

El margen de estabilidad de polinomios de orden pequeño

Ana Marcela Garza Burgos, Daniel Melchor-Aguilar,
Hugo Cabrera Ibarra

*División de Matemáticas Aplicadas, IPICYT, 78216, San Luis Potosí,
SLP, México (e-mails: burgos.mache@gmail.com,
dmelchor@ipicyt.edu.mx, cabrera@ipicyt.edu.mx)*

Abstract: En este artículo se estudia el problema del margen de estabilidad de polinomios de orden menor o igual a cuatro. Se presentan fórmulas explícitas para la máxima caja de estabilidad alrededor de los coeficientes de un polinomio estable.

Keywords: Margen de estabilidad, polinomios intervalo, teorema de Kharitonov.

1. INTRODUCCIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Dado un polinomio o una matriz estable, es decir las raíces del polinomio o los valores propios de la matriz se encuentran en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo, es de interés y relevancia práctica determinar las máximas cotas de perturbación bajo las cuales la propiedad de estabilidad se preserva. Tales cotas son frecuentemente conocidas como *medidas de robustez o margen de estabilidad* y existe una gran cantidad de trabajos dedicados a su estudio.

En el caso matricial, destacan los trabajos sobre el radio de estabilidad como Hinrichsen y Pritchard (1986) y aquellos basados en el enfoque de Lyapunov como Zhou y Khargonekar (1987) por mencionar sólo algunos.

En este artículo se estudia el problema del margen de estabilidad en el caso polinomial: Dado un polinomio

$$P(s) = p_0 + p_1s + \dots + p_ns^n$$

con coeficientes reales que es estable el problema consiste en determinar los intervalos máximos, alrededor de los coeficientes $p_j, j = 1, 2, \dots, n$, tales que la propiedad de estabilidad permanece invariante para todos los coeficientes dentro de los intervalos.

El problema se puede investigar matemáticamente de la forma siguiente: Dados $\lambda_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n$, y $\varepsilon \geq 0$ considere la familia intervalo de polinomios

$$\mathcal{Q}_\varepsilon(s) = q_0 + q_1s + \dots + q_ns^n, \quad (1)$$

donde para $i = 0, 1, \dots, n$,

$$q_i \in [\beta_i, \gamma_i], \text{ con } \beta_i = p_i - \lambda_i\varepsilon \text{ y } \gamma_i = p_i + \lambda_i\varepsilon. \quad (2)$$

El objetivo es encontrar el $\bar{\varepsilon}$ máximo tal que la familia $\mathcal{Q}_\varepsilon(s)$ sea estable para todo $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ y $\mathcal{Q}_{\bar{\varepsilon}}(s)$ no lo sea.

Note que si $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ entonces $\mathcal{Q}_{\varepsilon_1}(s) \subset \mathcal{Q}_{\varepsilon_2}(s)$ mientras que si $\lambda_i = 0, i = 0, 1, \dots, n$, entonces $\mathcal{Q}_\varepsilon(s) = P(s)$ es estable para todo $\varepsilon > 0$ y en este caso se establece que $\bar{\varepsilon} = +\infty$. Así, se supone que al menos para algún i se tiene que $\lambda_i \neq 0$.

El problema ya ha sido abordado en Guiver y Bose (1983) donde para $n \leq 4$ se presentan expresiones para $\bar{\varepsilon}$ basadas en el cálculo numérico de las raíces de cuatro polinomios de orden menor o igual a 4. En Barmish (1984) y Fu y Barmish (1988) se explota el teorema de Kharitonov Kharitonov (1979) para proporcionar una solución al problema con n arbitrario. Explícitamente, considerando el caso cuando $P(s)$ es mónico, es decir $p_n = 1$, y no se encuentra sujeto a perturbaciones, es decir $\lambda_n = 0$, se tiene que

$$\bar{\varepsilon} = \min_{i \leq 4} \left\{ \frac{1}{\lambda_{\max}(-H(P(s))^{-1}H(K_i(s)))} \right\},$$

donde $H(K_i(s)), i = 1, 2, 3, 4$, son las matrices de Hurwitz asociadas a los siguientes cuatro polinomios de tipo Kharitonov:

$$K_1(s) = \beta_0 + \beta_1s + \gamma_2s^2 + \gamma_3s^3 + \dots,$$

$$K_2(s) = \gamma_0 + \gamma_1s + \beta_2s^2 + \beta_3s^3 + \dots,$$

$$K_3(s) = \gamma_0 + \beta_1s + \beta_2s^2 + \gamma_3s^3 + \dots,$$

$$K_4(s) = \beta_0 + \gamma_1s + \gamma_2s^2 + \beta_3s^3 + \dots.$$

Aquí, $\lambda_{\max}(M)$ denota el valor propio máximo de una matriz simétrica y positiva definida M . Nótese que el teorema de Kharitonov permite reducir el problema general a únicamente verificar la estabilidad de los cuatro polinomios inciertos $K_i(s), i = 1, 2, 3, 4$.

