

Diseño y Control de UMBRA – Un Péndulo Invertido Sobre Dos Ruedas

M. Ontiveros-Rodríguez, E. Rubio-Espino y J.L. Oropeza-Rodríguez

Instituto Politécnico Nacional, IPN
Centro de Investigación en Computación, CIC
Av. Juan de Dios Bátiz s/n, Col. Nueva Industrial Vallejo, Del. G.A.M. C.P. 07738, México D.F.
(e-mail: montiveros_a13@sagitario.cic.ipn.mx, {erubio, joropeza}@cic.ipn.mx).

Resumen: En este trabajo se describe el diseño y control de un robot basado en un péndulo invertido sobre dos ruedas. El objetivo del diseño es generar una plataforma flexible que pueda ser usada con fines educativos y de investigación. La selección de los componentes de hardware, los sensores, el procesamiento digital de las señales, el modelado y el control del robot son tratados a lo largo del trabajo.

Palabras clave: Control lineal, sensor de fusión, acelerómetros, giróscopo, control PID.

1. INTRODUCCIÓN

En el campo de la robótica, las revistas especializadas muestran cómo en la última década se ha ido incrementando el número de trabajos de investigación enfocados al desarrollo de los robots móviles de dos ruedas que se estabilizan activamente. Aunado a esto, se han propuesto varios modelos y se han desarrollado diferentes tipos de controladores para su manipulación. (Akesson et al., 2006; Jian-hai, Shu-shang, Ji-shun and Hang, 2008; Kim, Lee y Kim, 2011; Lien, Tu, Ross y Burvill, 2006; Oliveira e Silva and de Carvalho Ferreira, 2013; Thao, Nghia and Phuc, 2010).

En el presente trabajo, se describe el diseño y el control de un prototipo que pretende ser útil en entornos de enseñanza e investigación. Uno de los retos más desafiantes en la generación de este prototipo, es la selección y adquisición de los componentes que permiten un desempeño aceptable del robot diseñado. Una de las partes troncales de la selección de los componentes, radica en la unidad de medición inercial (UMI). Esta UMI permite obtener el ángulo de inclinación del cuerpo del robot con respecto a la horizontal. Otra de las partes troncales radica en el microprocesador, que se encargará de realizar el procesamiento de las señales y de establecer las consignas de control.

El robot nombrado UMBRA, se encuentra conformado por dos actuadores y por una UMI, ésta última, está construida a partir de un acelerómetro y un giróscopo. La UMI permite obtener el ángulo de inclinación del robot. Además está conformado por la estructura que da soporte al prototipo (UMBRA), por el microprocesador y por varios componentes electrónicos adicionales que permiten el correcto funcionamiento del sistema. En (Kim et al., 2011), los autores muestran una de las estructuras clásicas que se emplean para darle soporte a los elementos más comunes que integran a esta clase de robots.

Uno de los objetivos del trabajo, es describir el diseño de UMBRA y reportar las experiencias que surgieron en su

construcción y puesta en operación. El trabajo tiene tres contribuciones principales. La primera radica en la descripción del diseño del prototipo, la segunda en la propuesta de una variante del modelo desarrollado en (Ooi, 2003) y la tercera radica en el empleo de un único microprocesador de 32 bits que se encarga de gestionar todos los recursos del robot.

El trabajo se encuentra organizado de la siguiente forma. En la sección II se presenta el modelado dinámico del sistema. La sección III presenta el esquema de control empleado para la estabilización de UMBRA. La sección IV está destinada a la presentación del diseño de un filtro complementario, que permite obtener una correcta medición del ángulo de inclinación del cuerpo del robot. En la sección V se resumen las características de diseño. En la sección VI se muestran los resultados de la simulación y de los experimentos realizados en el prototipo y finalmente en la sección VII, se dan las conclusiones al trabajo.

