax_1 \\ ky_1 - x_1z_1 + x_2z_2 \\ -bz_1 + x_1y_1 - x_2y_2 \\ ay_2 - ax_2 \\ ky_2 - x_1z_2 - x_2z_1 \\ -bz_2 + x_1y_2 + x_2y_1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

En el anterior sistema, destaca que  $x_1$ ,  $y_1$  y  $z_1$  son la parte real del sistema, y para  $x_2$ ,  $y_2$  y  $z_2$  encontramos la parte imaginaria.

Como

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) &= (ay_1 - ax_1, ky_1 - x_1z_1 + x_2z_2, \\ &\quad -bz_1 + x_1y_1 - x_2y_2) \\ \mathbf{v}(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) &= (ay_2 - ax_2, ky_2 - x_1z_2 - x_2z_1, \\ &\quad -bz_2 + x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

son funciones diferenciables en  $\mathbb{R}^3$ , es fácil verificar que también satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann dadas por  $\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_1} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_2}$ ,  $\frac{\partial u_\alpha}{\partial y_1} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_2}$ ,  $\frac{\partial u_\alpha}{\partial z_1} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial z_2}$  y  $\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_2} = -\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial u_\alpha}{\partial y_2} = -\frac{\partial v_\alpha}{\partial y_1}$ ,  $\frac{\partial u_\alpha}{\partial z_2} = -\frac{\partial v_\alpha}{\partial z_1}$  para  $\alpha = 1, 2, 3$ , por lo tanto el sistema es holomorfo [Churchill and Ward, 1992]. Es preciso señalar que [Fang and Sun, 2013] presentan casos donde  $f(z)$

es no holomorfo. Mencionan que el sistema complejo de Lorenz, el sistema complejo de Chen y el complejo de Lü caen en estos tipos de sistemas no holomorfos, porque en estos sistemas consideran las variables  $x, y$ , complejas y la variable  $z$  real, pero involucrando las variables  $x, y$  conjugadas, esto implica que estos sistemas no sean holomorfos, y son sistemas en  $\mathbb{R}^5$ .

Como se probó anteriormente el sistema MCEL es holomorfo, esto es consecuencia de que las tres variables  $x, y, z$  son complejas y la diferenciabilidad de polinomios en tres variables reales. Con base en el análisis de estabilidad para sistemas complejos de [Fang and Sun, 2013], se toma el caso I para analizar la estabilidad de nuestro modelo, indicado más adelante en el Teorema 3.

La solución de las ecuaciones diferenciales:

$$(x', y', z') = F(x, y, z)$$

$$(x', y', z') = G(x, y, z)$$

da lugar a dos flujos  $F_t(p)$  y  $G_t(p)$  para todo  $t$ , dando ambos lugar a un dominio máximo por definición, en un subconjunto abierto en  $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}$ . El siguiente lema brinda información básica sobre la conmutatividad de los flujos  $F_t(p)$  y  $G_t(p)$ .

**Lema 1.** Los dos flujos  $F_t(p)$  y  $G_t(p)$  conmutan: para pequeños valores de  $t, t' \in \mathbb{R}$  y para cualquiera  $p$  en  $\mathbb{C}^3$ , tenemos:

$$F_t(G_{t'}(p)) = G_{t'}(F_t(p))$$

**Demostración.** El bracket de Lie de  $F$  y  $G$  es:  $[F, G] = [F, iF] = i[F, F] = i0 = 0$ , lo que implica que los flujos locales conmutan [Kobayashi and Nomizu, 1969].

