

Identificación de rigidez en los entrepisos de un edificios mediante tiempos de viaje de onda ^{*}

Jesús Morales-Valdez * Luis Alvarez-Icaza *

* *Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México
04510 Coyoacan DF, México, (e-mail: jmoralesv@iingen.unam.mx,
alvar@pumas.iingen.unam.mx)*

Resumen: Se presenta una técnica novedosa de detección de daño mediante la identificación de cambios de rigidez en los entrepisos de una estructura. A diferencia de trabajos donde se utilizan técnicas globales basadas en la frecuencia fundamental y las formas modales, esta técnica tiene la ventaja de ser local, pues se basa en propagar un pulso de Ricker a través de la estructura, generando tiempos de arribo en cada uno de los pisos, los cuales son usados para replantear la ecuación de rigidez en función de los retardos obtenidos. Aunado a esto, el número de parámetros a identificar es muy pequeño en comparación con los algoritmos recursivos. Además, esta técnica proporciona una metodología fácil y rápida para evaluar la integridad y el funcionamiento de los edificios luego de estar sometidos a sismo de gran intensidad. Los tiempos de viaje de onda son calculados aplicando el método de Haskell, pues este permite generalizar el problema de propagación de ondas a edificios de múltiples pisos, sin requerir cambios en la formulación de las ecuaciones originales. Los resultados de simulación muestran que el método propuesto es consistente con los resultados esperados.

Palabras clave: Identificación de parámetros, detección de daño, monitoreo de salud estructural, Haskell, control de vibraciones.

1. INTRODUCCIÓN

Independientemente de su naturaleza, cualquier edificio está expuesto a sufrir algún tipo de daño que pone en riesgo su integridad, ya sea por el deterioro de los materiales y elementos que lo constituyen, o bien a causa de los movimientos producidos por fenómenos naturales, tales como sismos intensos, terremotos, huracanes, vientos fuertes, entre otros. (ver en la Fig. 1).

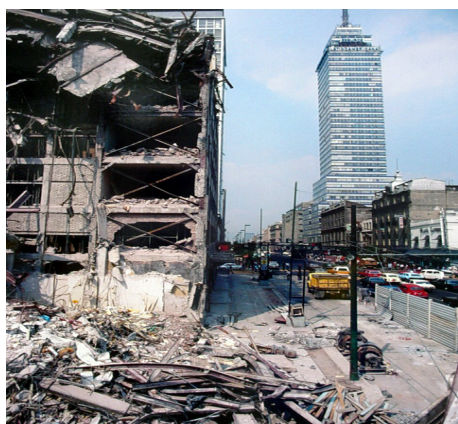


Figura 1. Edificios dañados de la ciudad de México debido al sismo de 1985

La evaluación de daños después de un terremoto requiere de una evaluación detallada, que sin embargo, puede tardar mucho tiempo en completarse poniendo en riesgo vidas humanas y causando considerables pérdidas financieras. Esta situación genera la necesidad de contar con métodos rápidos y fiables para determinar la seguridad de las estructuras. El interés en estas técnicas ha aumentado dentro de las comunidades de ingenieros civiles, mecánicos, geofísicos y sismólogos, entre otros. En cuanto a los trabajos realizados, se encuentran los de Yang et al. (2014), que muestra una nueva técnica de detección de daño en conjunto con un modelo de elementos finitos de orden reducido con entrada desconocida. El daño se identifica con cambios en la rigidez del sistema. Koh et al. (1993) describe un método para identificar un historial de daño bajo la influencia de ruido en la entrada y la salida del sistema. Hacen uso del método de condensación estática con la finalidad de reducir los grados de libertad del modelo matemático del edificio. El error del modelado es minimizado usando un modelo de recuperación cuyos parámetros son identificados usando el filtro de Kalman.