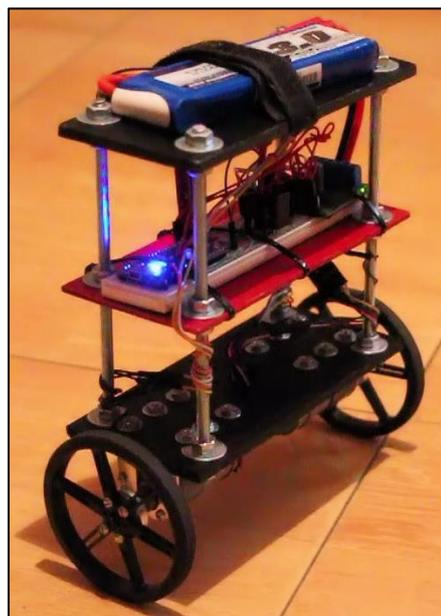


Figura 1. UMBRA – Péndulo invertido sobre dos ruedas.

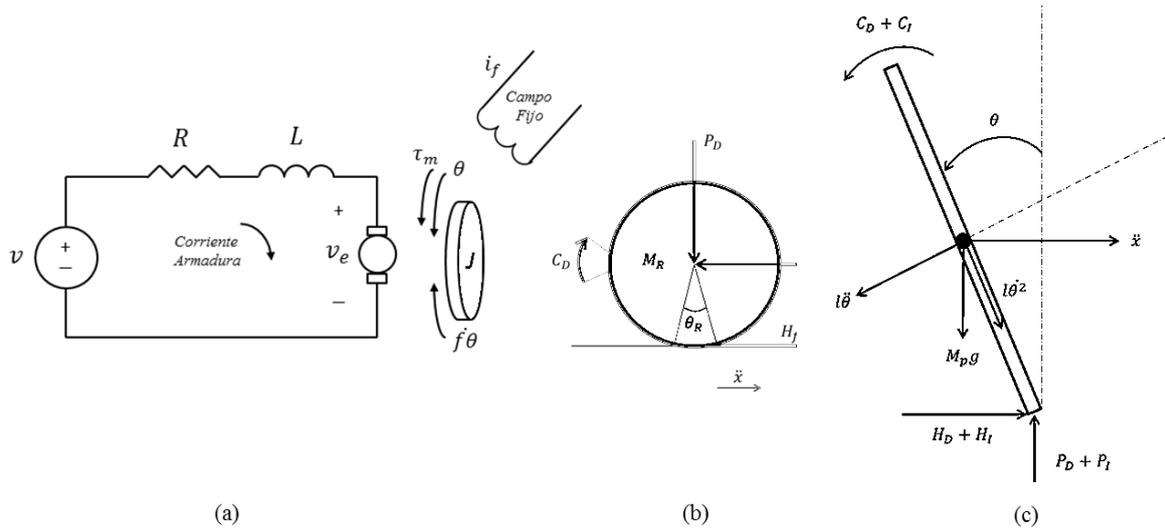


Figura 2. Diagramas empleados para la elaboración del modelo dinámico del robot. (a) Motor de corriente directa. (b) Rueda. (c) Péndulo invertido

2. MODELO DEL SISTEMA

La idea de partida es que el sistema consta de tres modelos sencillos que interactúan y en conjunto describen el modelo completo conformado por las ruedas, por los motores de corriente directa y por el péndulo invertido.

En la Figura 2, se observan los diagramas empleados para obtener las ecuaciones dinámicas que describen al sistema. Este enfoque se había utilizado con anterioridad en (Ooi, 2003); pero en este trabajo se desprecia la constante de fricción viscosa presente en los motores. En la formulación del modelo propuesto para UMBRA, no se desprecia esta constante. Se considera que la inclusión de esta constante permite obtener un comportamiento más cercano a la realidad.

Como primer paso en la formulación del modelo de UMBRA, se obtiene la ecuación para el motor de corriente directa (1).

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k_m}{J} \left[\frac{V}{R} - \frac{k_e \omega}{R} \right] - \frac{f}{J} \omega \quad (1)$$

Donde ω es la velocidad angular del rotor, k_m es la constante de torque, k_e es la constante contra-electromotriz, V es el voltaje aplicado, R es la resistencia de la armadura, f es la constante de fricción viscosa y J es el momento de inercia del rotor.

Posteriormente se obtiene (2), que expresa el torque que proporciona el motor de corriente directa.

$$\tau = \frac{k_m V}{R} - \frac{k_m k_e \theta_R}{R} - f \dot{\theta}_R \quad (2)$$

Se considera que las dos ruedas y los dos motores presentes en el sistema para un instante de tiempo determinado, se desplazan a la misma velocidad y en la misma dirección, por

lo cual, las ecuaciones individuales para cada conjunto rueda-motor se pueden considerar equivalentes. De lo anterior, se obtiene (3) y (4) que describen el comportamiento de la rueda izquierda y de la rueda derecha unidas cada una de ellas a un motor de corriente directa.

