

## Estabilización del Péndulo Doble mediante excitación paramétrica

I. Gutierrez \* J. Collado \*\* J. Tellez \*\*\*

\* Departamento de Control Automático. Cinvestav, México D.F.  
(e-mail: igutierrez@ctrl.cinvestav.mx).

\*\* Departamento de Control Automático. Cinvestav, México D.F.  
(e-mail: jcollado@ctrl.cinvestav.mx).

\*\*\* Facultad de Ingeniería. UAMN, Huixquilucan México, (e-mail:  
j2tellez@gmail.com)

---

### Resumen:

En este artículo, presentamos el análisis de las zonas de estabilidad del péndulo doble invertido bajo una excitación paramétrica. Se muestra la completa relación que existe entre la frecuencias y amplitud de la excitación paramétrica, conocidas las características físicas del péndulo doble. Se verificó experimentalmente la validez de los resultados mostrados.

Adicionalmente se analizan numéricamente, utilizando la teoría de Floquet-Lyapunov, las zonas de estabilidad para el péndulo invertido de más eslabones, mostrando la contracción que sufren las zonas de estabilidad y la dificultad inherente que conlleva estabilizar péndulos de múltiples eslabones.

*Keywords:* Resonancia Paramétrica, Lazo Abierto, Ecuación de Mathieu, Péndulo Doble, Teoría de Floquet

---

### 1. INTRODUCCIÓN

Los efectos en la estabilidad, producidos por movimientos oscilatorios en los sistemas mecánicos son de gran interés; principalmente por ser implementados en lazo abierto eliminando la necesidad de sensores y su robustez ante incertidumbre paramétrica. El trabajo realizado por una fuerza vibrante en un sistema mecánico pueden ser entendido gracias a trabajos como los de [Butikov (2001)], [Blekhman (2000)] ó el monumental tratado de [Yakubovich (1975)].

Desde inicios del siglo pasado se describió la inferencia de una excitación periódica en el pivote de un péndulo [Stephenson (1908)], posteriormente, la estabilidad del péndulo invertido fue explicada y verificada experimentalmente por Pjotr Kapitza, de ahí que hoy en día el péndulo invertido con el eje de suspensión vibratorio sea conocido como el 'Péndulo de Stephenson-Kapitza' o simplemente 'Péndulo de Kapitza'. A finales de siglo, ya con nuevas herramientas de análisis, ya se había logrado demostrar la estabilidad de un péndulo invertido de  $n$ -eslabones [Weibel (1998)]; en donde al fijar la amplitud de oscilación se demostraba que para frecuencias suficientemente grandes se lograba estabilizar dicho sistema, sin mostrarse claramente la relación entre la amplitud y la frecuencias de la señal de excitación. En otros estudios [Otterbein (1980)], se puede ver como las zonas de estabilidad de un péndulo invertido de  $n$ -eslabones, pero considerando únicamente masas y longitudes iguales, se contrae a medida que el número de eslabones se incrementa.

En el presente trabajo mediante métodos analíticos y numéricos utilizando la teoría de Floquet y la aproximación de la solución usando la técnica de perturbaciones

regulares, se observa de forma clara la relación que debe existir entre la amplitud y la frecuencia de la señal de excitación dada la construcción física del péndulo; además de una extensión interesante al equilibrio de un péndulo invertido de  $n$ -eslabones.

El trabajo se divide de la siguiente manera, en la sección 2 se obtiene el modelo matemático del péndulo invertido. En la sección 3 se analiza de forma analítica la región de estabilidad del péndulo de dos eslabones demostrando que está contenida en la zona de estabilidad del péndulo simple, y de forma numérica las zonas de estabilidad del péndulo de 1 hasta 4 eslabones. En la sección 4 se presentan los resultados de la simulación sobre el modelo no lineal, así como los resultados sobre el sistema real. Finalmente en la sección 5 se presentan las conclusiones.

### 2. ECUACIÓN GENERAL DEL PÉNDULO

Considere el péndulo de la figura 1, con parámetros concentrados, sean  $m_i$  las masas de cada eslabón concentradas en la punta del mismo, las coordenadas  $(x_i, y_i)$  de dichas masas con respecto al primer pivote se expresan como

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) &= (l_1 \cos \varphi_1, l_1 \sin \varphi_1) \\(x_2, y_2) &= (x_1 + l_2 \cos \varphi_2, y_1 + l_2 \sin \varphi_2) \\&\dots \\(x_n, y_n) &= (x_{n-1} + l_n \cos \varphi_n, y_{n-1} + l_n \sin \varphi_n)\end{aligned}$$

