

# Diseño de observadores que preservan el orden para sistemas no lineales usando transformación de coordenadas

Jesús D. Avilés\* Jaime A. Moreno\*\*

\* Facultad de Ingeniería y Negocios-UABC, Tecate, 21460 México B.C., (e-mail: david.aviles@uabc.edu.mx).

\*\* Instituto de Ingeniería-UNAM, Coyoacán, 04510 México D.F., (e-mail: JmorenoP@iingen.unam.mx)

---

## Resumen

En este trabajo se propone un diseño novedoso de los observadores que preservan el orden en coordenadas apropiadas para una clase de sistemas no lineales, en ausencia y en presencia de perturbaciones/incertidumbres, usando una transformación de estados Lineal Invariante en el Tiempo (LTI). El diseño está basado en la aplicación de la teoría de disipatividad y de cooperatividad en las dinámicas transformadas de los errores de estimación. La disipatividad asegura la estabilidad asintótica del sistema del error de estimación, tanto de las coordenadas originales como de las coordenadas transformadas, cuando no están presentes las perturbaciones en la planta. La cooperatividad es una propiedad dependiente de las coordenadas, que permite la preservación del orden de las estimaciones con respecto a la trayectoria del estado mediante la transformación de coordenadas LTI adecuada, en una clase de sistemas no lineales. El diseño computacional puede ser llevado, en algunos casos, a la solución de problemas de factibilidad de desigualdades matriciales lineales (LMI's, por sus siglas en inglés).

*Palabras Claves:* Observadores que Preservan el Orden, Observadores Intervalo, Observadores Disipativos, Sistemas Cooperativos.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Los *observadores que preservan el orden* proporcionan una estimación que está por encima, o por debajo, de la trayectoria real del estado. Ésta clase de estimadores está basada en la teoría de los sistemas cooperativos (Angeli and Sontag, 2003; Hirsch and Smith, 2005). En la literatura, los observadores que preservan el orden surgen para hacer frente a las mediciones de sistemas altamente inciertos, ya sea por afectación de perturbaciones o incertidumbre paramétrica, proponiendo estimaciones que limiten dinámicamente al estado real, asociadas con la incorporación de cotas de las perturbaciones del sistema en la dinámica del estimador. El *observador intervalo*, así llamado en (Gouze et al., 2000) es la primera aplicación de los observadores que preservan el orden, basado en una estructura dinámica de dos observadores que preservan el orden, proporcionan una estimación que está siempre por encima, y por debajo, de la trayectoria real del estado, dependiendo de condiciones iniciales apropiadas. Una ejecución simultánea de observadores intervalo se presentó en (Bernard and Gouze, 2004; Moisan et al., 2009) tomando la mejor estimación en cada instante de tiempo. Algunas de las estimaciones pueden ser inestables. En este caso los observadores que preservan el orden son llamados *framers*, término generalizado en (Mazenc and Bernard, 2011), ya que no tienen propiedades de estabilidad. Recientemente, en (Avilés and Moreno, 2009, 2013) se propuso un diseño de observadores que preservan el orden, para una clase de sistemas no lineales

en ausencia y presencia de perturbaciones, basado en la combinación de la propiedad sistémica de cooperatividad y de la metodología de disipatividad (Moreno, 2004). Esta metodología de diseño de observadores que preservan el orden generaliza algunas técnicas de diseño de observadores intervalo como la planteada en (Rapaport and Dochain, 2005).

Es importante mencionar que la cooperatividad es una propiedad dependiente de las coordenadas. Por consiguiente, es factible utilizar una transformación de coordenadas para el diseño de observadores que preservan el orden en coordenadas apropiadas. Esta idea se desarrolló en (Mazenc and Bernard, 2011) para diseñar observadores intervalo exponencialmente estables para Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI) con perturbaciones aditivas, considerando una transformación de coordenadas Lineal Variante en el Tiempo. En (Raïssi et al., 2012) se propuso un diseño de observadores intervalo con inyección de salida para Sistemas Lineales Invariante en el Tiempo, tomando en cuenta una transformación de coordenadas Lineal Invariante en el Tiempo. Esta noción se extendió a una clase de sistemas no lineales, la cual está asociada a un difeomorfismo local, con la finalidad de obtener una representación lineal parcial, y en la que se aplica la transformación de coordenadas LTI para alcanzar el diseño de observadores intervalo. En el presente proyecto de investigación se da seguimiento a la línea de investigación originada en (Avilés and Moreno, 2009, 2013) para diseño de observadores que preservan el orden. El

objetivo central de este trabajo es diseñar observadores que preservan el orden en coordenadas adecuadas, para una clase de sistemas similar a la de (Moreno, 2004; Avilés and Moreno, 2009, 2013), utilizando una transformación de coordenadas LTI. El diseño está basado en la metodología de disipatividad y en la propiedad sistémica de cooperatividad, ambas son combinadas con un grado de libertad adicional correspondiente a la matriz no singular de transformación de coordenadas. El método disipativo asegura la convergencia de los observadores, y es aplicado a las dinámicas de los errores de estimación, tanto de los observadores en coordenadas originales como de los observadores en coordenadas transformadas, resultando que ambas dinámicas son exponencialmente estables debido a la consideración de funciones de suministro similares pasivas, es decir, las no-linealidades de ambas dinámicas de los errores de estimación pertenecen a las mismas condiciones de sector. Las estimaciones de los observadores mantienen acotado dinámicamente, por encima o debajo, a la trayectoria real del estado por medio de una transformación de coordenadas LTI, la cual es asociada directamente a una clase de sistemas y de observadores no lineales. La propiedad de cooperatividad es aplicada al sistema del error de estimación con coordenadas transformadas.