En (5), se obtiene el comportamiento completo de ambas ruedas cada una con su respectivo motor de corriente directa.

$$M_R \ddot{x} = \frac{k_m}{Rr} V - \frac{k_m k_e}{Rr} \dot{\theta}_R - \frac{J_{RD} \ddot{\theta}_{RD}}{r} - \frac{f \dot{\theta}_R}{r} - H_D \quad (3)$$

$$M_R \ddot{x} = \frac{k_m}{Rr} V - \frac{k_m k_e}{Rr} \dot{\theta}_R - \frac{J_{RD} \ddot{\theta}_{RD}}{r} - \frac{f \dot{\theta}_R}{r} - H_I \quad (4)$$

$$2 \left(M_R + \frac{J_R}{r^2} \right) \ddot{x} = \frac{2k_m}{Rr} V - \frac{2k_m k_e}{Rr^2} \dot{\theta}_R - \frac{2f \dot{\theta}_R}{r^2} - (H_D + H_I) \quad (5)$$

Donde M_R es la masa de la rueda, \ddot{x} es la aceleración, r es el radio de la rueda, J_R es el momento de inercia de la rueda, H_D y H_I son las fuerzas de reacción presentes.

Finalmente, se obtiene la estructura propia del péndulo invertido la cual se muestra en las ecuaciones (6) y (7).

$$(J_p + M_p l^2) \ddot{\theta} + \frac{2k_m}{R} V - 2 \left(\frac{k_m k_e}{Rr} + \frac{f}{r} \right) \dot{\theta}_R = -M_p l \ddot{x} \cos \theta - M_p g l \sin \theta \quad (6)$$

$$\frac{2k_m}{Rr} V = \left(2M_R + 2\frac{J_R}{r^2} + M_p \right) \ddot{x} + 2 \left(\frac{k_m k_e}{Rr^2} + \frac{f}{r^2} \right) \dot{\theta}_R + M_p l \ddot{\theta} \cos \theta - M_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (7)$$

Donde J_p es el momento de inercia del péndulo, M_p es la masa del péndulo, l es la distancia al centro de masa del péndulo, $\ddot{\theta}$ es la aceleración angular del péndulo, \ddot{x} es la aceleración traslacional del cuerpo completo del robot y g es la fuerza de gravedad.

Se propone linealizar el modelo descrito por (6) y (7) alrededor de un punto de equilibrio. Por lo que se considera que $\theta = \pi$. En UMBRA, éste es el punto de equilibrio.

Se define (8-10) considerando una pequeña perturbación en el ángulo $\theta = \pi + \phi$, donde ϕ es el pequeño ángulo que representa la desviación del robot respecto a la posición de equilibrio. Así, las ecuaciones que describen el comportamiento lineal del sistema son (11) y (12).

$$\text{sen}(\theta) = -\phi \quad (8)$$

$$\text{cos}(\theta) = -1 \quad (9)$$

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\phi}^2 \approx 0 \quad (10)$$

$$\left(J_p + M_p l^2 \right) \ddot{\phi} + \frac{2k_m}{R} V - \frac{2(k_m k_e + fR)}{Rr} \dot{\chi} - M_p g l \phi = M_p l \ddot{\chi} \quad (11)$$

$$\frac{2k_m}{Rr} V = \left(2M_R + 2\frac{J_R}{r^2} + M_p \right) \ddot{\chi} + \frac{2(k_m k_e + fR)}{Rr^2} \dot{\chi} - M_p l \ddot{\phi} \quad (12)$$

3. ESQUEMA DE CONTROL

Se utiliza un controlador tipo PID para el control del ángulo y otro para controlar la velocidad, ver Figura 3. Esquemas de control parecidos se encuentran presentes en varios trabajos relacionados (Kun, Ming y Yuhua, 2011; Oliveira e Silva y de Carvalho Ferreira, 2013; Lee y Jung, 2012).