La energía cinética del sistema esta dada por la función

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2)$$

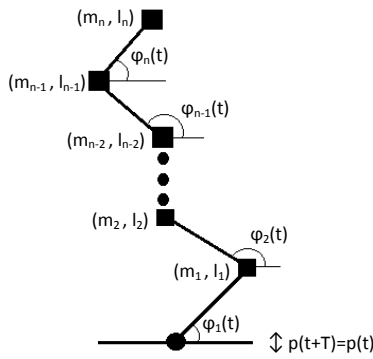


Figura 1. Péndulo de  $n$  eslabones

mientras que la energía potencial es

$$V = g \left( \sum_{i=1}^n m_i (y_i + p(t)) \right)$$

con  $g \left[ \frac{m}{s^2} \right]$  como la constante de gravedad y  $p(t)$  la función de excitación de promedio cero de la base del péndulo.

La dinámica del sistema es obtenida mediante la ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (1)$$

donde  $L := T - V$ .

La dinámica para un solo eslabón linealizado alrededor del punto de equilibrio superior, esta dada por la ecuación

$$\ddot{\varphi} + \left( \frac{-g}{l} + \frac{\ddot{p}}{l} \right) \varphi = 0 \quad (2)$$

Si  $n = 2$ , considerando la relaciones  $m_2 = km_1$ ,  $k > 0$  y  $l_2 = rl_1$ ,  $r > 0$ , la ecuación linealizada en el punto de equilibrio superior es

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \left( \frac{-g}{l} + \frac{\ddot{p}}{l} \right) \begin{bmatrix} k+1 & -k \\ -(k+1) & (k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3)$$

Y aunque se calculó la ecuación para los péndulos de 3 y 4 eslabones para encontrar las zonas de estabilidad, no se presentan las ecuaciones por no aportar mayor información al presente trabajo. Para mas detalles consultar [Otterbein (1980)].

### 2.1 Péndulo de un eslabón

Sea  $p = a \cos \omega t$ , una señal periódica de amplitud  $a [m]$  y frecuencia  $\omega \left[ \frac{rad}{s} \right]$ , (2) se traduce a

$$\ddot{\varphi} + [\alpha \omega^2 + \beta \omega^2 \cos(\omega t)] \varphi = 0$$

donde

$$\alpha = -\frac{g}{l\omega^2}, \beta = \frac{a}{l} \quad (4)$$

haciendo el cambio de variables  $\omega t = \tau \left( \frac{d^2}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2}{d\tau^2} \right)$ , se llega a la ecuación de Mathieu normalizada

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + [\alpha + \beta \cos(\tau)] \varphi = 0 \quad (5)$$

### 2.2 Péndulo de 2 eslabones

Aplicando la misma señal periódica en (3), obtenemos

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + (\alpha \omega^2 + \beta \omega^2 \cos \omega t) \begin{bmatrix} k+1 & -k \\ -(k+1) & (k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = 0$$

Normalizando nuevamente mediante  $\omega t = \tau$ , obtenemos la ecuación acoplada de Mathieu de segundo orden

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 \varphi_1}{d\tau^2} \\ \frac{d^2 \varphi_2}{d\tau^2} \end{bmatrix} + (\alpha + \beta \cos \tau) A \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

con  $A \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$  definida por

$$A := \begin{bmatrix} k+1 & -k \\ -(k+1) & (k+1) \end{bmatrix}$$

Algunas características fundamentales del sistema salen a la luz en este momento, ver [Yakubovich (1975)], [Magnus (2004)], [Hansen (1985)]. Existe una transformación  $T$  no singular, tal que  $TAT^{-1} = \text{diag} \{ \omega_1^2, \omega_2^2 \}$  y definiendo el cambio de coordenadas  $\varphi := T\zeta$ , permite obtener el sistema

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 \zeta_1}{d\tau^2} \\ \frac{d^2 \zeta_2}{d\tau^2} \end{bmatrix} + (\alpha + \beta \cos \tau) \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = 0$$

Este cambio de coordenadas, permite ver un sistema desacoplado, un análisis sencillo arroja que el nacimiento de las zonas de estabilidad e inestabilidad esta dado por

$$\alpha_0 = \frac{k^2}{4\omega_j^2}, k = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2$$

Considerando solo las zonas de estabilidad correspondientes a  $k = 0, 1$  y  $j = 1$ , pues estamos interesados en las fronteras de las lenguas de Arnold cero y uno, i.e.

$$\alpha_0^0 = 0, \alpha_0^1 = \frac{1}{4\omega_1^2} \quad (7)$$

El superíndice será utilizado para diferenciar entre estos dos puntos.