A continuación presentamos un resultado basado en las derivadas de los flujos, que brinda información sobre su comportamiento. Las derivadas de  $F$  y  $G$  son:

$$DF = \begin{pmatrix} -a & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & 0 \\ -z_1 & z_2 & k & 0 & -x_1 & x_2 \\ -z_2 & -z_1 & 0 & k & -x_2 & -x_1 \\ y_1 & -y_2 & x_1 & -x_2 & -b & 0 \\ y_2 & y_1 & x_2 & x_1 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

$$DG = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & -a & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ z_2 & z_1 & 0 & -k & x_2 & x_1 \\ -z_1 & z_2 & k & 0 & -x_1 & x_2 \\ -y_2 & -y_1 & -x_2 & -x_1 & 0 & b \\ y_1 & -y_2 & x_1 & -x_2 & -b & 0 \end{pmatrix}$$

**Lema 2.**

- (1) Si  $k > 39$ , el flujo complejo de Lü  $F_t$  se está expandiendo en un volumen 6D con una tasa exponencial constante de  $2k - 78$ , y el flujo imaginario de Lü  $G_t$ , en el volumen 6D se preserva.
- (2) Si  $k < 39$ , el flujo complejo de Lü  $F_t$  se está contrayendo en un volumen 6D con una tasa exponencial constante de  $2k - 78$ , y el flujo imaginario de Lü  $G_t$ , en el volumen 6D se preserva.
- (3) Si  $k = 39$ , ambos el flujo complejo de Lü  $F_t$  y el flujo imaginario de Lü  $G_t$ , en el volumen 6D se preservan [Gómez-Mont et al., 2013].

Por lo tanto, en el caso del campo vectorial de MCEL, vemos que  $\text{Div}(F) = \text{Tr}(DF) = -2(a - k + b)$ . Si  $a = 36, b = 3$  y  $k = 14.5$  entonces  $\text{Div}(F) = -49$ . Entonces el flujo  $F_t$  es

contractivo en 6D a una tasa exponencial constante de  $-49$ , y  $\text{Div}(G) = \text{Tr}(DG) = 0$ , entonces el flujo  $G_t$  en el volumen 6D se preserva. Calculando los puntos de equilibrio del sistema (9), tenemos:

$$\begin{pmatrix} ay_1 - ax_1 \\ ay_2 - ax_2 \\ ky_1 - x_1z_1 + x_2z_2 \\ ky_2 - x_1z_2 - x_2z_1 \\ -bz_1 + x_1y_1 - x_2y_2 \\ -bz_2 + x_1y_2 + x_2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y obtenemos nueve puntos de equilibrio para dicho sistema. Tres de ellos son reales, y el resto de de los puntos de equilibrio del sistema son complejos conjugados. Los puntos de equilibrio reales para  $k = 14.5$  son los siguientes:

	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$z_1$	$z_2$
$Pe(5)$	0	0	0	0	0	0
$Pe(6)$	-6.5955	0	-6.5955	0	14.5	0
$Pe(7)$	6.5955	0	6.5955	0	14.5	0

Para determinar la estabilidad local del sistema (9) calculamos la matriz Jacobiana y obtenemos:

$$J = \begin{pmatrix} -36 & 36 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -36 & 36 & 0 \\ -z & 14.5 & -x & u & 0 & v \\ -u & 0 & -v & -z & 14.5 & -x \\ y & x & -3 & -w & -v & 0 \\ w & v & 0 & y & x & -3 \end{pmatrix}$$

**Teorema 3.** ([Fang and Sun, 2013]). Para el sistema (1) donde  $f(z)$  es una función de variable compleja holomorfa:

- (1) Si todos los valores característicos de  $J(z_e)$  están en el semiplano complejo izquierdo, el sistema (1) es localmente exponencialmente estable en  $z_e$ .
- (2) Si existe al menos un valor característico de  $J(z_e)$  y está en el semiplano complejo derecho, el sistema (1) no es localmente estable en  $z_e$ .
- (3) Si no hay valores característicos de  $J(z_e)$  que estén en el semiplano complejo derecho, y hay al menos un par de valores característicos que estén en el eje imaginario, la estabilidad local del sistema (1) en  $z_e$  no es clara.