Alrededor de esos mismos años en Anderson et al (1987), y desde un enfoque diferente en Argound (1990), se muestra que para $n \leq 5$ el número de polinomios de Kharitonov requeridos para determinar la estabilidad robusta de familias intervalo es menor que cuatro. Este resultado es considerado como uno de los embellecimientos del teorema de Kharitonov, véase Barmish (1994), y su relevancia práctica radica en el hecho de que, por un lado, existen una gran cantidad de problemas de control descritos por polinomios de orden pequeño y que, por otro lado, el diseño de sistemas de orden mayor frecuentemente se basa en el diseño de bloques de orden pequeño.

Aunque estos resultados tienen ya algún tiempo, en la opinión de los autores no son bastante conocidos en la comunidad de control automático. Y como consecuencia, la potencial aplicación de los mismos a problemas prácticos no ha sido suficientemente explotada.

El objetivo de este artículo es precisamente revisar estos resultados y mostrar que combinando las ideas de Fu y Barmish (1988) y Anderson et al (1987) es posible obtener fórmulas sencillas para el cálculo de $\bar{\varepsilon}$ cuando $n \leq 4$. Se considera el caso general de polinomios no mónicos y se hace especial énfasis en el caso particular de polinomios mónicos debido a su importancia en el análisis de sistemas lineales invariantes en tiempo. Las fórmulas obtenidas reducen significativamente el número de condiciones a verificar y es de resaltar que, para el caso general de polinomios de tercer orden y algunos casos especiales de cuarto orden, no involucran el cálculo numérico de raíces de polinomios y/o valores propios de matrices.

Es importante mencionar que, en la formulación, el valor de $\bar{\varepsilon}$ proporciona una medida de robustez mediante hipercajas. Explícitamente, $\bar{\varepsilon}$ determina la hipercaja de estabilidad abierta más grande alrededor del punto $p = (p_0, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ en el espacio de coeficientes de $P(s)$. Evidentemente, otras medidas de robustez pueden ser usadas. Así en Soh et al (1985) la norma l_2 se utiliza para determinar la hiperesfera de estabilidad más grande y éste resultado es generalizado en Tsytkin y Polyak (1991) para normas l^p , con p arbitrario. Sin embargo, dichos resultados están basados en técnicas de barrido de frecuencia y, por tanto, el cálculo del margen de estabilidad debe hacerse numéricamente aún para polinomios de orden pequeño.

El resto del artículo está organizado en la forma siguiente: En la sección 2 se presentan algunos preliminares para el desarrollo de los resultados. La sección 3 presenta los resultados principales. Algunos ejemplos numéricos ilustran los resultados en la sección 4 mientras que varias observaciones concluyen el trabajo en la sección 5.

2. PRELIMINARES

En esta sección se revisan los resultados para familias intervalo de polinomios de orden pequeño reportados en Anderson et al (1987). En particular, se enfoca en los casos $n \leq 4$.

Un resultado esencial en el estudio de la estabilidad de polinomios es el conocido como:

Criterio de Stodola: Si $P(s)$ es estable entonces todos sus coeficientes son distintos de cero y tienen el mismo signo, es decir, todos son positivos o todos son negativos.

Así, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que

$$\beta_i > 0, i = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (3)$$

con β_i definido como en (2).

Note que, en general, el criterio de Stodola es una condición necesaria pero no suficiente para la estabilidad de un polinomio dado. Sin embargo, cuando $n = 2$ la condición necesaria de Stodola es también suficiente. Es decir, el polinomio cuadrático

$$P(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2$$

es estable si, y sólo si, $p_0, p_1, p_2 > 0$. Así, en este caso, se obtiene fácilmente la siguiente:

Proposición 1. La familia de polinomios definida por (1) y (2), con $n = 2$, es estable si, y sólo si,

$$\beta_i > 0, i = 0, 1, 2.$$

Para $n = 3$, la estabilidad robusta de la familia intervalo es asegurada por la condición (3) y la estabilidad del polinomio

$$K_3(s) = \gamma_0 + \beta_1s + \beta_2s^2 + \gamma_3s^3.$$

Del análisis de estabilidad del polinomio $K_3(s)$ mediante el criterio de Hurwitz, véase por ejemplo Gantmacher (1959), se llega al siguiente resultado para polinomios de tercer orden:

Proposición 2. La familia de polinomios definida por (1) y (2), con $n = 3$, es estable si, y sólo si, $\beta_i > 0, i = 0, 1, 2, 3$, y se satisface la desigualdad

$$\beta_1\beta_2 > \gamma_0\gamma_3. \quad (4)$$

De aquí se obtiene fácilmente el siguiente:

Corolario 1. El polinomio

$$P(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + p_3s^3$$

es estable si, y sólo si, $p_i > 0, i = 0, 1, 2, 3$, y se satisface la desigualdad

$$p_1p_2 > p_0p_3.$$

Cuando $n = 4$, la estabilidad robusta de la familia intervalo es asegurada por la condición (3) y la estabilidad de los polinomios

$$K_2(s) = \gamma_0 + \gamma_1s + \beta_2s^2 + \beta_3s^3 + \gamma_4s^4,$$

$$K_3(s) = \gamma_0 + \beta_1s + \beta_2s^2 + \gamma_3s^3 + \gamma_4s^4.$$

El análisis de estabilidad de los polinomios $K_2(s)$ y $K_3(s)$ conduce al siguiente resultado:

Proposición 3. La familia de polinomios definida por (1) y (2), con $n = 4$, es estable si, y sólo si, $\beta_i > 0, i = 0, 1, 2, 3, 4$, y se satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\gamma_1\beta_2\beta_3 > \gamma_1^2\gamma_4 + \gamma_0\beta_3^2, \quad (5)$$

$$\beta_1\beta_2\gamma_3 > \beta_1^2\gamma_4 + \gamma_0\gamma_3^2. \quad (6)$$

De aquí se obtiene directamente el siguiente:

Corolario 2. El polinomio

$$P(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + p_3s^3 + p_4s^4,$$

es estable si, y sólo si, $p_i > 0, i = 0, 1, 2, 3, 4$, y se satisface la desigualdad

$$p_1p_2p_3 > p_1^2p_4 + p_0p_3^2.$$

Observación 1. Las Proposiciones 1, 2 y 3 son válidas cuando las cotas de los intervalos $\beta_i, \gamma_i, i = 0, 1, 2, 3, 4$, son constantes arbitrarias y no necesariamente de la forma en (2), véase Anderson et al (1987).

Observación 2. Es importante notar el papel fundamental que desempeña la condición necesaria de Stodola en la simplificación de los resultados para la estabilidad robusta de familias intervalo de polinomios de orden pequeño. De hecho, si únicamente se considera la desigualdad (4) cuando $n = 3$, y las desigualdades (5)-(6) cuando $n = 4$,

como ocurre en Argound (1990), entonces los resultados son incorrectos como se mostrará en la sección IV mediante un ejemplo.

3. RESULTADOS PRINCIPALES

Una vez establecido lo anterior se está listo para mostrar los resultados principales.

En lo siguiente, los valores $\frac{p_i}{\lambda_i}, i = 0, 1, 2, 3, 4$, desempeñarán un papel importante en la obtención de los resultados. En el caso cuando $\lambda_i = 0$ se conviene que $\frac{p_i}{\lambda_i} = +\infty$.

3.1 Caso de polinomios de segundo orden

Considere una familia de polinomios $Q_\varepsilon(s)$, definida por (1) y (2), cuando $n = 2$. En este caso se tiene el siguiente resultado:

Proposición 4. El máximo $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que la familia de polinomios $Q_\varepsilon(s)$ es estable para todo $0 \leq \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ está dado por

$$\bar{\varepsilon} = \min_{j \in [0, m]} \left\{ \frac{p_j}{\lambda_j} \right\},$$

donde $m = 2$ para el caso no mónico y $m = 1$ para el caso mónico, es decir $p_2 = 1$ y $\lambda_2 = 0$.

Demostración. Como en el caso de polinomios cuadráticos la condición necesaria de Stodola es también suficiente se sigue que para cada $\varepsilon > 0$ la familia $Q_\varepsilon(s)$ es estable si, y sólo si, $\beta_j = p_j - \lambda_j \varepsilon > 0, j = 0, 1, 2$, es decir, $\varepsilon > 0$ debe satisfacer

$$\varepsilon < \frac{p_j}{\lambda_j}, j = 0, 1, 2.$$

Tomando el mínimo de los valores $\frac{p_j}{\lambda_j}, j = 0, 1, 2$, obtenemos el máximo $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que $Q_\varepsilon(s)$ es estable para todo $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ como es deseado. El caso mónico sigue de observar que $p_2 = 1$ y $\lambda_2 = 0$. ■

3.2 Caso de Polinomios de Tercer Orden

En esta sección se considerará una familia de polinomios $Q_\varepsilon(s)$, definida por (1) y (2), cuando $n = 3$. Se tiene entonces la siguiente:

Proposición 5. El máximo $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que la familia de polinomios $Q_\varepsilon(s)$ es estable para todo $0 \leq \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ está dado por

$$\bar{\varepsilon} = \min \left\{ \hat{\varepsilon}, \frac{p_0}{\lambda_0}, \frac{p_3}{\lambda_3} \right\}, \quad (7)$$

donde $\hat{\varepsilon}$ está determinado por

$$\hat{\varepsilon} = \begin{cases} \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} & \text{si } A \neq 0, \\ -\frac{C}{B} & \text{si } A = 0, \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} A &= \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3, \\ B &= -(p_1 \lambda_2 + p_2 \lambda_1 + p_0 \lambda_3 + p_3 \lambda_0), \\ C &= p_1 p_2 - p_0 p_3. \end{aligned}$$