## 3. ZONAS DE ESTABILIDAD

Aprovechando que la frontera entre zonas estables e inestables estan caracterizadas por soluciones periódicas de las ecuaciones diferenciales [Yakubovich (1975)], además que el parámetro  $\beta \ll 1$ ; buscaremos soluciones periódicas mediante la expansión de Poincare sobre el parámetro pequeño  $\beta$ , para más detalles de este método consultar [Migulin (1975)], [Jordan (2007)].

De igual forma, computacionalmente es posible encontrar las zonas de estabilidad empleando el teorema de Floquet-Lyapunov (ver Apéndice A).

### 3.1 Solución Analítica Péndulo Simple

La región de estabilidad del péndulo simple ha sido ampliamente documentada, ver [Seyranian (2006)], [Otterbein (1980)], [Sartorelli (2008)]. La zona de estabilidad, esta delimitada inferiormente por la curva

$$\alpha = -\frac{1}{2}\beta^2 \quad (8)$$

y superiormente por la curva

$$\alpha = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}\beta^2 \quad (9)$$

Considerando (4), decimos que el punto de equilibrio superior del péndulo es estable siempre que

$$a < \frac{l}{2}, \quad a\omega > \sqrt{2gl}$$

Si la amplitud de  $p(t)$  es pequeña,  $a < \frac{l}{2}$  se satisface trivialmente, cuidando solo el satisfacer que  $a\omega > \sqrt{2gl}$ .

### 3.2 Solución Analítica Péndulo Doble

Al ser  $\beta \ll 1$ ; entonces, la solución de (6), no se aleja demasiado de la solución nominal cuando  $\beta = 0$ . La solución debe ser entonces de la forma

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) &= \varphi_{1,0}(\tau) + \beta\varphi_{1,1}(\tau) + \beta^2\varphi_{1,2}(\tau) + o(\beta^2) \\ \varphi_2(\tau) &= \varphi_{2,0}(\tau) + \beta\varphi_{2,1}(\tau) + \beta^2\varphi_{2,2}(\tau) + o(\beta^2) \end{aligned} \quad (10)$$

y en donde se permite que el término  $\alpha$  varíe en función del pequeño parámetro  $\beta$ , es decir

$$\alpha = \alpha_0 + \beta\alpha_1 + \beta^2\alpha_2 + o(\beta^2) \quad (11)$$

Substituyendo (10) y (11) en (6), expandiendo la expresión y agrupando los términos en función del parámetro  $\beta^i$  para  $i = 0, 1, 2$ , obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_{1,0} \\ \ddot{\varphi}_{2,0} \end{bmatrix} + \alpha_0 A \begin{bmatrix} \varphi_{1,0} \\ \varphi_{2,0} \end{bmatrix} = 0 \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_{1,1} \\ \ddot{\varphi}_{2,1} \end{bmatrix} + \alpha_0 A \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} \\ \varphi_{2,1} \end{bmatrix} = F_1(\varphi_{1,0}, \varphi_{2,0}, \alpha_1, \tau) \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_{1,2} \\ \ddot{\varphi}_{2,2} \end{bmatrix} + \alpha_0 A \begin{bmatrix} \varphi_{1,2} \\ \varphi_{2,2} \end{bmatrix} = F_2(\varphi_{1,0}, \varphi_{2,0}, \varphi_{1,1}, \varphi_{2,1}, \alpha_1, \alpha_2, \tau) \quad (14)$$

En donde las funciones  $F_i \in \mathbb{R}^2$  son "fuerzas externas" que dependen de la solución de las dinámicas precedentes, obteniendo así un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales que debe ser resuelto de forma secuencial. Introduciremos la notación  $\alpha^i$ ,  $i = 0, 1$  para referirnos a las distintas soluciones de la ecuación (11) dado los puntos de partida (7).

*Parametrización sobre  $\alpha_0^0 = 0$*  Al seleccionar  $\alpha_0^0 = 0$ , se simplifica de sobremanera el sistema de ecuaciones (12), (13) y (14). La integración es trivial y las soluciones son

$$\begin{aligned} \varphi_{1,0} &= c_1 \\ \varphi_{2,0} &= c_2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{1,1} &= \Omega_1(t) + c_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha_1^0\tau^2 \\ \frac{1}{2}\alpha_1^0\tau^2 \end{pmatrix} \\ \varphi_{1,2} &= \Omega_2(t) + c_4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha_1^0\tau^2 \\ \frac{1}{2}\alpha_1^0\tau^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2} &= \Omega_3(t) + c_5 [(k+1)\{(k+r+kr)c_1 - (kr+k)c_2\} + 2r(c_1 + kc_1 - kc_2)\alpha_2^0]\tau^2 \\ \varphi_{2,2} &= \Omega_4(t) + c_6 [(k+1)(1+r)c_1 - (1+k(1+r))c_2 + 2r(c_1 - c_2)\alpha_2^0]\tau^2 \end{aligned} \quad (17)$$