A partir de la matriz Jacobiana obtenemos 6 valores característicos por cada uno de los puntos de equilibrio. Los valores característicos son:

	$J(Pe(5))$	$J(Pe(6))$	$J(Pe(7))$
$\lambda_1$	2.5879 + 12.569i	-5.2552 + 19.36i	-2.2336 - 8.4234i
$\lambda_2$	2.5879 - 12.569i	-5.2552 - 19.36i	-2.2336 + 8.4234i
$\lambda_3$	-36	0.17225 - 9.6204i	-31.861 + 11.051i
$\lambda_4$	9.4365	0.17225 + 9.6204i	-31.861 - 11.051i
$\lambda_5$	-3	-42.879	-7.3537
$\lambda_6$	-14.612	6.1404	15.446

los cuales por el Teorema 3, son localmente inestables. A partir de que los eigenvalores del sistema son hiperbólicos, observamos que la dinámica del MCEL es complicada e interesante.

#### 4. SIMULACIONES Y RESULTADOS

En esta sección presentamos algunas de las simulaciones realizadas en Matlab del modelo descrito en (9). Al igual que en el modelo tradicional de Lü, el parámetro  $k$  genera diferentes dinámicas en el MCEL. Para valores de  $k = 21$  y  $k = 29$ , el sistema con condiciones iniciales diferentes de los equilibrios

diverge. Para  $k = 14.5$ ,  $a = 36$  y  $b = 3$  se generaron 200 condiciones iniciales de manera aleatoria centradas en cero y radio 2.

De las 200 condiciones iniciales, 56 puntos presentan comportamientos con magnitud crecientes mayores a  $10^8$  en un intervalo menor a las 500 unidades de tiempo por lo que fueron desechados.

De las restantes 144 condiciones iniciales después de un transitorio violento se simuló durante 1000 unidades de tiempo con el fin de obtener una mejor aproximación del comportamiento en estado estable de la solución. Se simuló hasta por 1000 unidades de tiempo más para observar el comportamiento en estado estable, y sólo se utilizaron las últimas 100 unidades de tiempo.

Las siguientes figuras representan algunas de las gráficas obtenidas del sistema dadas sus condiciones iniciales. En la Fig. 2 con la condición inicial de  $(1.454, 0.41261, 0.68949)$  y  $(-0.20735, -0.17422, -0.17463)$  en  $\mathbb{R}^3$  para el caso real e imaginario, se proyecta en el inciso (a) el plano fase de la parte real, y en el inciso (b) la parte imaginaria del sistema. En el inciso (c) vemos la serie de tiempo de la parte real y el inciso (d) la serie de tiempo correspondiente a la parte imaginaria. El comportamiento aparenta ser una trayectoria periódica.

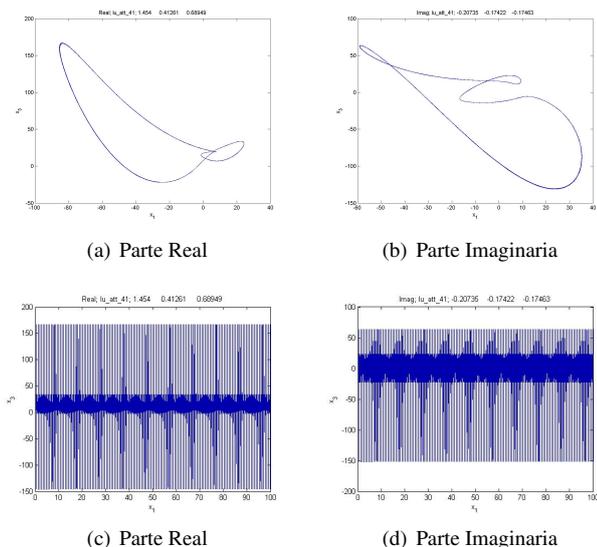


Fig. 2.

En la Fig. 3, bajo otra condición inicial en la parte real de  $(-0.83208, -0.29502, -0.13903)$  y la imaginaria de  $(-0.15308, 0.58617, 0.48048)$  ambas en  $\mathbb{R}^3$ , se generan comportamientos diferentes a los mostrados en la figura 2. Es importante señalar el comportamiento que describe la parte real del sistema bajo esa condición inicial (inciso a), dando forma a las alas de una mariposa. En la parte imaginaria también parecen formarse unas alas en sentido horizontal, aunque con un moño en la parte central de las alas. Para esta condición inicial el diagrama de fase aparenta ser otra trayectoria periódica.