De manera similar, en Yang et al. (2007) se presenta un método de estimación por mínimos cuadrados recursivos con entradas desconocidas que tiene como objetivo identificar la rigidez, amortiguamiento y otros parámetros no lineales, así como la variación debido al daño y su entrada desconocida. Por otra parte, Hou et al. (2000) describe un enfoque basado en wavelets para la detección de daño y monitoreo estructural, que examina las características de la representación de señales de vibración bajo la trans-

* Investigación realizada con apoyo de los proyectos CONACYT 103640 y UNAM-PAPIIT IN109414.

formación wavelet. Otro tipo de trabajos relacionados son Maia et al. (2003) en el cual la detección de daño se basa en identificar las formas modales, mientras que en Hwang and Kim (2004) en identificar la respuesta en frecuencia.

A diferencia de los trabajos antes mencionados, en Safak and Hudnut (2006) se muestra que el daño en una estructura puede ser detectado de manera precisa si se investigan no únicamente los cambios en las frecuencias naturales, sino también los cambios en las características de propagación de las ondas sísmicas en la estructura y algunos cambios permanentes en la configuración de la misma. Bajo esta idea, un nuevo método de supervisión de salud estructural para edificios se desarrolla en Todorovska and Mohammad (2012), Todorovska and Rahmani (2009), Todorovska and Trifunac (2008) y Todorovska and Trifunac (2007) para sistemas de alerta temprana de terremotos. El método utiliza los datos de sensores de vibración y se basa en detectar cambios en el tiempo de llegada de ondas que se propagan a través de la estructura. Este es un método de escala intermedia, que puede señalar la parte de la estructura que ha sido dañada utilizando datos de un número relativamente pequeño de sensores. De igual manera, en Zhang et al. (2011) se estudia la propagación de ondas en una dimensión en edificios de múltiples pisos con excitación sísmica.

Actualmente en el área de control automático no se cuenta con un procedimiento explícito para localizar, cuantificar y evaluar el daño en un edificio que incluya el análisis modal y contemple los tiempos de viaje de onda. Por otra parte, se sabe que el daño estructural se manifiesta como una modificación en los parámetros del modelo del sistema, en particular de la rigidez, provocando una reducción de la velocidad de cortante e incrementando los tiempos de viaje de onda. En este sentido, el trabajo aquí descrito presenta una novedosa técnica alternativa de identificación para obtener las rigideces de cada uno de los pisos, pues a partir de éstas se puede deducir de manera fácil la presencia y localización de daño, comparando el estado actual con el inicial de las columnas del edificio. Para ello, el algoritmo desarrollado se basa en propagar un pulso de Ricker a través de la estructura, generando tiempos de arribo en cada uno de los pisos, los cuales son usados para replantear la ecuación de rigidez en función de los retardos obtenidos.

2. MODELO MATEMÁTICO

Para un sistema de n grados de libertad (GDL), como el caso de un edificio de múltiples pisos, éste se puede modelar como un sistema de n masas interconectadas por resortes de rigidez k , el cual es excitado por una fuerza F , tal que sobre la masa m_n actúan las fuerzas F_{kn} , F_{kn+1} y F_m . Las dos primeras corresponden a la reacción de los resortes k_n y k_{n+1} respectivamente, mientras que la tercera describe la fuerza inercial de la masa m_n , como se ilustra en la Fig. 2. En ésta, u_1, u_2, \dots, u_n corresponden a las posiciones de cada una de las masas respectivamente, mientras que Δy corresponde a la distancia entre dos pares de ellas en estado de equilibrio. Aplicando la segunda ley de Newton sobre la masa m_n , la fuerza resultante del sistema ante la excitación de la fuerza externa se puede calcular de la siguiente forma

$$\sum F_n = -F_{kn} - F_m + F_{kn+1} \quad (1)$$

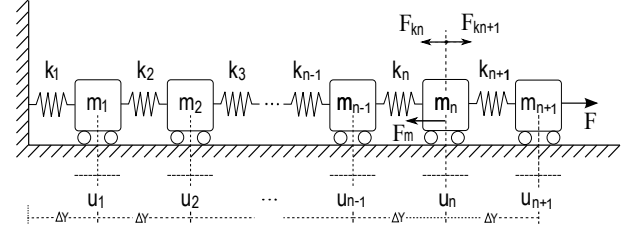


Figura 2. Sistema de masas y resortes

despejando la fuerza inercial F_m debida a la reacción de la masa y sustituyendo su valor por el producto de la masa por la aceleración, se tiene

$$-F_{kn} + F_{kn+1} = m_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \quad (2)$$