Demostración. El objetivo es encontrar $\bar{\varepsilon} > 0$ máximo con las características mencionadas. Se define la función continua

$$h(\varepsilon) = (p_1 - \lambda_1 \varepsilon)(p_2 - \lambda_2 \varepsilon) - (p_0 + \lambda_0 \varepsilon)(p_3 + \lambda_3 \varepsilon).$$

Por la Proposición 2, para cada $\varepsilon > 0$, la familia $Q_\varepsilon(s)$ es estable si, y sólo si,

$$h(\varepsilon) > 0 \quad \text{y} \quad \varepsilon < \min_{i \in [0, 3]} \left\{ \frac{p_i}{\lambda_i} \right\}.$$

Note que como $P(s)$ se asume estable, por el Corolario 1, se tiene que

$$0 < h(0) = p_1 p_2 - p_0 p_3 = C. \quad (8)$$

Observe que la función continua

$$g(\varepsilon) = (p_0 + \lambda_0 \varepsilon)(p_3 + \lambda_3 \varepsilon)$$

satisface $g(\varepsilon) > 0, \forall \varepsilon \geq 0$. Sea

$$\varepsilon' = \min \left\{ \frac{p_1}{\lambda_1}, \frac{p_2}{\lambda_2} \right\}.$$

De la definición de $h(\varepsilon)$ se tiene que

$$h(\varepsilon) \rightarrow -g(\varepsilon') < 0 \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow \varepsilon'. \quad (9)$$

Entonces, de (8), (9) y la continuidad de h , existe ε_0 con $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon'$ tal que es una raíz positiva de h , es decir, $h(\varepsilon_0) = 0$.

Tomando la mínima raíz positiva de h y denotándola por $\hat{\varepsilon}$, de los argumentos anteriores se tiene que $h(\varepsilon) > 0$ para $\varepsilon \in [0, \hat{\varepsilon})$ y $h(\hat{\varepsilon}) = 0$.

Claramente como $\hat{\varepsilon} < \varepsilon'$ entonces

$$\min \left\{ \hat{\varepsilon}, \frac{p_0}{\lambda_0}, \frac{p_3}{\lambda_3} \right\} = \min_{i \in [0, 3]} \left\{ \hat{\varepsilon}, \frac{p_i}{\lambda_i} \right\}.$$

Se sigue que el máximo $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que $Q_\varepsilon(s)$ es estable para todo $0 \leq \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ está dado por (7).

Realizando los cálculos algebraicos sobre $h(\varepsilon)$ se tiene que

$$h(\varepsilon) = A\varepsilon^2 + B\varepsilon + C, \quad (10)$$

con A, B, C determinadas como en el enunciado. Las raíces de (10) son:

$$\varepsilon_1 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad \varepsilon_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Claramente, por la definición de los λ_i y p_i , el coeficiente B es negativo y por lo tanto el análisis de A arroja 3 casos:

Caso 1 $A > 0$. En este caso el término $-4AC$ es negativo y como $h(\varepsilon)$ tiene al menos una raíz positiva, entonces $B^2 - 4AC \geq 0$. Como $B^2 > B^2 - 4AC$ entonces ε_1 y ε_2 son positivas. Siendo la menor de ellas ε_1 .

Caso 2 $A < 0$. El caso se resuelve análogamente al anterior y las raíces cumplen $\varepsilon_2 < 0 < \varepsilon_1$.

Caso 3 $A = 0$. Como $h(\varepsilon) = B\varepsilon + C = 0$, la única raíz positiva es

$$\hat{\varepsilon} = -\frac{C}{B}.$$

Llegando así al resultado deseado. ■

El siguiente resultado es muy útil, en el caso de buscar el margen de estabilidad mediante cajas cuadradas, por la sencillez al calcular el $\bar{\varepsilon}$.

Corolario 3. El máximo $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que la familia de polinomios $Q_\varepsilon(s)$, con $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, es estable para todo $0 \leq \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ está dado por

$$\bar{\varepsilon} = \min \left\{ \frac{p_1 p_2 - p_0 p_3}{p_0 + p_1 + p_2 + p_3}, p_0, p_3 \right\}.$$

Demostración. Se sigue de la Proposición 5 al notar que $A = \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3 = 0$. ■

El caso mónico El siguiente resultado caracteriza el margen de estabilidad de polinomios mónicos de tercer orden, es decir el coeficiente líder $p_3 = 1$ y no se encuentra sujeto a perturbaciones, es decir $\lambda_3 = 0$.