En la Fig. 4 y en la Fig. 5 se muestran las trayectorias de las 144 condiciones iniciales para sus partes real e imaginaria del MCEL. Ambas imágenes destacan el comportamiento complejo de nuestro modelo, dando lugar a una forma que hemos llamado las “*alas de Lü*”. Para las trayectorias de la

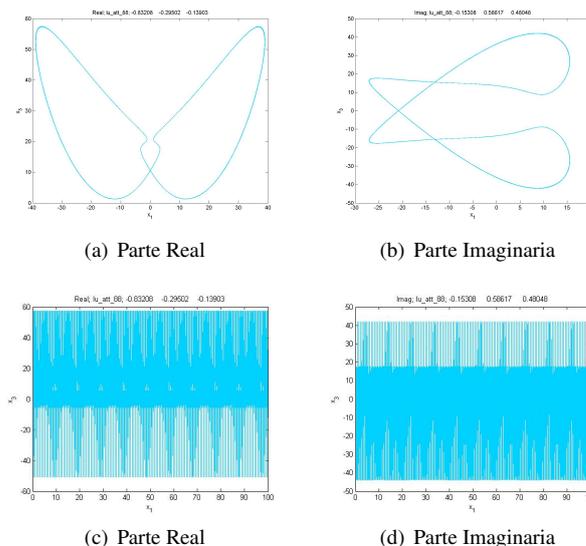


Fig. 3.

parte imaginaria del sistema en la Fig. 5, su comportamiento es similar al estudiado en el modelo complejo extendido de Lorenz pero en  $\mathbb{R}^2$  [Gómez-Mont et al., 2013].

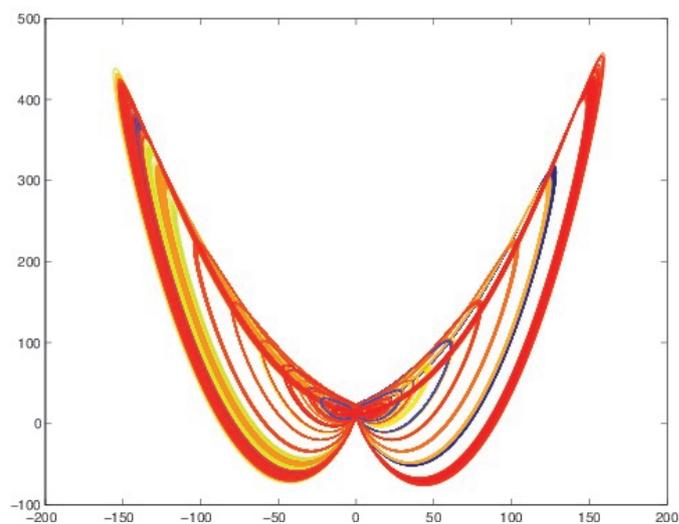


Fig. 4. Parte real de las trayectorias para 144 condiciones iniciales.

Encontramos que dos de los seis exponentes de Lyapunov son positivos para el MCEL. Los exponentes son  $\lambda_1 = 0.64276$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = -24.9517$ ,  $\lambda_4 = 0.6427$ ,  $\lambda_5 = 0$ ,  $\lambda_6 = -24.9517$  para 10,000 unidades de tiempo. Las condiciones iniciales para la parte real fueron de  $x_1 = y_1 = z_1 = 1$ , y para la parte imaginaria de  $x_2 = y_2 = z_2 = 0$ . En la Fig. 5 se muestra la dinámica de los exponentes de Lyapunov con las mismas condiciones iniciales anteriormente señaladas.