La salida del controlador PID que se encarga de mantener el balance en el robot se describe en (13).

$$u_\phi = k_1 e_\phi(t) + k_2 \int e_\phi(t) dt + k_3 \dot{e}_\phi(t) \quad (13)$$

El error se encuentra definido por $e_\phi = \phi_r - \phi$, donde ϕ_r es el ángulo de inclinación deseado y ϕ es el valor actual del ángulo.

La salida del controlador PID que se encarga de mantener la velocidad en el desplazamiento de UMBRA, se encuentra descrita en (14).

$$u_{\dot{\chi}} = k_4 e_{\dot{\chi}}(t) + k_5 \int e_{\dot{\chi}}(t) dt + k_6 \dot{e}_{\dot{\chi}}(t) \quad (14)$$

El error se encuentra definido por $e_{\dot{\chi}} = \dot{\chi}_r - \dot{\chi}$, donde $\dot{\chi}_r$ es la velocidad deseada de desplazamiento de UMBRA y $\dot{\chi}$ es el valor actual de la velocidad.

Debido a que el desempeño del sistema es sensible a las ganancias de los controladores, se realizó una selección cuidadosa de las mismas. En este trabajo, la selección de las ganancias se realizó con ayuda de la simulación del sistema y por medio de los resultados experimentales.

Cada uno de los controladores compite por satisfacer los requerimientos de la posición del ángulo y de la velocidad de desplazamiento del robot, lo que ocasiona que no se puedan satisfacer al mismo tiempo ambos requerimientos de diseño. Lo que origina que el robot se mantenga con una pequeña oscilación alrededor de la vertical (donde el ángulo y la velocidad son cero).

En su operación más básica, se busca que el robot sea capaz de mantenerse en equilibrio y que prácticamente no se

desplace. Es por ello que el ángulo deseado es cero y la velocidad deseada es cero. Para obtener las variables necesarias para el esquema de control, se hace uso de un giróscopo y un acelerómetro que alimentan a un filtro complementario, el cual entrega a su salida el ángulo de inclinación del robot. La velocidad se estima con los encoders de cuadratura. En la Figura 4, se observa la manera en que se obtiene la información requerida por el controlador.

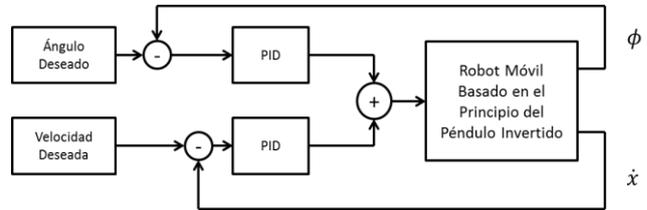


Figura 3. Esquema de control.
 (Estructura de los controladores PID)

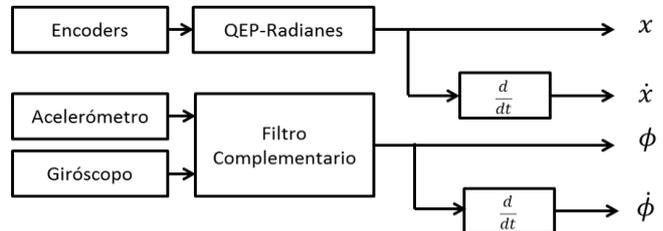


Figura 4. Variables necesarias para el control del sistema.

4. FILTRO COMPLEMENTARIO

Una de las partes más sensibles para lograr un correcto balance en el sistema es la medición del ángulo de inclinación (Lee y Jung, 2012). Normalmente, se utiliza un giróscopo debido a que proporciona una medición estable y sin ruido de la velocidad angular. Sabemos que si conocemos la velocidad angular, podemos entonces conocer la posición; ésto a través de la operación de integración. El problema de realizar una integración numérica al valor proporcionado por el giróscopo, es que ocasiona que conforme avanza el tiempo, la lectura estimada del giróscopo contiene una desviación cada vez mayor del valor real, producto de la aproximación numérica. De igual forma, se suele utilizar un acelerómetro que permite conocer de forma directa el ángulo de inclinación, sin embargo, la lectura proporcionada es altamente ruidosa y sensible a vibraciones imperceptibles que no permiten obtener una lectura estable (Solis et al., 2009).