Corolario 4. El máximo $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que la familia de polinomios $\mathcal{Q}_\varepsilon(s)$, tomando $p_3 = 1, \lambda_3 = 0$, es estable para todo $0 \leq \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ está dado por

$$\bar{\varepsilon} = \min \left\{ \hat{\varepsilon}, \frac{p_0}{\lambda_0} \right\},$$

donde $\hat{\varepsilon}$ está determinado por

$$\bar{\varepsilon} = \begin{cases} \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} & \text{si } A \neq 0, \\ -\frac{C}{B} & \text{si } A = 0, \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} A &= \lambda_1 \lambda_2, \\ B &= -(p_1 \lambda_2 + p_2 \lambda_1 + \lambda_0), \\ C &= p_1 p_2 - p_0. \end{aligned}$$

Demostración. Se sigue de la Proposición 5 al sustituir $\lambda_3 = 0$ y $p_3 = 1$. ■

3.3 Caso de Polinomios de Cuarto Orden

En esta sección se considera una familia de polinomios $\mathcal{Q}_\varepsilon(s)$, definida por (1) y (2), cuando $n = 4$.

Utilizando una estrategia similar a la anterior se definen los siguientes polinomios auxiliares:

$$\begin{aligned} h_1(\varepsilon) &= (p_1 + \lambda_1 \varepsilon)(p_2 - \lambda_2 \varepsilon)(p_3 - \lambda_3 \varepsilon) \\ &\quad - (p_1 + \lambda_1 \varepsilon)^2(p_4 + \lambda_4 \varepsilon) - (p_0 + \lambda_0 \varepsilon)(p_3 - \lambda_3 \varepsilon)^2, \\ h_2(\varepsilon) &= (p_1 - \lambda_1 \varepsilon)(p_2 - \lambda_2 \varepsilon)(p_3 + \lambda_3 \varepsilon) \\ &\quad - (p_1 - \lambda_1 \varepsilon)^2(p_4 + \lambda_4 \varepsilon) - (p_0 + \lambda_0 \varepsilon)(p_3 + \lambda_3 \varepsilon)^2. \end{aligned}$$

Se tiene así la siguiente:

Proposición 6. El máximo $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que la familia de polinomios $\mathcal{Q}_\varepsilon(s)$ es estable para todo $0 \leq \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ está dado por

$$\bar{\varepsilon} = \min \left\{ \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \frac{p_0}{\lambda_0}, \frac{p_4}{\lambda_4} \right\}, \quad (11)$$

donde $\hat{\varepsilon}_1$ y $\hat{\varepsilon}_2$ son respectivamente las mínimas raíces reales positivas de los polinomios $h_1(\varepsilon)$ y $h_2(\varepsilon)$.

Demostración. El objetivo es encontrar $\bar{\varepsilon} > 0$ máximo con las características mencionadas. Por la Proposición 3, para cada $\varepsilon > 0$, la familia $\mathcal{Q}_\varepsilon(s)$ es estable si, y sólo si,

$$h_1(\varepsilon) > 0, h_2(\varepsilon) > 0 \text{ y } \varepsilon < \min_{i \in [0,4]} \left\{ \frac{p_i}{\lambda_i} \right\}.$$

Note que como $P(s)$ se asume estable, por el Corolario 2, se tiene que

$$h_1(0) = h_2(0) = p_1 p_2 p_3 - p_1^2 p_4 + p_0 p_3^2 > 0. \quad (12)$$

Considerando las siguientes dos funciones continuas:

$$\begin{aligned} g_1(\varepsilon) &= (p_1 + \lambda_1 \varepsilon)^2(p_4 + \lambda_4 \varepsilon) + (p_0 + \lambda_0 \varepsilon)(p_3 - \lambda_3 \varepsilon)^2, \\ g_2(\varepsilon) &= (p_1 - \lambda_1 \varepsilon)^2(p_4 + \lambda_4 \varepsilon) + (p_0 + \lambda_0 \varepsilon)(p_3 + \lambda_3 \varepsilon)^2. \end{aligned}$$

Las funciones $g_1(\varepsilon)$ y $g_2(\varepsilon)$ satisfacen $g_1(\varepsilon), g_2(\varepsilon) > 0, \forall \varepsilon \geq 0$. Sea

$$\varepsilon'_1 = \min \left\{ \frac{p_2}{\lambda_2}, \frac{p_3}{\lambda_3} \right\} \text{ y } \varepsilon'_2 = \min \left\{ \frac{p_1}{\lambda_1}, \frac{p_2}{\lambda_2} \right\}.$$

De las definiciones de $h_1(\varepsilon)$ y $h_2(\varepsilon)$ se tiene que

$$h_j(\varepsilon) \rightarrow -g_j(\varepsilon'_j) < 0 \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow \varepsilon'_j, \quad j = 1, 2. \quad (13)$$

Entonces, de (12), (13) y la continuidad de h_1 y h_2 , existen ε_1 y ε_2 con $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon'_1$ y $0 \leq \varepsilon_2 < \varepsilon'_2$ tales que son raíces positivas de h_1 y h_2 , respectivamente, es decir, $h_1(\varepsilon_1) = 0$ y $h_2(\varepsilon_2) = 0$.