## 2. PRELIMINARES

### 2.1 Sistemas Cooperativos

**Definición 1.** El orden parcial en el espacio vectorial (matricial) es la diferencia de componentes de dos vectores (matrices) siempre mayor o igual que cero, es decir,

$$x \succeq y \Leftrightarrow x_i - y_i \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$M \succeq N \Leftrightarrow M_{ij} - N_{ij} \geq 0, \quad M, N \in \mathbb{R}^{n \times m}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

La no negatividad en vectores (matrices) está dada por

$$x \succeq 0 \Leftrightarrow x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$M \succeq 0 \Leftrightarrow M_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

**Definición 2.** Considere un sistema no lineal

$$\Sigma_{NL} \begin{cases} \dot{x} = F(t, x, u), & x(0) = x_0 \\ y = H(t, x, u), \end{cases} \quad (1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  es la entrada, y  $y \in \mathbb{R}^p$  es la salida del sistema.  $\Sigma_{NL}$  es cooperativo si

$$x_0^1 \succeq x_0^2, \quad u^1(t) \succeq u^2(t), \quad \forall t \geq 0$$

entonces,  $x(t, t_0, x_0^1, u^1(t)) \succeq x(t, t_0, x_0^2, u^2(t))$ ,

$$H \circ x(t, t_0, x_0^1, u^1(t)) \succeq H \circ x(t, t_0, x_0^2, u^2(t)), \quad \forall t \geq t_0.$$

A continuación se presentan las caracterizaciones de los sistemas cooperativos.

**Proposición 3.** (Angeli and Sontag (2003)). El sistema  $\Sigma_{NL}$  en (1) es cooperativo si y sólo si se satisface:

$$(\mathbf{C1}) \left[ \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]^M \succeq 0; \quad (\mathbf{C2}) \left[ \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \right] \succeq 0; \quad (\mathbf{C3}) \left[ \frac{\partial H_i}{\partial x_j} \right] \succeq 0 \quad \diamond$$

El símbolo  $\succeq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \geq 0 \quad \forall i \neq j$ , define que  $\left[ \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]$  es Metzler, es decir, los elementos fuera de la diagonal son no negativos.

Considere el sistema LTI

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0 \\ y = Cx, \end{cases} \quad (2)$$

donde  $(x, u, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$  son el estado, los vectores de entrada y salida, respectivamente.

**Proposición 4.** (Angeli and Sontag (2003)). El sistema  $\Sigma_L$  en (2) es cooperativo si y sólo si,

$$(\mathbf{C1}) A \succeq 0; \quad (\mathbf{C2}) B \succeq 0; \quad (\mathbf{C3}) C \succeq 0 \quad \diamond$$

### 2.2 Sistemas Disipativos

La disipatividad asegura flexibilidad en el diseño de observadores que preservan el orden, generalizando algunas propiedades de las no linealidades que se utilizan en la metodología de diseño del criterio del círculo, en el diseño para sistemas no lineales Lipschitz y en el método de alta ganancia (ver (Moreno, 2004)).

Consideraremos sólo funciones de suministro cuadráticas (ver (Willems, 1972b)):

$$w(y, u) = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde  $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $Q, R$  son simétricas. En este caso,  $\Sigma_{NL}$  es  $(Q, S, R)$ -SSD. El sistema en (2) con funciones de suministro cuadráticas en (3), puede tener una función de almacenamiento,

$$V = x^T P x, \quad P = P^T > 0. \quad (4)$$

Esto se puede caracterizar por medio de una LMI:

**Lema 5.** (Avilés and Moreno (2013)). El sistema  $\Sigma_L$  en (2) es SSD con respecto a  $w(y, u)$  en (3), o en forma corta  $(Q, S, R)$ -SSD, si y sólo si existe una matriz  $P = P^T > 0$  y una constante  $\epsilon > 0$  tal que

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \epsilon P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T Q C & C^T S \\ S^T C & R \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5)$$

**Definición 6.** Una no linealidad variante en el tiempo

$$y = f(t, u) \quad (6)$$

$f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ , continua a tramos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $u$ , tal que  $f(t, 0) = 0$ , es disipativa con respecto a una función de almacenamiento  $w(y, u)$  en (3), o en forma corta  $(Q, S, R)$ -D, si para cada  $t \geq 0$  y  $u \in \mathbb{R}^m$ ,

$$w(y, u) = w(f(t, u), u) \geq 0. \quad (7)$$

Mencionamos las condiciones de sector clásicas (Khalil, 2002) para no-linealidades cuadráticas ( $m = p$ ),

1. Si  $f \in [K_1, K_2]$ , es decir,  $(y - K_1 u)^T (K_2 u - y) \geq 0$ , entonces es  $(Q, S, R)$ -D con:

$$(Q, S, R) = \left( -I, \frac{1}{2}(K_1 + K_2), -\frac{1}{2}(K_1^T K_2 + K_2^T K_1) \right)$$

2. Si  $f \in [K_1, \infty]$ , es decir,  $(y - K_1 u)^T u \geq 0$ , entonces es  $(Q, S, R)$ -D con:

$$(Q, S, R) = \left( 0, \frac{1}{2}I, -\frac{1}{2}(K_1 + K_1^T) \right)$$

Para el sistema realimentado

$$\Pi_{S_N} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0 \\ y = Cx \\ u = -f(t, y). \end{cases} \quad (8)$$

se propone una transformación de coordenadas  $z = Tx$ , con  $T$  una matriz no singular, obteniendo

$$\Pi_{S_T} : \begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u, & z(0) = Tx_0 \\ y = \bar{C}z \\ u = -f(t, y) \end{cases} \quad (9)$$

donde  $\bar{A} = TAT^{-1}$ ,  $\bar{B} = TB$  y  $\bar{C} = CT^{-1}$ . Importante notar que  $\Pi_{S_N}$  y  $\Pi_{S_T}$  tienen no-linealidades en realimentación equivalentes. El Lema 7 establece que ambos sistemas  $\Pi_{S_N}$  y  $\Pi_{S_T}$  son ambos internamente estables.