Debido a las consideraciones anteriores, se diseña un filtro complementario que permite obtener una lectura precisa del ángulo de inclinación del cuerpo del robot. El filtro complementario se encuentra compuesto por un filtro pasa-bajas y un filtro pasa-altas (Mahony et al., 2005; Lee y Jung, 2012). En la Figura 5 se aprecia su esquema de construcción.

Se obtienen los dos coeficientes necesarios para el correcto funcionamiento del filtro a través de la relación descrita por la ecuación (15).

$$a = \frac{\tau}{\tau + dt} \quad (15)$$

Donde a es el coeficiente del filtro pasa-altas. Para obtener el coeficiente del filtro pasa-bajas, se realiza la resta de $1-a$, debido a que el filtro complementario tiene por característica que la suma de los coeficientes de los filtros debe ser la unidad. τ es la constante de tiempo de los filtros y dt representa el intervalo de tiempo entre la toma de una lectura y la siguiente.

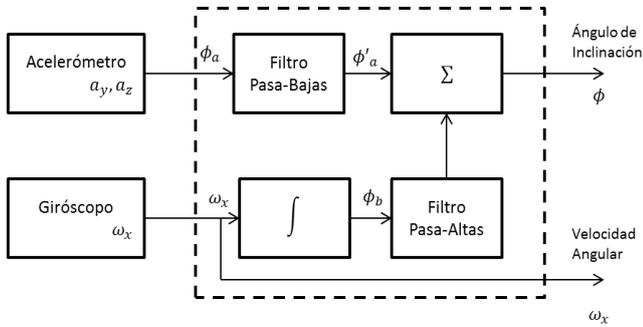


Figura 5. Esquema del filtro complementario.

En la implementación de UMBRA, se considera una constante de tiempo de 0.65 segundos. Para esta constante de tiempo, se tiene que el coeficiente del filtro pasa-altas es 0.985 y para el filtro pasa-bajas es 0.015. La expresión completa de la implementación del filtro se observa en la ecuación (16).

$$\phi = 0.985(\phi + \omega * dt) + 0.015(\phi_{acc}) \quad (16)$$

Donde ϕ es el ángulo estimado, ω es la velocidad angular proporcionada por el giróscopo y ϕ_{acc} es el ángulo que se obtiene a partir de la información proporcionada por el acelerómetro.

5. DISEÑO DEL PROTOTIPO

En la Figura 6, se observa la estructura del robot realizada en un software de diseño asistido por computadora. Los materiales empleados para la elaboración de la estructura del prototipo son básicamente aluminio y PVC laminado. En la Figura 7, se aprecia la construcción de la estructura del prototipo. El diseño final de UMBRA se observa en la Figura 1.

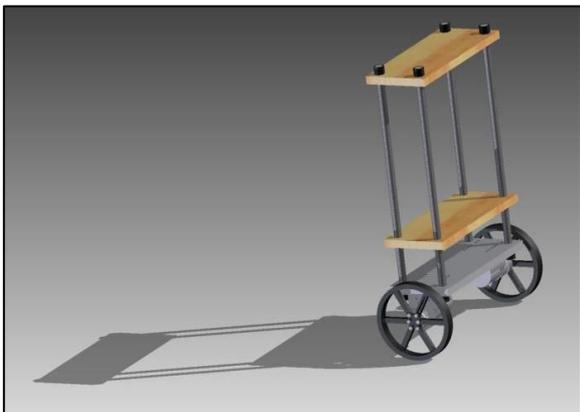


Figura 6. Estructura soporte del robot móvil.

5.1 Microcontrolador mbed LPC1768

El microprocesador empleado es el LPC1768, el cual resulta conveniente para el robot debido a que cuenta con 512 KB de memoria FLASH, 32 KB de memoria RAM, un conjunto variado de interfaces (Ethernet, USB, CAN, SPI, I²C, ADC, DAC, PWM y puertos de entrada salida estándar). Este microprocesador opera a 96 MHz y su arquitectura es de 32 bits. Se ocupa la plataforma de desarrollo rápido de prototipos *mbed* que se encuentra basada en este microprocesador.