Tomando las mínimas raíces positivas de h_1, h_2 y denotándolas por $\hat{\varepsilon}_1$ y $\hat{\varepsilon}_2$, respectivamente. De los argumentos anteriores se tiene que, por un lado, $h_1(\varepsilon) > 0$ para $\varepsilon \in [0, \hat{\varepsilon}_1)$ y $h(\hat{\varepsilon}_1) = 0$, mientras que, por otro lado, $h_2(\varepsilon) > 0$ para $\varepsilon \in [0, \hat{\varepsilon}_2)$ y $h(\hat{\varepsilon}_2) = 0$.

Claramente como $\hat{\varepsilon}_j < \varepsilon'_j, j = 1, 2$, entonces

$$\min \left\{ \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \frac{p_0}{\lambda_0}, \frac{p_4}{\lambda_4} \right\} = \min_{i \in [0,4]} \left\{ \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \frac{p_i}{\lambda_i} \right\}.$$

Se sigue que el máximo $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que $\mathcal{Q}_\varepsilon(s)$ es estable para todo $0 \leq \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ está dado por (11). ■

La cota máxima $\bar{\varepsilon}$ que garantiza la estabilidad de la familia de polinomios $\mathcal{Q}_\varepsilon(s)$ se puede calcular mediante el siguiente procedimiento:

Paso 1 Calcular las raíces de los polinomios $h_1(\varepsilon)$ y $h_2(\varepsilon)$. Note que esto implica resolver una ecuación cúbica y tal vez la necesidad de emplear métodos numéricos para hacerlo.

Paso 2 Determinar la mínima raíz positiva $\hat{\varepsilon}_1$ de $h_1(\varepsilon)$ y $\hat{\varepsilon}_2$ de $h_2(\varepsilon)$.

Paso 3 El mínimo de $\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \frac{p_0}{\lambda_0}$ y $\frac{p_4}{\lambda_4}$ determina la cota $\bar{\varepsilon}$ buscada.

El caso mónico Considere el caso mónico de cuarto orden, es decir el coeficiente líder $p_4 = 1$ y $\lambda_4 = 0$. En particular note que si $\lambda_1 \lambda_2 \neq \lambda_0 \lambda_3$ entonces los polinomios $h_1(s)$ y $h_2(s)$ son cúbicos.

Centrándose en el caso especial en que $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_0 \lambda_3$ (en particular esto ocurre cuando $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$). En este caso $h_1(s)$ y $h_2(s)$ son polinomios cuadráticos y, por tanto, es posible determinar fórmulas explícitas para $\hat{\varepsilon}_1$ y $\hat{\varepsilon}_2$ como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 7. El máximo $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que la familia de polinomios $\mathcal{Q}_\varepsilon(s)$, con $p_4 = 1, \lambda_4 = 0$ y $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_0 \lambda_3$, es estable para todo $0 \leq \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ está dado por

$$\bar{\varepsilon} = \min \left\{ \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \frac{p_0}{\lambda_0} \right\}, \quad (14)$$

donde $\hat{\varepsilon}_1$ y $\hat{\varepsilon}_2$ están determinados por

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_1 &= \begin{cases} \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} & \text{si } A \neq 0, \\ -\frac{C}{B} & \text{si } A = 0. \end{cases} \\ \hat{\varepsilon}_2 &= \frac{-E - \sqrt{E^2 - 4DC}}{2D}, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} A &= \lambda_3(\lambda_2 p_1 + \lambda_0 p_3 - \lambda_3 p_0 - \lambda_1 p_2) - \lambda_1^2, \\ B &= p_3(2\lambda_3 p_0 + \lambda_1 p_2 - \lambda_2 p_1 - \lambda_0 p_3) - p_1(2\lambda_1 - \lambda_3 p_2), \\ C &= p_1 p_2 p_3 - p_1^2 - p_0 p_3^2, \\ D &= -\lambda_3(\lambda_3 p_0 + \lambda_2 p_1 + \lambda_1 p_2 + \lambda_0 p_3) - \lambda_1^2, \\ E &= p_1(2\lambda_1 + \lambda_3 p_2) - p_3(2\lambda_3 p_0 + \lambda_1 p_2 + \lambda_2 p_1 + \lambda_0 p_3). \end{aligned}$$

Demostación. Realizando los cálculos algebraicos para $h_1(\varepsilon)$ y $h_2(\varepsilon)$, y tomando en cuenta que $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_0 \lambda_3$, se tiene que éstas funciones son polinomios cuadráticos definidos por

$$h_1(\varepsilon) = A\varepsilon^2 + B\varepsilon + C, \quad h_2(\varepsilon) = D\varepsilon^2 + E\varepsilon + C,$$

donde A, B, C, D y E están determinados como en el enunciado. La meta es encontrar las raíces mínimas $\hat{\varepsilon}_1$ y $\hat{\varepsilon}_2$ de $h_1(\varepsilon)$ y $h_2(\varepsilon)$; las cuales, por la Proposición 6, existen.