Las funciones  $\Omega_i$  son funciones periódicas que no generan ningún interés mientras que  $c_i$  representan constantes que dependen de las condiciones iniciales del sistema; eliminando los términos seculares, es decir aquellos que hace que la solución crezca a infinito, se vuelve evidente de (16) que  $\alpha_1^0 = 0$ . De (17),  $\alpha_2^0$  debe satisfacer

$$\begin{aligned} (k+r+kr)c_1 - (kr+k)c_2 + \frac{2r(c_1 + kc_1 - kc_2)}{(k+1)}\alpha_2^0 &= 0 \\ (k+1)(1+r)c_1 - (1+k(1+r))c_2 + 2r(c_1 - c_2)\alpha_2^0 &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Dado que existe un relación de proporcionalidad entre las magnitudes de la respuestas,  $\varphi_1(\tau) = \chi_1\varphi_2(\tau)$  [Migulin (1975)], entonces (18) se transforma en un sistema de dos ecuaciones - dos incógnitas, cuya solución es

$$\chi_1 = -\frac{1}{2k}((k+1)(1-r) - f(k,r)) \quad (19)$$

$$\alpha_2^0 = -\frac{1}{4r}\{(k+1)(1+r) - f(k,r)\}$$

donde

$$f(k,r) = \sqrt{(k+1)[k(r+1)^2 + (r-1)^2]}$$

Entonces (11) se escribe simplemente

$$\alpha^0 = \alpha_2^0\beta^2 \quad (20)$$

*Parametrización sobre  $\alpha_0^1 = \frac{1}{4\omega_1^2}$*  La solución periódica de (12) esta dada por la forma

$$\begin{bmatrix} \varphi_{1,0} \\ \varphi_{2,0} \end{bmatrix} = c_1 \cos\left(\sqrt{\alpha_0^1\omega_1^2}\tau\right) \begin{bmatrix} 1 \\ \chi_2 \end{bmatrix}$$

quedando reducida, dado el valor de  $\alpha_0^1$ , a

$$\begin{bmatrix} \varphi_{1,0} \\ \varphi_{2,0} \end{bmatrix} = c_1 \cos\left(\frac{1}{2}\tau\right) \begin{bmatrix} 1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

donde

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2r} \left\{ (k+1)(1+r) + \sqrt{(k+1)[k(r+1)^2 + (r-1)^2]} \right\}$$

es valor característico de la matriz  $A$  y

$$\chi_2 = -\frac{1}{2kr} \{(k+1)(1-r) + f(k,r)\}$$

es encontrado con ayuda del vector característico correspondiente. Substituyendo en (13), obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_{1,1} \\ \ddot{\varphi}_{2,1} \end{bmatrix} + \alpha_0^1 A \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} \\ \varphi_{2,1} \end{bmatrix} &= G_1 \left( \cos \frac{3}{2}\tau \right) + \\ &+ (1 + 2\alpha_1^1) G_2 \left( \cos \frac{1}{2}\tau \right) \end{aligned} \quad (22)$$

donde  $G_i(\cdot) \in \mathbb{R}^2$ , para eliminar los término seculares, se necesita

$$\alpha_1^1 = -\frac{1}{2} \quad (23)$$

Sustituyendo (21) y la solución de (22) en (14), obtenemos

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_{1,2} \\ \ddot{\varphi}_{2,2} \end{bmatrix} + \alpha_0^1 A \begin{bmatrix} \varphi_{1,2} \\ \varphi_{2,2} \end{bmatrix} = G_3 \left( \cos \frac{3}{2}\tau, \cos \frac{5}{2}\tau \right) + \left[ \begin{array}{c} 2\alpha_2^1 c_1 + b \\ (1 - \chi_2)(2\alpha_2^1 c_1 + b) \end{array} \right] \cos \frac{1}{2}\tau$$

en donde

$$b = \frac{(k+1)(8\alpha_0 - 18r) + 18kr\chi_2}{(k+1)(36(r+1)\alpha_0^1 - 16(\alpha_0^1)^2) - 81r} c_1$$