*Lema 7.* Considere  $\Pi_{S_N}$  en (8) y  $\Pi_{S_T}$  en (9). Suponemos que las no-linealidades  $f(t, y)$ , de  $\Pi_{S_N}$  y de  $\Pi_{S_T}$ , pertenecen a las mismas condiciones de sector  $[K_1, K_2]$ . Si existe una terna  $(Q, S, R)$  tal que  $f(t, y)$  es  $(Q, S, R)$ -D, y el subsistema lineal de  $\Pi_{S_N}$  es  $(-R, S^T, -Q)$ -SSD, entonces los puntos de equilibrio  $x = 0$  y  $z = 0$ , de  $\Pi_{S_N}$  y  $\Pi_{S_T}$ , son ambos *global y exponencialmente estable*.  $\diamond$

Ahora, considérese el sistema nominal en coordenadas originales  $\Pi_{S_N}$  afectado por perturbaciones externas aditivas,

$$\Pi_{P_N} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + b(t), & x(0) = x_0 \\ y = Cx \\ u = -f(t, y) \end{cases} \quad (10)$$

donde  $b(t)$  es una entrada, que se asume está acotada. En este caso, las trayectorias del estado convergen a una bola centrada en el origen con un radio dependiente de la cota de  $b(t)$ . Esta noción se caracteriza por la propiedad *Entrada-Estado Estable* (EEE) con respecto a  $b(t)$ .

Si aplicamos una transformación LTI,  $z = Tx$  para  $\Pi_{P_N}$ ,

$$\Pi_{P_T} : \begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u + \bar{b}(t), & z(0) = Tx_0 \\ y = \bar{C}z \\ u = -f(t, y) \end{cases} \quad (11)$$

donde  $\bar{b}(t) = Tb(t)$  representa la entrada para  $\Pi_{P_T}$ .

*Lema 8.* Considere  $\Pi_{P_N}$  en (10) y  $\Pi_{P_T}$  en (11). Se asume que las no-linealidades,  $f(t, y)$ , de  $\Pi_{P_N}$  y de  $\Pi_{P_T}$ , pertenecen a las condiciones de sector  $[K_1, K_2]$ . Si las condiciones del Lema 7 son satisfechas para  $\Pi_{P_N}$  y  $\Pi_{P_T}$  son ambos *EEE* con respecto a  $b(t)$  y  $\bar{b}(t)$ , respectivamente.  $\diamond$

**Prueba.** Aquí se realiza la demostración del Lema 7 y 8. Asumimos una equivalencia en las no-linealidades  $f(t, y)$  de  $\Pi_{S_N}$  en (8) y de  $\Pi_{S_T}$  en (9). Por consecuencia,

$$\omega(f(t, y), y) = f^T Q f + 2f^T S y + y^T R y \geq 0, \quad \forall t \quad (12)$$

La estabilidad de  $\Pi_{S_N}$  se analizó en (Moreno, 2004): Por hipótesis (5) se satisface con  $(-R, S^T, -Q)$ . Si  $V(x) = x^T P x$  es la función candidata de Lyapunov para  $\Pi_{S_N}$ ,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PA + A^T P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \\ &\leq \begin{bmatrix} x \\ -f \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -C^T R C & C^T S^T \\ S C & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -f \end{bmatrix} - \epsilon x^T P x \leq -\epsilon V(x) \end{aligned}$$

porque  $f$  es  $(Q, S, R) = (-R, S^T, -Q)$ -D. Con una analogía para  $\Pi_{S_T}$ , si  $V(z) = z^T \bar{P} z$  con  $\bar{P} \triangleq (T^{-1})^T P T^{-1}$ , se obtiene la derivada de  $\dot{V}(z)$   $(z) \leq -\epsilon z^T \bar{P} z \leq -\epsilon V(z)$   $\therefore x = 0$  y  $z = 0$  son ambos puntos de equilibrio global y exponencialmente estables de  $\Pi_{S_N}$  y  $\Pi_{S_T}$ , respectivamente. Ahora, el resultado del análisis de estabilidad para  $\Pi_{P_N}$  es  $\dot{V}(x) \leq -(1 - \theta)\epsilon V, \quad \forall \|x\|_2 \geq \frac{2}{\theta\epsilon} \|b\|_2$ , para algún  $\theta \in (0, 1)$ . De forma similar para  $\Pi_{P_T}$ , se obtiene  $\dot{V}(z) \leq -(1 - \theta)\epsilon V, \forall \|z\|_2 \geq \frac{2}{\theta\epsilon} \|\bar{b}\|_2$ . Dado (Khalil, 2002, Teorema 4.19),  $\Pi_{P_N}$  y  $\Pi_{P_T}$  son EEE con respecto a  $b$  y  $\bar{b}$ . ■

### 3. DISEÑO DE OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN: TRANSFORMACIÓN DE ESTADOS

#### 3.1 Sistemas sin perturbaciones

Considere el sistema no lineal invariante en el tiempo

$$\Pi_S : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Gf(\sigma; t, y, u) + \varphi(t, y, u), \\ \sigma = Hx, \quad x(0) = x_0 \\ y = Cx \end{cases} \quad (13)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado,  $y \in \mathbb{R}^q$  es la medición,  $\sigma \in \mathbb{R}^r$  es una función lineal del estado no necesariamente medible,  $u \in \mathbb{R}^p$  es la entrada,  $\phi(t, y, u) \in \mathbb{R}^m$  es una función conocida localmente Lipschitz en  $(y, u)$ , y continua a tramos en  $t$ , y  $f(\sigma; t, y, u)$  es una función no lineal localmente Lipschitz en  $\sigma$ , dependiente del tiempo  $t$  y de las señales medibles  $(y, u)$ . Es propuesto un observador de estados de orden completo,

$$\Pi_O : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) + Gf(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y); t, y, u) \\ \quad + \varphi(t, y, u), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \hat{\sigma} = H\hat{x}, \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (14)$$

donde  $\hat{x}$  es la estimación de  $x$  y las matrices de diseño son  $L \in \mathbb{R}^{n \times q}$  y  $N \in \mathbb{R}^{r \times q}$ . El error de estimación se define como  $e \triangleq \hat{x} - x$ , el error de estimación de salida como  $\tilde{y} \triangleq \hat{y} - y$ , y un error de estimación funcional como  $\tilde{\sigma} \triangleq \hat{\sigma} - \sigma$ . Las dinámicas del error de estimación puede ser escritas como (ver (Avilés and Moreno, 2013))

$$\Pi_E : \begin{cases} \dot{e} = A_L e + Gv, \quad e(0) = e_0 \\ \vartheta = H_N e \\ v = -\phi(\vartheta, \sigma; t, y, u) \end{cases} \quad (15)$$

donde  $A_L \triangleq A + LC$  y  $H_N \triangleq H + NC$ , y la no linealidad

$$\phi(\vartheta, \sigma; t, y, u) \triangleq f(\sigma; t, y, u) - f(\sigma + \vartheta; t, y, u) \quad (16)$$