5.2 Pololu 30:1 Metal Gearmotor 37Dx52L

Se emplean dos motores de corriente directa de la marca Pololu. Cada uno de los motores viene con un encoder de cuadratura integrado, el cual permite estimar la velocidad de desplazamiento. Estos motores tienen una velocidad a 12 Volts sin carga de 350 RPM y un consumo máximo de corriente de 5 Amperes. Cabe mencionar que el criterio de selección para los motores fue un compromiso entre la velocidad del motor y su torque. El motor 37Dx52L de Pololu tiene un torque máximo de $0.77 N \cdot m$.

5.3 Unidad de Medición Inercial 6DOF Sparkfun

La unidad de medición inercial se encuentra compuesta por un acelerómetro ADXL345 de tres ejes y el giróscopo ITG-3200 de tres ejes. Funciona bajo el protocolo de comunicación I²C. Tiene una resolución menor a un 1.0| al medir un ángulo de inclinación. Para la correcta estimación del ángulo de inclinación, se hace uso de los tres ejes del acelerómetro y uno de los ejes del giróscopo. Funciona con un voltaje de 3.3 Volts.

5.4 Controlador Dual para Motores de Corriente Directa VNH2SP30 Pololu

En la selección del controlador para los motores, se da prioridad a una alta frecuencia en la generación de la señal de PWM y en la capacidad de manejar de forma eficiente la demanda de corriente solicitada por los motores. Este controlador permite manejar dos motores con una demanda máxima de corriente de 15A por motor y una frecuencia máxima de PWM de 20 kHz. Por todo lo anterior, este controlador resulta adecuado para el correcto funcionamiento del prototipo.

6. RESULTADOS

Usando el modelo lineal descrito por (11) y (12), se realiza la simulación numérica del sistema con los parámetros propios de UMBRA. En la Tabla 1, se listan los valores obtenidos para cada uno de los parámetros en la simulación. En la Figura 8, se aprecia la respuesta a lazo abierto del sistema.

Incorporando el esquema de control en la simulación y seleccionando unas ganancias apropiadas, se obtiene la respuesta del sistema que se observa en la Figura 9. En ella,

es posible apreciar que con las ganancias seleccionadas, el sistema converge al valor de la referencia.

En la Figura 10, se muestra el desempeño que otorga el filtro complementario. Se observa claramente el problema de desviación que sufre la lectura del giróscopo conforme el tiempo evoluciona; de igual forma, nótese el ruido presente en la medición del acelerómetro. En la misma figura, se aprecia la señal filtrada, que es producto del procesamiento realizado por el filtro complementario.



Figura 7. Construcción de UMBRA.

Tabla 1. Parámetros físicos del robot.

Parámetro	Valor
M_p	1.8 kg
M_R	0.022 kg
l	0.18 m
J_p	0.002 kg m ²
J_R	0.05 kg m ²
r	0.05 m
k_m	0.2645 Nm/A
k_e	0.2645 V·s/rad
f	0.0000040579 N·m·s
R	4 Ω
g	9.81 m/s ²

En la Figura 11, se aprecia la respuesta del sistema ante una condición inicial real de 25 grados de inclinación en el cuerpo de UMBRA. Las ganancias propuestas para la parte experimental son: $k_1 = 18$, $k_2 = 2$, $k_3 = 16$, $k_4 = 0.165$, $k_5 = 0.1$, $k_6 = 0.2$. Se observa que con las ganancias seleccionadas, el sistema converge al valor de la referencia.

En la Figura 12, se muestra el comportamiento del sistema ante una serie de perturbaciones externas que intentan derribar al prototipo.

En la Figura 13, se encuentra una secuencia de imágenes que muestran el comportamiento del prototipo desde una condición inicial hasta la estabilización del mismo.

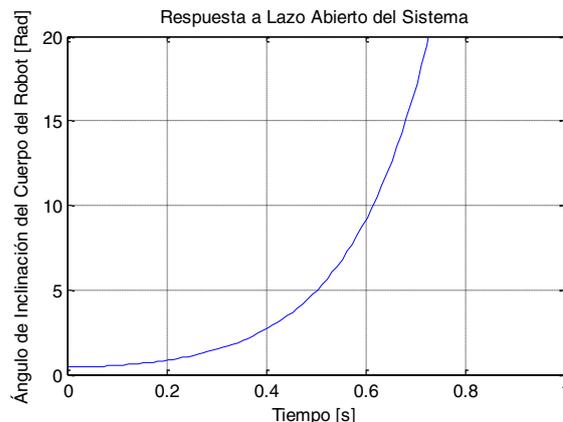


Figura 8. Respuesta a lazo abierto del sistema con una condición inicial de 0.44 radianes en el ángulo de inclinación del prototipo.