Para eliminar los términos seculares es necesario tener

$$2\alpha_2^1 c_1 + b = 0$$

lo que resulta en

$$\alpha_2^1 = \frac{-(k+1)(4\alpha_0 - 9r) + 9kr\chi_2}{(k+1)(36(r+1)\alpha_0 - 16\alpha_0^2) - 81r}$$

Y finalmente hemos encontrado la parametrización de la curva (11)

$$\alpha^1 = \alpha_0^1 - \frac{1}{2}\beta + \alpha_2^1 \beta^2 \quad (24)$$

Hasta este punto, (20) y (24), representan las fronteras, izquierda y derecha respectivamente, de la zona de estabilidad para un péndulo de dos eslabones, para demostrar que la zona de estabilidad del péndulo doble se encuentra contenida dentro de la zona de estabilidad del péndulo simple, basta con demostrar que  $\forall k, r > 0$ , la curva dada por (20) se encuentra a la derecha de la curva (8) asociada al péndulo simple; y la curva (24) se encuentra a la izquierda de la curva (9) asociada también al péndulo simple.

Consideremos primero el sistema (20), la cual delimita la zona de estabilidad por la izquierda, se tiene

$$\lim_{k \rightarrow 0} \alpha_2^0 \geq -\frac{1}{2}, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \alpha_2^0 = -\frac{1}{2}$$

lo que en un sentido físico, implicaría que el tener masa cero o longitud cero en el segundo eslabón nos conducirá a las condiciones del péndulo simple, mas aún

$$\frac{\partial}{\partial k} \alpha_2^0(k, r) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \alpha_2^0(k, r) > 0$$

y las funciones son estrictamente crecientes, entonces  $\alpha_2^0(k, r) > -\frac{1}{2}$  y toda curva (20) generada con  $k > 0$  y  $r > 0$  se desplaza a la derecha de la curva (8). El análisis de (24) se hace de forma similar, se tiene

$$\lim_{k \rightarrow 0} \alpha_2^1 = -\frac{1}{8}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \alpha_2^1 \leq -\frac{1}{8}$$

con

$$\frac{\partial}{\partial k} \alpha_2^1(k, r) < 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \alpha_2^1(k, r) > 0$$

entonces  $\alpha_2^1(k, r) \leq -\frac{1}{8} \quad \forall k, r \geq 0$ , además de

$$\lim_{k \rightarrow 0} \alpha_0^1 \leq \frac{1}{4}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \alpha_0^1 \leq \frac{1}{4}$$

con

$$\frac{\partial}{\partial k} \alpha_0^1(k, r) < 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \alpha_0^1(k, r) > 0$$

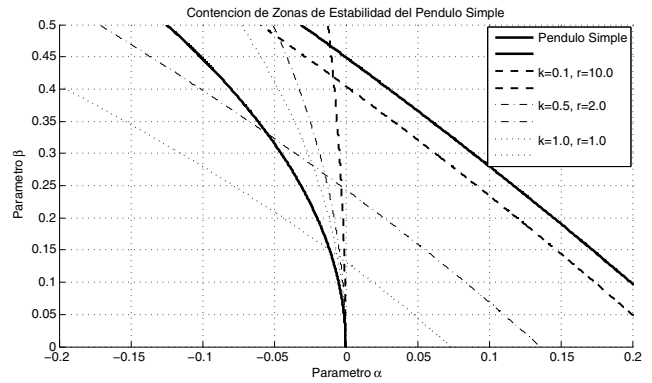


Figura 2. Contención de las Zonas de Estabilidad para el Péndulo doble

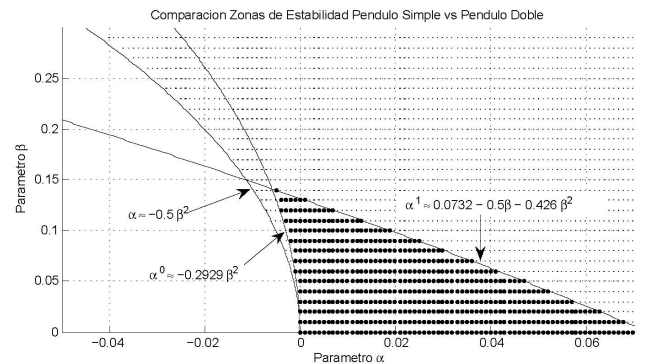


Figura 3. Comparación entre solución analítica y numérica para el péndulo de dos eslabones.

entonces  $\alpha_0^1(k, r) \leq -\frac{1}{4} \quad \forall k, r \geq 0$ . Es inmediato verificar que  $\alpha^1 < \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}\beta^2 \quad \forall k, r > 0$  y toda curva (24) se desplaza a la izquierda de la curva (9).