*Definición 9.* (Avilés and Moreno (2013)).  $\Pi_O$  en (14) es un *observador que preserva el orden (superior/inferior)* para  $\Pi_S$  si el sistema  $\Pi_E$  satisface dos propiedades:

1. El origen  $e = 0$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable, equivale a  $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$  como  $t \rightarrow \infty$ ,
2. Es un sistema cooperativo: si  $\hat{x}_0 \succeq x_0 \implies \hat{x}(t) \succeq x(t)$ , y si  $\hat{x}_0 \preceq x_0 \implies \hat{x}(t) \preceq x(t)$ ,  $\forall t \geq 0$

El Teorema siguiente proporciona las condiciones suficientes para diseñar un observador que preserve el orden superior (inferior) para  $\Pi_S$ .

*Teorema 10.* (Avilés and Moreno (2013)). Suponga que la no linealidad  $\phi$  es  $(Q_i, S_i, R_i)$ -D para algún conjunto

$$\omega_i(\phi, \vartheta) = \phi^T Q_i \phi + 2\phi^T S_i \vartheta + \vartheta^T R_i \vartheta \geq 0, \quad \forall \sigma, \quad i = 1, 2, \dots, \mu \quad (17)$$

Suponga que existen las matrices  $P = P^T > 0$ ,  $L$ ,  $N$ , un vector  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_\mu) \succeq 0$  y  $\epsilon > 0$  tal que se satisfaga

1. La condición de Disipatividad descrita por

$$DD : \left\{ \begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \epsilon P + H_N^T R H_N & P G - H_N^T S_\theta^T \\ G^T P - S_\theta H_N & Q_\theta \end{bmatrix} \leq 0 \right\} \quad (18)$$

2. La condición de Cooperatividad caracterizada por

$$DC : \left\{ A_L + GJ(\vartheta; t, y, u) H_N^M \succeq 0, \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}^r, \forall t, y, u \right\} \quad (19)$$

es Metzler.  $J(\vartheta; t, y, u) = \frac{\partial f(\vartheta; t, y, u)}{\partial \vartheta}$  es la matriz Jacobiana de la no linealidad de la planta  $\Pi_S$  en (13)

así que,  $\Pi_0$  es un *observador que preserva el orden superior/inferior* global y exponencialmente estable  $\Pi_S$ .  $\diamond$

La Cooperatividad es una propiedad dependiente de las coordenadas, ocasionando que el diseño de los observadores que preservan el orden no sea factible en algunas coordenadas. Por ello, se propone una transformación de coordenadas para  $\Pi_S$  con para solventar esta dificultad.

Considere el sistema no lineal

$$\Phi_S : \begin{cases} \dot{z} = \mathcal{A}z + \mathcal{G}f(\sigma; t, y, u) + \bar{\varphi}(t, y, u), \\ \sigma = \mathcal{H}z, \quad z(0) = Tx_0 \\ y = \mathcal{C}z \end{cases} \quad (20)$$

definido por una transformación de coordenadas LTI,  $z = Tx$  con  $T$  una matriz no singular, de  $\Pi_S$ . Las matrices son  $\mathcal{A} = TAT^{-1}$ ,  $\mathcal{C} = CT^{-1}$ ,  $\mathcal{H} = HT^{-1}$ ,  $\mathcal{G} = TG$  y  $\bar{\varphi} = T\varphi$ . Un observador de estados, de orden completo para  $\Phi_S$ , es

$$\Phi_O : \begin{cases} \dot{\hat{z}} = \mathcal{A}\hat{z} + \mathcal{L}(\hat{y} - y) + \bar{\varphi}(t, y, u) \\ \quad + \mathcal{G}f(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y); t, y, u), \\ \hat{\sigma} = \mathcal{H}\hat{z}, \quad \hat{z}(0) = \hat{z}_0 \\ \hat{y} = \mathcal{C}\hat{z} \end{cases} \quad (21)$$

donde  $\hat{z}$  es la estimación de  $z$ . Las matrices de diseño para  $\Phi_O$  son  $\mathcal{L} \triangleq TL \in \mathbb{R}^{n \times q}$  y  $N \in \mathbb{R}^{r \times q}$ . El error de observación se define como  $e_z \triangleq \hat{z} - z$ , y de forma similar se definen errores funcionales. Las nuevas dinámicas del error de observación se pueden reescribir como

$$\Phi_E : \begin{cases} \dot{e}_z = \mathcal{A}_L e_z + \mathcal{G}v, \quad e_z(0) = e_{z0} \\ \vartheta = \mathcal{H}_N e_z \\ v = -\phi(\vartheta, \sigma; t, y, u) \end{cases} \quad (22)$$

donde  $\mathcal{A}_L \triangleq \mathcal{A} + \mathcal{L}\mathcal{C} = T(A + LC)T^{-1}$ ,  $\mathcal{H}_N \triangleq (\mathcal{H} + NC) = (H + NC)T^{-1}$ .

*Convergencia del observador  $\Phi_O$*  El Teorema 11 proporciona la propiedad de invariancia en la disipatividad, ante cambio de coordenadas, para los sistemas  $\Pi_E$  y  $\Phi_E$ .