Después de hacer un análisis semejante al realizado en la Proposición 5 se obtienen los siguientes resultados para $h_1(\varepsilon)$:

Caso 1 Cuando $A \neq 0$, el análisis determina que

$$\hat{\varepsilon}_1 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (15)$$

Caso 2 Si $A = 0$ la raíz real positiva $\hat{\varepsilon}_1$ está determinada por

$$\hat{\varepsilon}_1 = -\frac{C}{B}. \quad (16)$$

Para el caso de $h_2(\varepsilon)$ se tiene que $D < 0$ y $C > 0$. Siguiendo un análisis similar al anterior, se concluye que

$$\hat{\varepsilon}_2 = \frac{-E - \sqrt{E^2 - 4DC}}{2D}.$$

El resultado sigue de la Proposición 6. ■

3.4 Efecto de los parámetros λ_i

Para finalizar esta sección se discute el efecto de los parámetros $\lambda_i \geq 0$ sobre el cálculo del margen de estabilidad.

Cuando todos los parámetros son iguales se tendrán hipercajas cuadradas mientras que con parámetros distintos las hipercajas serán rectangulares, véase la Fig. 1 donde se ilustran dos cajas alrededor de un punto $p \in \mathbb{R}^3$ resultantes de modificar λ_j . Lo anterior tiene las siguientes dos consecuencias importantes:

Por un lado, dado un problema de estabilidad robusta particular, los parámetros λ_i permiten introducir diferentes pesos en las perturbaciones de los coeficientes p_j y de esta forma ampliar o disminuir las variaciones permisibles con base en la naturaleza del problema de estabilidad robusta en consideración. Por ejemplo, los efectos de cambios en las ganancias de control o cambios de carga en un circuito eléctrico pueden ser considerados por distintos λ_i .

Por otro lado, con la selección de diferentes pesos λ_i se pueden determinar varios conjuntos de estabilidad en el espacio de coeficientes de un polinomio mediante la unión de varias hipercajas. Explícitamente, sean $\bar{\varepsilon}_1$ y $\bar{\varepsilon}_2$ los márgenes de estabilidad de un polinomio nominal estable de cuarto orden

$$P(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + p_3 s^3 + p_4 s^4$$

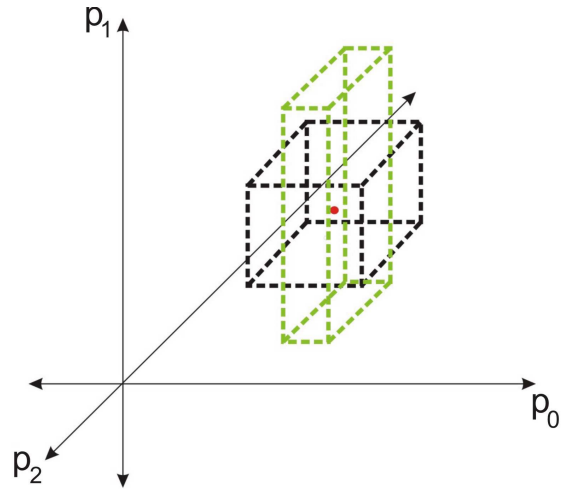


Fig. 1. Cajas resultantes de modificar λ_i en el espacio de coeficientes.

asociados respectivamente a los pesos $\lambda_i^1, \lambda_i^2, i = 0, 1, 2, 3, 4$. Entonces se tiene que las cajas abiertas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathbb{R}^5$ definidas por

$$\mathcal{C}_1 = \{q \in \mathbb{R}^5 : q_j \in (p_j - \lambda_j^1 \bar{\varepsilon}_1, p_j + \lambda_j^1 \bar{\varepsilon}_1), \\ j = 0, 1, 2, 3, 4\},$$

$$\mathcal{C}_2 = \{q \in \mathbb{R}^5 : q_j \in (p_j - \lambda_j^2 \bar{\varepsilon}_2, p_j + \lambda_j^2 \bar{\varepsilon}_2), \\ j = 0, 1, 2, 3, 4\},$$

son regiones de estabilidad para cualquier polinomio de cuarto orden

$$Q(s) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + q_3 s^3 + q_4 s^4,$$

con vector de coeficientes $q = (q_0, q_1, q_2, q_3, q_4)$ tal que $q \in \mathcal{C}_1$ y/o $q \in \mathcal{C}_2$. Se sigue que la unión de los conjuntos \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , es decir, el conjunto $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ es también una región de estabilidad para el polinomio $Q(s)$.

4. EJEMPLOS

Considere el siguiente polinomio nominal estable:

$$P(s) = s^4 + 15s^3 + 24s^2 + 12s + 2.$$

Tome $\lambda_i = 1, i = 0, 1, 2, 3$. De la Proposición 7 se obtiene que $\hat{\varepsilon}_1 \approx 13.0303, \hat{\varepsilon}_2 \approx 4.9572$ y por tanto

$$\bar{\varepsilon} = \min \{13.0303, 4.9572, 2\} = 2.$$

Así, en este caso, el margen de estabilidad está determinado por $\frac{p_0}{\lambda_0} = 2$ y no por $\hat{\varepsilon}_1$ o $\hat{\varepsilon}_2$.