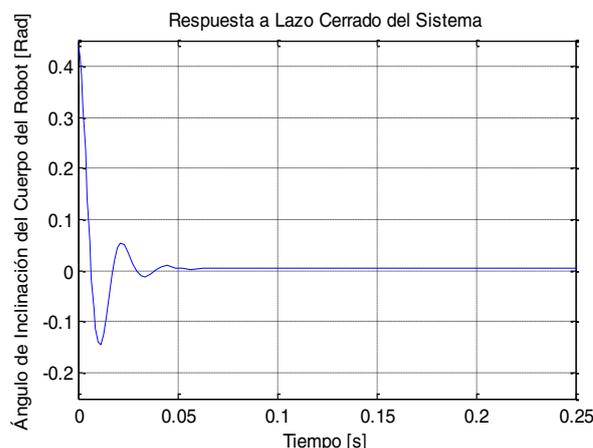


Figura 9. Respuesta a lazo cerrado del sistema con una condición inicial de 0.44 radianes en el ángulo de inclinación del cuerpo del prototipo.

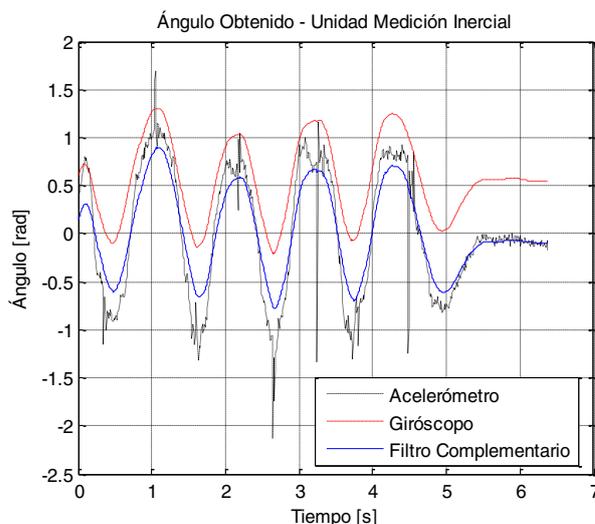


Figura 10. Resultados experimentales de la estimación del ángulo de inclinación del cuerpo del robot.

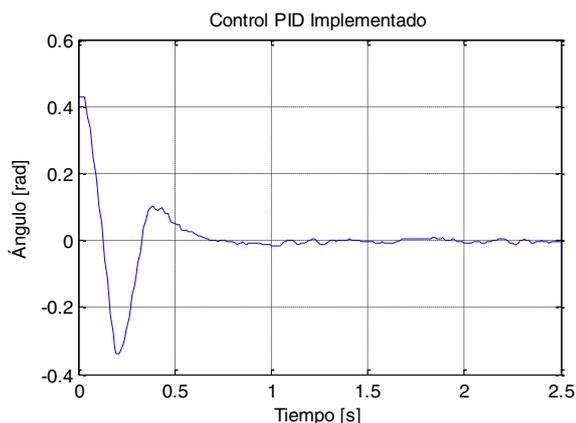


Figura 11. Resultados experimentales del comportamiento del esquema de control implementado.

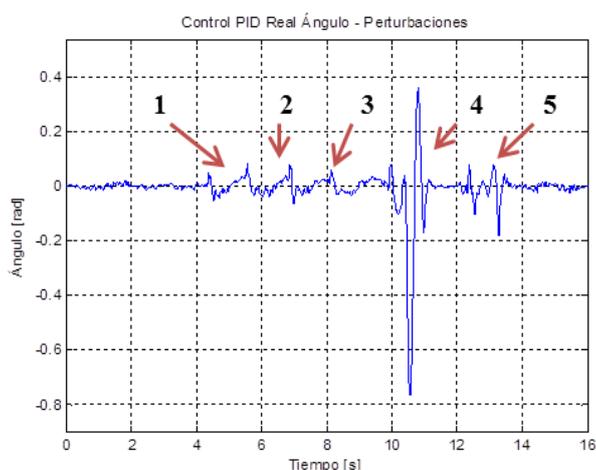


Figura 12. Resultados experimentales del comportamiento del esquema de control implementado ante cinco perturbaciones.