*Teorema 11.* Suponga que la no linealidad  $\phi$  es  $(Q_i, S_i, R_i)$ -D para algún conjunto de formas cuadráticas

$$\omega_i(\phi, \vartheta) = \phi^T Q_i \phi + 2\phi^T S_i \vartheta + \vartheta^T R_i \vartheta \geq 0, \forall \sigma, i = 1, 2, \dots, \mu \quad (23)$$

Suponga que existen  $P = P^T > 0$ ,  $T$  con  $\det \neq 0$ ,  $L$ ,  $N$ , un vector  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_\mu) \succeq 0$  y  $\epsilon > 0$  tal que si se satisface  $DD$  en (18), entonces también se cumple para  $\Phi_E$ ,

$$\begin{bmatrix} \bar{P}\mathcal{A}_L + \mathcal{A}_L^T \bar{P} + \epsilon \bar{P} + \mathcal{H}_N^T R_\theta \mathcal{H}_N & \bar{P}\mathcal{G} - \mathcal{H}_N^T S_\theta^T \\ \mathcal{G}^T \bar{P} - S_\theta \mathcal{H}_N & Q_\theta \end{bmatrix} \leq 0 \quad (24)$$

Bajo estas condiciones  $\Pi_O$  y  $\Phi_O$  son ambos *observadores global y exponencialmente estables* para  $\Pi_S$  y  $\Phi_S$ .  $\diamond$

Es fácil ver que la condición (24) puede ser reescrita como

$$DD_T : \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T DD \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (25)$$

*Cooperatividad en el error de observación  $\Phi_E$*  Las estimaciones de  $\Phi_O$  siempre estarán por arriba, por debajo, del estado real, si y sólo si la matriz Jacobiana de  $\Phi_E$

$$\mathcal{A}_L + \mathcal{G}J(\vartheta; t, y, u) \mathcal{H}_N, \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}^r, \forall t, y, u$$

tiene que ser Metzler. Esto puede reescribirse como

$$M_T(\vartheta; t, y_z, u) \triangleq T(A_L + \mathcal{G}J(\vartheta; t, y, u)H_N)T^{-1} \stackrel{M}{\succeq} 0 \quad (26)$$

El Teorema siguiente proporciona las condiciones para el diseño de observadores que preservan e orden superior/inferior para  $\Phi_S$  en coordenadas apropiadas:

*Teorema 12.* Considera  $\Phi_S$  en (20), y suponga que la no linealidad  $\phi$  en (16) satisface (17). Asuma que existen matrices constantes  $P = P^T > 0$ ,  $L$ ,  $N$ ,  $T$  no singular,  $\epsilon > 0$ , y  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_\mu)$ ,  $\theta_i \geq 0$ , tal que:

1. La condición de Disipatividad  $DD$ , se satisface, y
2. La condición de Cooperatividad  $M_T(\vartheta; t, y_z, u) \stackrel{M}{\succeq} 0$  en (26) es Metzler  $\forall \vartheta \in \mathbb{R}^r, \forall t, y, u$ .

Bajo estas condiciones,  $\Phi_0$  en (21) es un *observador que preserva el orden superior/inferior* para la planta  $\Phi_S$ .  $\diamond$

Si la condición inicial del observador que preserva el orden se define por cotas de la condición inicial de la planta,  $\hat{z}_0 \succeq z_0^+$  ( $\hat{z}_0 \preceq z_0^-$ ), aseguramos que  $\hat{z}(t) \succeq z^+(t)$  ( $\hat{z}(t) \preceq z^-(t)$ ). Un *observador intervalo* se puede obtener con la ejecución simultáneamente de dos observadores que preservan el orden con inicialización adecuada.

### 3.2 Sistemas con perturbaciones

Ahora, consideramos la planta en (13) con presencia de perturbaciones aditivas

$$\Psi_S : \begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Gf(\sigma; t, y, u) + \varphi(t, y, u) + \pi(t, x) \\ \sigma = Hx(t), \quad x(0) = x_0 \\ y = Cx(t) \end{cases} \quad (27)$$

donde  $\pi(t, x) \in \mathbb{R}^n$  representa el término de las variables exógenas desconocidas y/o las incertidumbres del sistema. Es importante mencionar que  $\pi(t, x)$  satisface

$$\pi^+(t, y) \succeq \pi(t, x) \succeq \pi^-(t, y), \forall t \geq 0, \forall x, y, \quad (28)$$

donde  $\pi^+(t, y)$  y  $\pi^-(t, y)$  son las cotas de  $\pi(t, x)$  dadas por funciones continuas Lipschitz conocidas. Aquí, dos observadores, uno superior  $\Psi_{O+}$  y otro inferior  $\Psi_{O-}$ , son requeridos para  $\Psi_S$  (Avilés and Moreno, 2013)

$$\Psi_{O+} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}^+ = A\hat{x}^+ + Gf(\hat{\sigma}^+ + N^+(\hat{y}^+ - y)) \\ \quad + L^+(\hat{y}^+ - y) + \pi^+(t, y) + \varphi(t, y, u) \\ \hat{\sigma} = H\hat{x}^+, \quad \hat{x}^+(0) = \hat{x}_0^+ \\ \hat{y} = C\hat{x}^+ \end{cases} \quad (29)$$

$$\Psi_{O-} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}^- = A\hat{x}^- + Gf(\hat{\sigma}^- + N^-(\hat{y}^- - y)) \\ \quad + L^-(\hat{y}^- - y) + \pi^-(t, y) + \varphi(t, y, u) \\ \hat{\sigma} = H\hat{x}^-, \quad \hat{x}^-(0) = \hat{x}_0^- \\ \hat{y} = C\hat{x}^- \end{cases} \quad (30)$$

donde  $\hat{x}^+$  y  $\hat{x}^-$  son las estimaciones superior e inferior, respectivamente, de  $x$ . Las matrices de diseño son  $L^+ \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $N^+ \in \mathbb{R}^{r \times q}$ ,  $L^- \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $N^- \in \mathbb{R}^{r \times q}$ . Se definen los errores de estimación como  $e^+ \triangleq \hat{x}^+ - x$  y  $e^- \triangleq x - \hat{x}^-$  (y otras variables son definidas en forma similar), las dinámicas de los errores de observación están dadas por