Este ejemplo muestra la observación 2 acerca de que los resultados son incorrectos si únicamente se consideran las desigualdades (5)-(6), es decir $\hat{\varepsilon}_1$ y $\hat{\varepsilon}_2$ para el cálculo del margen de robustez.

De hecho, si $\bar{\varepsilon} = \min \{\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2\} = 4.9572$ entonces para $\varepsilon' = 4 < \bar{\varepsilon}$ se tiene que $0 \in [p_0 - \lambda_0 \varepsilon', p_0 + \lambda_0 \varepsilon'] = [-2, 6]$, así que el polinomio $P'(s) = s^4 + 15s^3 + 24s^2 + 12s$ satisface $P'(s) \in \mathcal{Q}_{\varepsilon'}(s)$ y claramente $P'(s)$ no es estable.

De la expresión (14) uno puede ver fácilmente que el margen de estabilidad puede incrementarse modificando el parámetro de peso λ_0 .

Por ejemplo, escoja $\lambda_0 = 0.5, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 2$ de tal forma que la condición $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_0\lambda_3$ se satisface y la Proposición 7 puede aún aplicarse. En este caso, se obtiene que

$$\bar{\varepsilon} = \min \{7.1506, 5.5140, 4\} = 4.$$

Cuando $\lambda_i = 1, i = 0, 1, 2, 3$, la hipercaja cuadrada es

$$\mathcal{C}_1 = \{q \in \mathbb{R}^5 : q_0 \in (0, 4), q_1 \in (10, 14), q_2 \in (22, 26), q_3 \in (13, 17), q_4 = 1\}$$

mientras que para $\lambda_0 = 0.5, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 2$, la hipercaja rectangular es

$$\mathcal{C}_2 = \{q \in \mathbb{R}^5 : q_0 \in (0, 4), q_1 \in (8, 16), q_2 \in (20, 28), q_3 \in (7, 23), q_4 = 1\}.$$

Como consecuencia el conjunto $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ es una región de estabilidad para cualquier polinomio

$$Q(s) = q_4s^4 + q_3s^3 + q_2s^2 + q_1s + q_0,$$

con vector de coeficientes $q = (q_0, q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathcal{C}$.

5. CONCLUSIONES

En este artículo se presentan fórmulas explícitas para determinar el margen de estabilidad de polinomios de orden menor o igual a cuatro. En todos los casos, las fórmulas obtenidas reducen significativamente el número de restricciones a verificar comparado con los resultados existentes en la literatura.

Se muestra que para el caso general de polinomios de orden dos, tres y una amplia clase de polinomios de cuarto orden el margen de estabilidad puede calcularse mediante fórmulas sencillas sin involucrar el cálculo numérico de valores propios de matrices y/o raíces de polinomios.

Una característica particular de los resultados es que clarifican la dependencia de los coeficientes y parámetros de peso sobre el margen de estabilidad en contraste con otros resultados existentes basados en métodos numéricos.

Adicionalmente se muestra cómo aplicar los resultados obtenidos para determinar nuevas regiones de estabilidad mediante la unión de hipercajas en el espacio de coeficientes.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo de Ana Marcela Garza Burgos y Daniel Melchor-Aguilar fue parcialmente financiado por el proyecto CONACYT 131587.

REFERENCES

- Anderson B.D.O, Jury E.I., Mansour M., On robust Hurwitz polynomials, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 32, pp. 909-913, 1987.
- Argoun, M. B., On the stability of low-order perturbed polynomials, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 35, pp.180-182, 1990.

- Barmish B.R., Invariance of the strict hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 29, pp. 935-936, 1984.
- Barmish B.R., New tools for robustness of linear systems, Macmillan Publishing Company, 1994.
- Fu M., Barmish B.R., Maximal unidirectional perturbation bounds for stability of polynomials and matrices, *Sys. Control. Lett.*, vol. 11, pp. 173-179, 1988.
- Gantmacher F.R., The theory of matrices, Vol.2, Chelsea Publishing Company, New York, NY, 1959.
- Guiver J.P., Bose N.K., Strictly hurwitz property invariance of quartics under coefficient perturbation, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 28, pp. 106-107, 1983.
- Hinrichsen D., Pritchard A.J., Stability radii of linear systems, *Sys. Control. Lett.*, vol. 7, pp. 1-10, 1986.
- Kharitonov, V.L., Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations, *Differential Uraunen*, vol. 14, pp. 2086-2088. *Translations in Differential Equations*, pp. 1483-1485, 1979.
- Soh C.B., Berger C.S., Dabke K.P., On the stability properties of polynomials with perturbed coefficients, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 30, pp. 1033-1036, 1985.
- Tsyppkin, Y.Z., Polyak B.T., Frequency domain criterion for the l^p -robust stability of continuous linear systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 36, pp. 1464-1469, 1991.
- Zhou K.M., Khargonekar P.P., Stability robustness bounds for linear state space models with structured uncertainty, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 32, pp. 621-623, 1987.