donde las fuerzas que actúan sobre la masa m_n , dependen del desplazamiento producido en los resortes

$$F_{kn+1} = k(u_{n+1} - u_n) \quad (3)$$

$$F_{kn} = -k(u_n - u_{n-1}) \quad (4)$$

por lo tanto, sustituyendo las expresiones (3) y (4) en la Ec. (2) se obtiene

$$k(u_{n+1} - u_n) - k(u_n - u_{n-1}) = m_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \quad (5)$$

reduciendo términos semejantes y factorizando el primero de ellos, se llega a la siguiente expresión

$$k(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) = m_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \quad (6)$$

se observa que el término entre paréntesis es similar a la aproximación de la segunda derivada del desplazamiento u por diferencias finitas centradas con respecto a la coordenada y , la cual tiene la siguiente forma, LeVeque (2007):

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta y)^2} \quad (7)$$

Ahora, multiplicando la Ec. (7) por $(\Delta y)^2$ y sustituyéndola en la Ec. (6), se obtiene

$$k(\Delta y)^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = m_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \quad (8)$$

despejando $k(\Delta y)^2$ de la Ec. (8) y calculando el límite cuando Δy tiende a cero, se tiene que

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \quad (9)$$

La Ec. (9), es conocida como la ecuación de onda unidimensional (1D), la cual describe la propagación de ondas a través de un medio¹, comúnmente utilizada en geofísica para el estudio de la respuesta del suelo. En ésta se observa que la segunda derivada con respecto al tiempo y con respecto al desplazamiento son proporcionales entre si y que β representa la velocidad de propagación de las ondas de cortante. La importancia de la Ec. (9) radica en que al replantearla es posible determinar el tiempo de propagación de las ondas a través de la expresión $\tau = h/\beta$ y con ello determinar la presencia de daño a partir de la pérdida de rigidez en cada una de las partes afectadas. De manera que este análisis se puede generalizar en todos

¹ A partir de esta sección, cuando se hable de propagación en un medio, se refiere a la propagación a lo largo del estrato

los pisos de la estructura, lo que permite desarrollar una nueva técnica alternativa de identificación para deducir la presencia y ubicación de daño estructural en edificios, al grado de poder evaluar el estado actual estos.

3. METODOLOGÍA

La idea principal de este trabajo consiste en detectar cambios de rigidez en la estructura a partir de los retardos generados al propagar el pulso de Ricker a través de todos los pisos. Para ello, cada piso del edificio es modelado como un estrato, limitado por dos condiciones de frontera las cuales llamaremos interfaces, con propiedades de densidad (ρ), coeficiente de Poisson (ν), módulo de cortante (μ) y velocidad de cortante (β), tal como se muestra en la Fig. 3 Antes que nada se debe considerar que el edificio

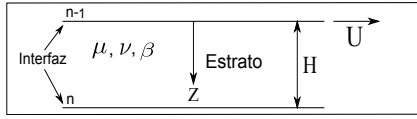


Figura 3. Estrato equivalente a un piso del edificio

parte del reposo, es decir, $u(z, 0) = 0$ y $\dot{u}(z, 0) = 0$ para todo $0 \leq z \leq H$. Resolviendo la ecuación que gobierna la propagación de onda en el medio Ec. (9), a través de la transformada directa de Fourier, se obtiene la ecuación escalar unidimensional de Helmholtz (Pujol, 2003):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z, \omega) + k^2 u(z, \omega) = 0 \quad (10)$$

donde $k = \frac{\omega}{\beta}$ y ω corresponde a la frecuencia circular de la señal de excitación.

Tomando en cuenta lo anterior, la solución general de la Ec. (10) está definida por (Kausel, 2006):

$$u(z, \omega) = \dot{S}(\omega) \exp(ikz) + \dot{S}(\omega) \exp(-ikz) \quad (11)$$

donde \dot{S} y \dot{S} son variables arbitrarias que describen la onda ascendente y descendente respectivamente.