$$\Psi_{E+} : \begin{cases} \dot{e}^+ = A_L^+ e^+ + Gv^+ + b^+ \\ \vartheta^+ = H_N^+ e^+, \quad e^+(0) = e_0^+ \succeq 0 \\ v^+ = -\phi^+(\vartheta^+, \sigma) \end{cases} \quad (31)$$

$$\Psi_{E-} : \begin{cases} \dot{e}^- = A_L^- e^- + Gv^- + b^- \\ \vartheta^- = H_N^- e^-, \quad e^-(0) = e_0^- \succeq 0 \\ v^- = -\phi^-(\vartheta^-, \sigma) \end{cases} \quad (32)$$

donde  $A_L^+ \triangleq A + L^+C$ ,  $H_N^+ \triangleq H + N^+C$ ,  $A_L^- \triangleq A + L^-C$ ,  $H_N^- \triangleq H + N^-C$  y las no linealidades incrementales  $\phi^+(\vartheta^+, \sigma)$  y  $\phi^-(\vartheta^-, \sigma)$  son definidas como en (16). Los errores de incertidumbre son

$$b^+ \triangleq \pi^+(t, y) - \pi(t, x) \succeq 0 \quad (33)$$

$$b^- \triangleq \pi(t, x) - \pi^-(t, y) \succeq 0 \quad (34)$$

actúan como entradas en  $\Psi_{E^+}$  y  $\Psi_{E^-}$ . Note que  $\Psi_{O^+}$  en  $(\Psi_{O^-}$  es un observador que preserva el orden superior (inferior) para  $\Psi_S$  si  $\Psi_{E^+}$  ( $\Psi_{E^-}$ ) satisfacen:

1. Es EEE con respecto a  $b^+$  ( $b^-$ ), y
2. Es cooperativo con entrada  $b^+$  ( $b^-$ ) y salida  $e^+$  ( $e^-$ ).

Consideramos un cambio de coordenadas LTI,  $z = Tx$ , para solventar la dependencia de coordenadas en la Cooperatividad.

Considere el sistema no lineal transformado

$$\Theta_S : \begin{cases} \dot{z} = \mathcal{A}z + \mathcal{G}f(\sigma; t, y, u) + \bar{\pi}(t, z) + \bar{\varphi}(t, y, u), \\ \sigma = \mathcal{H}z, \quad z(0) = Tx_0 \\ y = \mathcal{C}z \end{cases} \quad (35)$$

donde  $\bar{\pi} = T\pi$  representa el término aditivo de perturbaciones/incertidumbres en  $\Theta_S$ . Se asume que  $\bar{\pi}(t, z)$  es desconocido, pero está acotado por funciones conocidas, tal que satisfice

$$\bar{\pi}^+(t, y) \succeq \bar{\pi}(t, z) \succeq \bar{\pi}^-(t, y), \forall t \geq 0, \forall x, y, \quad (36)$$

donde  $\bar{\pi}^+(t, y) \triangleq T\pi^+(t, y)$  y  $\bar{\pi}^-(t, y) \triangleq T\pi^-(t, y)$ . Se propone un par de observadores de orden completo, un estimador superior  $\Theta_{O^+}$  y uno inferior  $\Theta_{O^-}$ , para  $\Theta_S$ .

$$\Theta_{O^+} : \begin{cases} \dot{\hat{z}}^+ = \mathcal{A}\hat{z}^+ + \mathcal{G}f(\hat{\sigma}^+ + N^+(\hat{y}^+ - y)) \\ \quad + \mathcal{L}^+(\hat{y}^+ - y) + \bar{\pi}^+(t, y) + \bar{\varphi}(t, y, u) \\ \hat{\sigma} = \mathcal{H}\hat{z}^+, \quad \hat{z}^+(0) = T\hat{x}_0^+ \\ \hat{y} = \mathcal{C}\hat{z}^+ \end{cases} \quad (37)$$

$$\Theta_{O^-} : \begin{cases} \dot{\hat{z}}^- = \mathcal{A}\hat{z}^- + \mathcal{G}f(\hat{\sigma}^- + N^-(\hat{y}^- - y)) \\ \quad + \mathcal{L}^-(\hat{y}^- - y) + \bar{\pi}^-(t, y) + \bar{\varphi}(t, y, u) \\ \hat{\sigma} = \mathcal{H}\hat{z}^-, \quad \hat{z}^-(0) = T\hat{x}_0^- \\ \hat{y} = \mathcal{C}\hat{z}^- \end{cases} \quad (38)$$

donde  $\hat{z}^+$  y  $\hat{z}^-$  son las estimaciones superior e inferior, respectivamente, de  $z$ . Las matrices de diseño son  $\mathcal{L}^+ = T\mathcal{L}^+ \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $N^+ \in \mathbb{R}^{r \times q}$ ,  $\mathcal{L}^- = T\mathcal{L}^- \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $N^- \in \mathbb{R}^{r \times q}$ . Se definen los errores de estimación como  $e_z^+ \triangleq \hat{z}^+ - z$  y  $e_z^- \triangleq z - \hat{z}^-$  (y otras variables son definidas en forma similar), las dinámicas de los errores de observación son

$$\Theta_{E^+} : \begin{cases} \dot{e}_z^+ = \mathcal{A}_L^+ e_z^+ + \mathcal{G}v^+ + \bar{b}^+ \\ \vartheta^+ = \mathcal{H}_N^+ e_z^+, \quad e^+(0) = e_0^+ \succeq 0 \\ v^+ = -\phi^+(\vartheta^+, \sigma) \end{cases} \quad (39)$$

$$\Theta_{E^-} : \begin{cases} \dot{e}_z^- = \mathcal{A}_L^- e_z^- + \mathcal{G}v^- + \bar{b}^- \\ \vartheta^- = \mathcal{H}_N^- e_z^-, \quad e^-(0) = e_0^- \succeq 0 \\ v^- = -\phi^-(\vartheta^-, \sigma) \end{cases} \quad (40)$$