7. CONCLUSIONES

Se implementó y controló un sistema que describe un robot móvil basado en el principio del péndulo invertido. La medición del ángulo de inclinación del cuerpo del robot se realizó de forma precisa con el filtro complementario diseñado. El modelo dinámico del robot permitió obtener ganancias cercanas a las empleadas en la implementación real. Los resultados experimentales mostraron que el esquema de control diseñado fue robusto ante perturbaciones externas tales como golpes intencionales. El uso de un microprocesador de 32 bits de reciente generación, permitió centralizar todo el procesamiento y el control del prototipo en un solo dispositivo. En futuros trabajos se pretende reportar el análisis de estabilidad y el diseño de esquemas de control más complejos.

AGRADECIMIENTOS

M. Ontiveros-Rodríguez agradece el apoyo económico por parte de CONACyT, México. Los autores agradecen el apoyo brindado al IPN, a través COFAA; a la SIP-IPN a través de los proyectos: SIP 20131505, SIP 20131182, SIP 20144538, SIP20141310 y al CONACyT 155014.

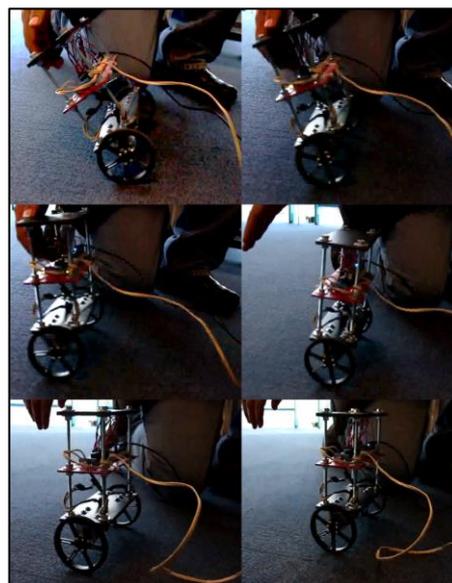


Figura 13. Puesta en operación del prototipo de robot móvil basado en el principio del péndulo invertido.

REFERENCIAS

- Akesson, J., Blomdell, A. and Braun, R. (2006). Design and control of YAIP—an inverted pendulum on two wheels robot. pp.2178--2183.
- Jian-hai, H., Shu-shang, Z., Ji-shun, L. and Hang, L. (2008). Research on developed parallel two-wheeled robot and its control system. pp.2471--2475.
- Kim, Y., Lee, S. and Kim, D. (2011). Dynamic equations of a wheeled inverted pendulum with changing its center of gravity. pp.853--854.
- Kun, L., Ming, B. and Yuhua, N. (2011). Two-wheel self-balanced car based on Kalman filtering and PID algorithm. pp.281--285.
- Lee, H. and Jung, S. (2012). Balancing and navigation control of a mobile inverted pendulum robot using sensor fusion of low cost sensors. *Mechatronics*, 22(1), pp.95--105.
- Lien, J., Tu, L., Ross, W. and Burvill, C. (2006). Implementation issues for an inexpensive inverted-pendulum mobile robot. pp.372--377.
- Mahony, R., Hamel, T. and Pflimlin, J. (2005). Complementary filter design on the special orthogonal group SO (3). pp.1477--1484.
- Oliveira e Silva, F. and de Carvalho Ferreira, L. (2013). Design and implementation of a PID control system for a coaxial two-wheeled mobile robot. pp.1--6.
- Ooi, R. (2003). Balancing a two-wheeled autonomous robot. *University of Western Australia*, 3.
- Solis, J., Nakadate, R., Yoshimura, Y., Hama, Y. and Takanishi, A. (2009). Development of the two-wheeled inverted pendulum type mobile robot WV-2R for educational purposes. pp.2347--2352.
- Thao, N., Nghia, D. and Phuc, N. (2010). A PID backstepping controller for two-wheeled self-balancing robot. pp.76--81.