En la Figura 2 se muestran algunas curvas en función de los parámetros  $k$  y  $r$ .

Para el caso particular de un péndulo doble donde  $r = 1$  y  $k = 1$ , es decir, masas y longitudes iguales, se obtuvieron las siguientes curvas, por la izquierda

$$\alpha^0 \approx -0,29289\beta^2$$

y por la derecha

$$\alpha^1 \approx 0,07322 - 0,5\beta - 0,4267\beta^2$$

que se muestran con la línea punteada.

### 3.3 Solución Numérica

Mediante el teorema de Floquet-Lyapunov, se encontraron las zonas de estabilidad para los péndulos de 1 hasta 4 eslabones, verificando de esta forma los resultados obtenidos de manera analítica. En la Figura 3, se comparan las soluciones analíticas (definida por curvas) y numéricas (definida por puntos oscuros) para el péndulo de dos eslabones, además de mostrarse con puntos finos la región de estabilidad del péndulo simple.

Para la solución de péndulos de más eslabones, sólo se efectuó la validación numérica para el caso de eslabones de masas y longitudes similares. En la Figura 4, se muestran la zona de estabilidad de los péndulos de 2, 3 y 4

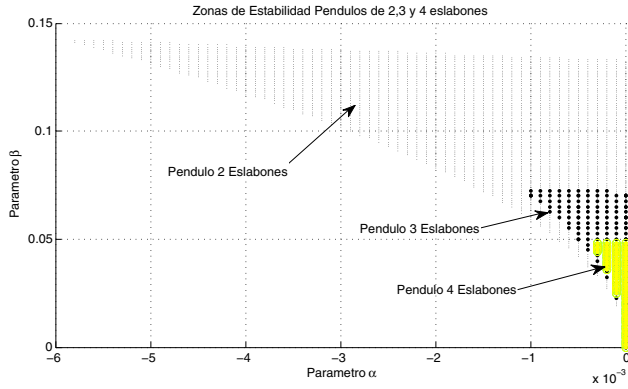


Figura 4. Zonas de estabilidad para péndulo de 2, 3 y 4 eslabones.

Cuadro 1. Coordenadas de Prueba

Coordenada		Estabilidad
$(\alpha, \beta)$	$(\omega [rad/seg], a [cm])$	
$(-0,004, 0,139)$	$(99,05, 3,475)$	Estable
$(-0,004, 0,148)$	$(99,05, 3,70)$	Inestable
$(-0,0027, 0,1)$	$(120,60, 2,5)$	Estable
$(-0,003, 0,1)$	$(114,40, 2,5)$	Inestable

eslabones, la solución numérica demuestra que la zona de estabilidad del péndulo de  $n$  eslabones esta contenida en la zona de estabilidad del péndulo de  $n - 1$  eslabones, sin embargo las condiciones sobre la amplitud y frecuencia de la excitación paramétrica que coincide con estos valores de  $\alpha$  y  $\beta$  se vuelven demasiado restrictivos para llevarse a cabo físicamente, aunque es posible aumentar estas zonas ajustando las relaciones entre las longitudes y las masas del prototipo físico.

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

##### 4.1 Resultados de Simulación

Los parámetros para la excitación paramétrica obtenidos en la sección anterior fueron probados sobre el modelo matemático completo mediante una simulación en Matlab, en la cuál se tomaron cuatro puntos cercanos, dos fuera y dos dentro de la zona de estabilidad, los puntos escogidos de forma arbitraria y sus correspondientes valores en amplitud y frecuencia (al seleccionar  $l = 0,25 [m]$ ) se muestran en el Cuadro 1. Cuyos comportamientos se aprecian en las Figuras 5, 6, 7 y 8.

##### 4.2 Resultados en Prototipo Real

Se desarrollo un prototipo físico del péndulo doble, en el cual es posible manipular los dos parámetros de la excitación paramétrica,  $a$  y  $\omega$ ; la amplitud varia ajustando un sistema biela-manivela, mientras que la frecuencia  $\omega$  se ajusta con la velocidad del motor.

La frecuencia máxima del prototipo de  $\omega = 100 [rad/seg]$  corresponde a  $\alpha \approx -0,004$ , que a su vez significa que con valores para  $\beta \in (0,13, 0,14)$  ( $a \in (3,25, 3,5) [cm]$ ), estabilizaremos el péndulo invertido, los resultados para  $\beta = 0,14$  ( $a = 3,5cm$ , Zona estable) y  $\beta = 0,16$  ( $a = 4,0cm$ , Zona Inestable) se pueden ver en el video 'Estabilización de péndulo doble mediante excitación paramétrica', disponible en el enlace <http://youtu.be/4iv5il7XwLg>.