donde  $\mathcal{A}_L^+ \triangleq \mathcal{A} + \mathcal{L}^+C = T(A + L^+C)T^{-1}$ ,  $\mathcal{H}_N^+ \triangleq \mathcal{H} + N^+C = (H + N^+C)T^{-1}$ ,  $\mathcal{A}_L^- \triangleq \mathcal{A} + \mathcal{L}^-C = T(A + L^-C)T^{-1}$ ,  $\mathcal{H}_N^- \triangleq (H + N^-C)T^{-1}$  y las no linealidades incrementales  $\phi^+(\vartheta^+, \sigma)$  y  $\phi^-(\vartheta^-, \sigma)$  son definidas en forma similar como (16). Los errores de incertidumbre son

$$\bar{b}^+ \triangleq T(\pi^+(t, y) - \pi(t, z)) \succeq 0 \quad (41)$$

$$\bar{b}^- \triangleq T(\pi(t, z) - \pi^-(t, y)) \succeq 0 \quad (42)$$

son las entradas en  $\Theta_{E^+}$  y  $\Theta_{E^-}$ .

El Teorema 13 establece las condiciones de diseño del observador que preserva el orden superior  $\Theta_{O^+}$  (también es válido para el estimador inferior  $\Theta_{O^-}$ ).

*Teorema 13.* Considere  $\Theta_S$ . Se asume que  $\phi^+$  en (16) es  $(Q_i, S_i, R_i)$ -Disipativa para un número finitos de formas cuadrática. Suponga que existen las matrices constantes  $P^+ = P^{+T} > 0$ ,  $L^+$ ,  $N^+$ ,  $T$  con  $\det \neq 0$ , un escalar  $\epsilon^+ > 0$ , y un vector  $\theta^+ = (\theta_1^+, \dots, \theta_\mu^+)$ ,  $\theta_i^+ \geq 0$ , tal que:

1. La condición de Disipatividad en (18) se satisface, y
2.  $M_T(z; t, y, u) \succeq 0$  en (26) es Metzler  $\forall z \in \mathbb{R}^r, \forall t, y, u$ .

Con las condiciones previas,  $\Theta_{O^+}$  es un observador que preserva el orden superior EEE para la planta  $\Theta_S$ .  $\diamond$

Es importante señalar que en el caso perturbado, se requieren dos observadores que preservan el orden, porque  $\hat{z}_0^+ \preceq z_0 \not\Rightarrow \hat{z}^+(t) \preceq z(t)$  ( $\hat{z}_0^- \succeq z_0 \not\Rightarrow \hat{z}^-(t) \succeq z(t)$ ).

#### 4. DISEÑO PRÁCTICO

La convergencia de los observadores  $(\Phi_O, \Theta_{O^+}, \Theta_{O^-})$  no está restringida por la matriz de  $T$ , ya que si la condición  $DD$  es satisfecha, también  $DD_T$  es satisfecha para toda  $T$  no singular. En general,  $DD$  es una desigualdad matricial no lineal en  $(P, L, N, \theta, \epsilon)$ . Bajo ciertas consideraciones,  $DD$  puede convertirse en una LMI (Avilés and Moreno, 2013): si  $N = 0$ , entonces  $DD$  es una LMI en  $(P, \epsilon, PL, \theta)$ , obteniendo  $L$  con el cálculo  $L = P^{-1}(PL)$ .

La Cooperatividad en  $(\Phi_E, \Theta_{E^+}, \Theta_{E^-})$  requiere que  $M_T(\cdot)$  sea Metzler en  $(T, L, N)$ . Ésta condición representa una desigualdad matricial no lineal por el término  $T^{-1}$ . Sin embargo, puede expresarse como una LMI,

$$T(A_L + GJ(\vartheta; t, y, u)H_N) - \mathcal{M}(\vartheta)T \succeq 0 \quad (43)$$

$\mathcal{M}(\vartheta)$  es una matriz Metzler propuesta que depende de  $\vartheta$ . Se requiere un conjunto (infinito) de LMI's utilizando una  $(T, L, N)$ . Sin embargo, si  $f$  es escalar,  $J(\vartheta)$  puede sustituirse por  $[K_1, K_2]$ , requiriendo sólo un par de LMI's dependientes de  $\mathcal{M}(K_1)$  y  $\mathcal{M}(K_2)$ . En general, cuando  $f$  es una función multivariable, la desigualdad en (43) puede aproximarse por un conjunto finito de LMI's. El estudio de esta condición es un tema de investigación a futuro.

#### 5. EJEMPLO

Para ejemplificar el desarrollo anterior, considere el sistema

$$\Pi_A : \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 - \frac{1}{1+x_2^2} \\ y = x_1 \end{cases}$$

donde  $x = [x_1, x_2]$  es el estado. Consideramos que no existen incertidumbres en  $\Pi_A$ . El problema de observación es estimar a  $x_2$  a partir de la medición en línea  $x_1$ .

$\Pi_A$  puede ser reescrito como  $\Pi_S$ , con  $f(\sigma) = (1 + \sigma^2)^{-1}$ ,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T; H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T; G = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La no linealidad  $\phi(\sigma, \vartheta) = (1 + \sigma^2)^{-1} + (1 + (\sigma + \vartheta)^2)^{-1}$  está en el sector  $[K_1, K_2] = [-0.6495, 0.6495]$ . Diseñamos un observador intervalo  $\Pi_O$  con  $N = 0$ ,  $\epsilon = 0.25$ ,

$$P = \begin{bmatrix} 9.80685 & 0.7519 \\ 0.7519 & 1.6029 \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} -20 \\ 20 \end{bmatrix}^T$$

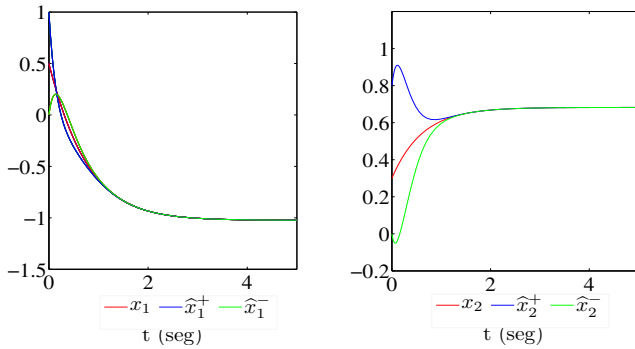


Figura 1. Comportamiento dinámico de  $(\Pi_A, \Pi_O)$ .