## 5. CONCLUSIONES

El Modelo Complejo Extendido de Lü es localmente inestable en sus puntos de equilibrio. Obtuvimos que el flujo  $F_t$  es contractivo en 6D a una tasa exponencial constante de  $-49$ , y que el flujo  $G_t$  en el volumen 6D se preserva. Dadas las simulaciones presentadas en la sección anterior encontramos un comportamiento complejo del sistema, principalmente las alas

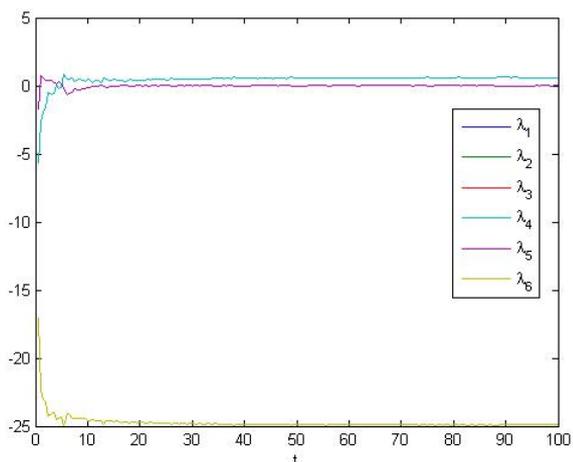


Fig. 5. Exponentes de Lyapunov

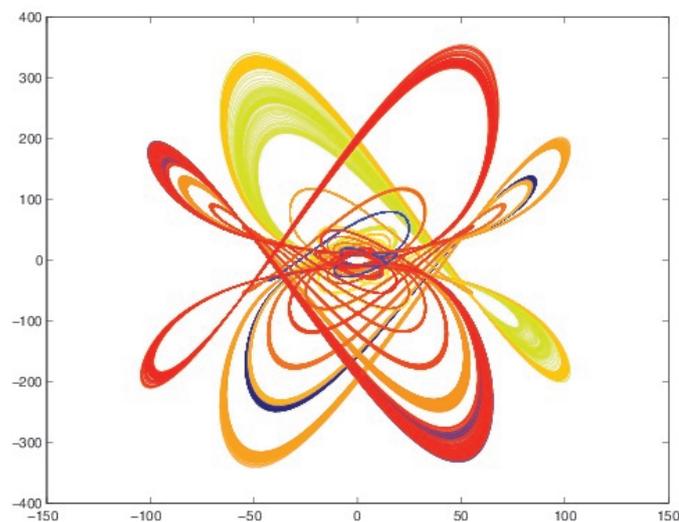


Fig. 6. Parte imaginaria de las trayectorias para 144 condiciones iniciales.

de Lü. Se obtuvieron dos exponentes de Lyapunov positivos para el MCEL. Actualmente estudiamos una técnica de control basada en el método de Lyapunov para la sincronización del sistema maestro y esclavo. Un análisis más detallado de MCEL se presentará en futuras investigaciones.

#### BIBLIOGRAFÍA

- G. Chen and T. Ueta. Yet another chaotic attractor. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 9:1465–1466, 1999.
- R. V. Churchill and J. B. Ward. *Variable Compleja y sus aplicaciones*. McGraw-Hill, 5a edition, 1992.
- T. Fang and J. Sun. Stability analysis of complex-valued nonlinear differential system. *Journal of Applied Mathematics*, 2013:621957, 2013.
- X. Gómez-Mont, J. J. Flores-Godoy, and G. Fernández-Anaya. Some attractors in the extended complex Lorenz model. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, 23(9):1330031, 2013.
- S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry. Vol. II*. John Wiley & Sons, 1969.
- E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20(2):130–141, 1963.
- J. Lü and G. Chen. A new chaotic attractor coined. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, 12(3):659–661, 2002.
- G. M. Mahmoud, M. E. Ahmed, and E. E. Mahmoud. Analysis of hyperchaotic complex Lorenz systems. *Int. J. Mod. Phys. C*, 19(10):1477, 2008.
- M. Moghtadaei and M. R. Hashemi Golpayegani. Complex dynamic behaviors of the complex Lorenz system. *Scientia Iranica, Transactions D: Computer Science & Engineering and Electrical Engineering*, 19(3):733–738, 2012.