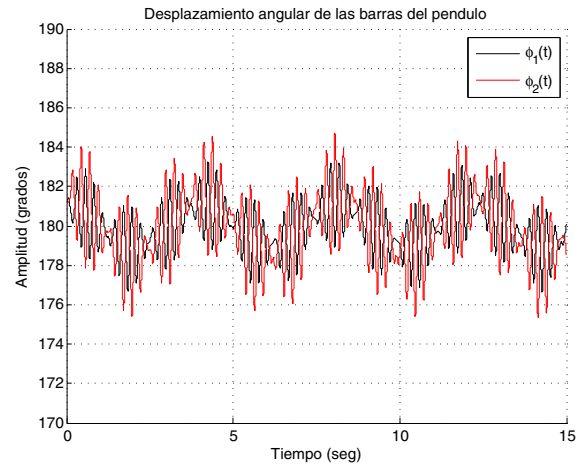


Figura 5. Comportamiento estable:  $\alpha = -0,004, \beta = 0,139$

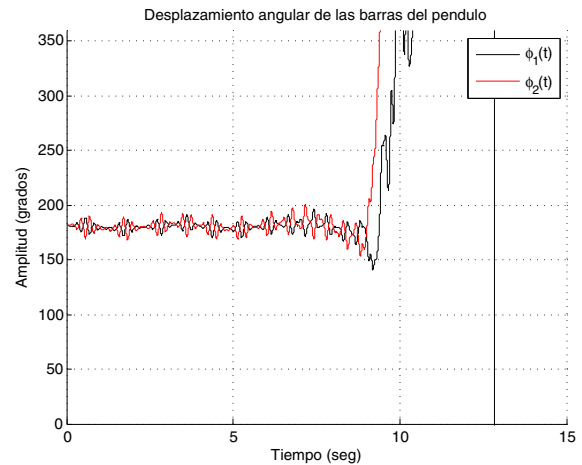


Figura 6. Comportamiento inestable:  $\alpha = -0,004, \beta = 0,148$

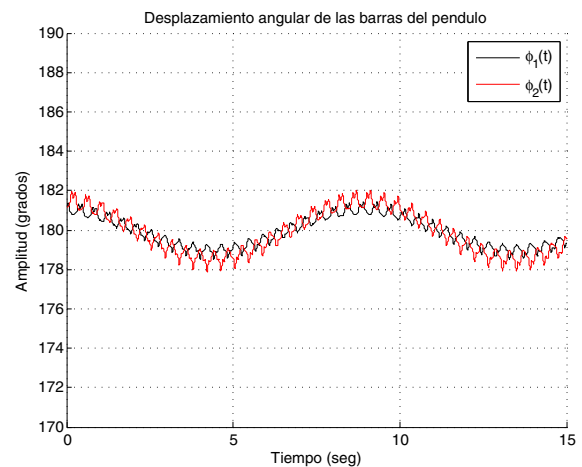


Figura 7. Comportamiento estable:  $\alpha = -0,0027, \beta = 0,1$

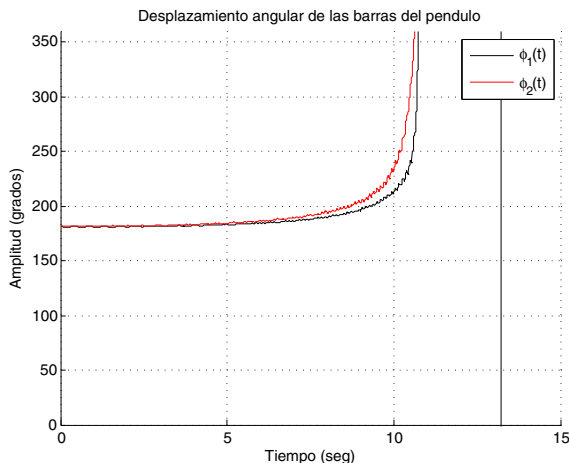


Figura 8. Comportamiento inestable:  $\alpha = -0,003$ ,  $\beta = 0,1$

### 5. CONCLUSIÓN

En el presente trabajo se encontró de manera analítica la región de estabilidad de un péndulo doble con excitación paramétrica en la base, se encontró que su zona de estabilidad esta contenida en la zona de estabilidad del péndulo simple, entonces habiendo controlado un péndulo simple, con la selección correcta de los parámetros físicos es posible controlar un péndulo doble o de más eslabones sin modificar la forma de la excitación paramétrica. Se compararon los resultados numéricos y analíticos para el péndulo de dos eslabones, siendo estos suficientemente cercanos, además se presentó de forma numérica que existe una contracción de la región de estabilidad del péndulo de n-eslabones.