En la Figura 1 se presenta el comportamiento del estado de  $\Pi_A$  y de las estimaciones de  $\Pi_O$ . Se visualiza que  $(\hat{z}^+, \hat{z}^-)$  no preservan el orden dinámicamente con respecto al estado ya que la Cooperatividad no es satisfecha,

$$M = \begin{bmatrix} -2 + l_1, & -3 \\ l_2 - NJ(\vartheta), & J(\vartheta) - 2 \end{bmatrix}$$

con  $J(\vartheta) = 2\vartheta/(1 + \vartheta^2)^2$ , porque su componente superior fuera de la diagonal no contiene términos de  $L$  y  $N$ . Por ello, se propone una transformación de la forma  $\Phi_S$ , con

$$T = \begin{bmatrix} 1, & 0.5 \\ 0.5, & 2 \end{bmatrix}$$

Para asegurar la Cooperatividad en  $(\Phi_{E+}, \Phi_{E-})$ , el término  $J(\vartheta)$  en  $M_{\mathcal{T}}$ , es sustituido por  $[K_1, K_2]$ , es decir,

$$M_{\mathcal{T}_1} = T \begin{bmatrix} -22 & -3 \\ 20 & -2 - K_1 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} -12.664 & 1.3284 \\ 34.343 & -10.686 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathcal{T}_2} = T \begin{bmatrix} -22 & -3 \\ 20 & -2 - K_2 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} -12.479 & 0.95729 \\ 35.085 & -12.171 \end{bmatrix}$$

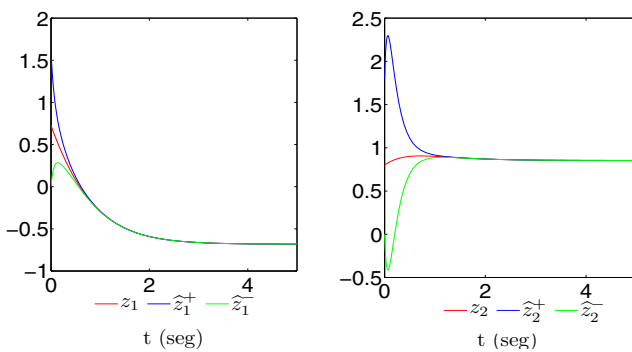


Figura 2. Comportamiento dinámico de  $(\Phi_S, \Phi_{O+}, \Phi_{O-})$ .

Los comportamientos  $(\Phi_S, \Phi_{O+}, \Phi_{O-})$  se muestran en la Figura 2. Las estimaciones  $(\hat{z}^+, \hat{z}^-)$  preservan el orden, por encima y por debajo, con respecto  $z$  para todo  $t$ .

## 6. CONCLUSIONES

Se presentó una metodología de diseño de observadores que preservan el orden en coordenadas adecuadas para una

clase de sistemas, en presencia y en ausencia de perturbaciones, combinando las propiedades de disipatividad y cooperatividad. Este diseño requiere una transformación de coordenadas Lineal Invariante en el Tiempo apropiada para asegurar la cooperatividad en las dinámicas transformadas del error de estimación, mientras que la condición de disipatividad, no está restringida por el término de la matriz de la transformación de coordenadas. Esto se debe a la propiedad de invariancia en la disipatividad, ante cambio de coordenadas en la clase de sistemas no lineales. El diseño computacional puede ser reducido, en algunos casos, a la solución de problemas de LMI's.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero del Fondo de Colaboración del II-FI, UNAM, proyecto IISGBAS-109-2013 y del PAPIIT, UNAM, con beca IN113614. La responsabilidad científica recae en los autores.

## REFERENCIAS

- Angeli, D. and Sontag, D. (2003). Monotone control systems. *IEEE Transactions Automatic*, 48(10), 1684–1698.
- Avilés, J. and Moreno, J. (2009). Cooperative observers for nonlinear systems. *Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, Shanghai, China*, 6125–6130.
- Avilés, J. and Moreno, J. (2013). Preserving order observers for nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, doi: 10.1002/rnc.2975.
- Bernard, O. and Gouze, J. (2004). Closed loop observers bundle for uncertain biotechnological models. *Journal of Process Control*, 14(3), 765–774.
- Gouze, J.L., Rapaport, A., and Hadj-Sadok, M.Z. (2000). Interval observers for uncertain biological systems. *Ecol Modelling*, 133(1-2), 45–56.
- Hirsch, M. and Smith, H. (2005). *Monotone Dynamical Systems*. Handbook of differential equations: ordinary differential equations. Vol. II, Elsevier B. V., Amsterdam 239-357.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New York, USA, third edition.
- Mazenc, F. and Bernard, O. (2011). Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 44, 140–147.
- Moisan, M., Bernard, O., and Gouze, J. (2009). Near optimal interval observers bundle for uncertain bioreactors. *Automatica*, 45, 291–295.
- Moreno, J. (2004). Observer design for nonlinear systems: A dissipative approach. In *Proceedings of the 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control SSSC2004*.
- Rapaport, A. and Dochain, D. (2005). Interval observers for biochemical processes with uncertain kinetics and inputs. *Mathematical Biosciences*, (192), 235–253.
- Raïssi, T., Efimov, D., and Zolghadri, A. (2012). Interval state estimation for a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 57(1), 260–265.
- Willems, J. (1972b). Dissipative dynamical systems, part II: Linear systems with quadratic supply rates. *Archive for Rational Mechanics and Analysis. IEEE Trans. Automat. Contr.*, 45(352-393).