En un plataforma sencilla en la cual solo se conocían la longitud de los eslabones y el peso aproximado de estos, se lograron resultados prácticos coherentes con el planteamiento y solución del problema.

### REFERENCIAS

A. Stephenson. On a New type of Dynamical Stability. *Manchester Memoirs*, Vol. lii, No. 8, 1908.  
 Jordan Smith. Nonlinear Ordinary Differential Equations. *Oxford University Press*, USA 2007, 4th Edition.  
 J Carlos Sartorelli, Bruno Serminaro, Walter Lacarbonara. Parametric Double Pendulum. *ENOC-2008 Saint Petersburg*, Russia 2008  
 A.A. Seyranian. The stability of an inverted pendulum with a vibrating suspension point. *Journal of applied Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 70, Issue 5, 2006, 754-761  
 V. Migulin, V. Medvedev, E. Mustel and V. Parygin. Basic Theory of Oscillations. *Mir Publishers Moscow*, USSR 1983, Ch 6.  
 V. Yakubovich and V. Starzhinskii. Linear differential equations with periodic coefficients. *John Wiley*, Jerusalem 1975  
 P. Weibel and Baillieul. Open-loop oscillatory stabilization of an n-pendulum. *Int. J. Control*, Vol. 71, No. 5, 931-957.

J. Hansen, Lyngby. Stability diagrams for coupled Mathieu-equations. *Springer-Verlag*, 1985.  
 C. Hayashi. Forced oscillations in Non-linear Systems. *Nippon Printing and Publishing, LTD Japón* 1953.  
 W. Magnus and S. Winkler. Hill's Equation. *Dover Phoenix Editions*, USA 2004.  
 R. Brockett. Finite Dimensional Linear Systems. *John Wiley and Sons*, 1970.  
 S. Otterbein. Stabilizing the n-pendulum and the Indian rope trick. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 12.VII.1982, Volume 78, Issue 4, pp 381-393. [In German]  
 Eugene I. Butikov. On the dynamic stabilization of an inverted pendulum. *American Journal of Physics*, 69(6), June 2001  
 Iliya I. Blekhman. Vibrational mechanics : nonlinear dynamic effects, general approach, applications. *Singapore : World Scientific*, 2000.

### Apéndice A. UNA BREVE EXPOSICIÓN SOBRE LA TEORÍA DE FLOQUET

Sea  $x \in R^n$  y  $A(t) \in R^{n \times n}$  una función  $T$  periódica, i.e.  $A(t) = A(t + T)$ , con la dinámica de  $x(t)$  definida por

$$\dot{x} = A(t)x, A(t) = A(t + T) \quad (A.1)$$

Sea  $\Phi(t, t_0)$  la matriz de transición de estados del tiempo  $t_0$  al tiempo final  $t$ , entonces  $M = \Phi(T, 0)$  es llamada la matriz de monodromía. De las propiedades de la matriz de transición de estados

$$M = X(T)X^{-1}(0)$$

donde  $X(\cdot)$  es una matriz fundamental del sistema. Una versión del Teorema de Floquet establece: **Teorema A1:** La matriz de transición de estados  $\Phi(t, 0)$  de (A.1) puede factorizarse como

$$\Phi(t, 0) = P(t)e^{Rt}$$

con  $P(t) = P(t + T)$  matriz periódica. *Observación:* En esta versión, debido a que  $\Phi(0, 0) = I$

$$P(0) = I \Rightarrow M = e^{RT}$$

El teorema de Floquet-Lyapunov establece: **Teorema A2:** Todas las soluciones de (A.1) son

i) Asintóticamente estables si

$$\sigma(M) \subset \overset{\circ}{D}_1 := \{z \in C : |z| < 1\}$$

ii) Estable si

$$\sigma(M) \subset \bar{D}_1 := \{z \in C : |z| \leq 1\}$$

y

$$\lambda \in \sigma(M), |\lambda| = 1$$

$\lambda$  es raíz simple del polinomio mínimo de  $M$ .

iii) Inestable si

$$\exists \lambda_j \in \sigma(M) : |\lambda_j| > 1$$

ó

$$\sigma(M) \subset \bar{D}_1, \exists \lambda_j \in \sigma(M) : |\lambda_j| = 1$$

y  $\lambda_j$  es raíz múltiple del polinomio mínimo de  $M$ . Para mayores detalles consultar [Brockett (1970)].