Para el estrato presentado en la Fig. 3, el desplazamiento en la interfaz superior (interfaz $n-1$) es:

$$u(0, \omega) = u_{n-1}(\omega) = \dot{S}(\omega) + \dot{S}(\omega) \quad (12)$$

y el desplazamiento en la interfaz inferior (interfaz n) es:

$$u(H, \omega) = u_n(\omega) = \dot{S}(\omega) \exp(ikH) + \dot{S}(\omega) \exp(-ikH) \quad (13)$$

Por lo tanto, la solución del sistema formado por las Ecs.(12) y (13) es:

$$\dot{S}(\omega) = i \frac{u_{n-1}(\omega) \exp(-ikH) - u_n(\omega)}{2 \operatorname{sen}(kH)} \quad (14)$$

$$\dot{S}(\omega) = i \frac{u_n(\omega) - u_{n-1}(\omega) \exp(ikH)}{2 \operatorname{sen}(kH)} \quad (15)$$

de manera que el campo de desplazamiento dentro del estrato está dado por:

$$u(z, \omega) = i \frac{u_{n-1}(\omega) \exp(-ikH) - u_n(\omega)}{2 \operatorname{sen}(kH)} * \exp(ikz) - i \frac{u_{n-1}(\omega) \exp(ikH) - u_n(\omega)}{2 \operatorname{sen}(kH)} \exp(-ikz) \quad (16)$$

donde: $0 \leq z \leq H$

Sin embargo, la Ec. (16) también puede escribirse de la siguiente forma:

$$u(z, \omega) = -\frac{\operatorname{sen}[k(z-H)]}{\operatorname{sen}(kH)} u_{n-1}(\omega) + \frac{\operatorname{sen}(kz)}{\operatorname{sen}(kH)} u_n(\omega) \quad (17)$$

A partir de la Ec. (17) se obtienen los esfuerzos en cualquier profundidad dentro del estrato, a partir de los desplazamientos dentro del mismo calculados en función del desplazamiento de sus nodos (interfaces), pues dicha ecuación tiene la forma usual de la interpolación empleada en el método de elementos finitos

$$\begin{aligned} \tau(z, \omega) &= \mu \frac{\partial u}{\partial z}(z, \omega) \\ &= \mu k \left\{ -\frac{\cos[k(z-H)]}{\operatorname{sen}(kH)} u_{n-1}(\omega) + \frac{\cos(kz)}{\operatorname{sen}(kH)} u_n(\omega) \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

Por lo tanto, los esfuerzos en las interfaces del estrato se obtienen evaluando la Ec. (18) en las fronteras $u(z, 0)$ y $u(z, H)$, como se presenta a continuación

$$\begin{aligned} \tau(0, \omega) = \tau_{n-1}(\omega) &= \mu k \left[-\frac{\cos(kH)}{\operatorname{sen}(kH)} u_{n-1}(\omega) + \frac{1}{\operatorname{sen}(kH)} u_n(\omega) \right] \\ \tau(H, \omega) = \tau_n(\omega) &= \mu k \left[-\frac{1}{\operatorname{sen}(kH)} u_{n-1}(\omega) + \frac{\cos(kH)}{\operatorname{sen}(kH)} u_n(\omega) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Reacomodando las Ecs. (17) y (19), estas se pueden reescribir como (Haskell, 1956):

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} u_n(\omega) \\ \tau_n(\omega) \end{Bmatrix}}_{f(z)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\omega H}{\beta}\right) & \frac{\beta}{\mu \omega} \sin\left(\frac{\omega H}{\beta}\right) \\ -\frac{\mu \omega}{\beta} \sin\left(\frac{\omega H}{\beta}\right) & \cos\left(\frac{\omega H}{\beta}\right) \end{bmatrix}}_{P(z, z_0)} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{n-1}(\omega) \\ \tau_{n-1}(\omega) \end{Bmatrix}}_{f(z_0)} \quad (20)$$

La importancia de la Ec. (20) radica en que con ésta se puede conocer lo que ocurre en una interfaz del estrato (z_n) conociendo lo que sucede en la otra (z_{n-1}), usando el propagador $P(z, z_0)$.

3.1 Formulación para un edificio de múltiples pisos

Suponiendo que se cuenta con un edificio de n grados de libertad (GDL), con un GDL por piso respectivamente y asumiendo que cada piso es un estrato, entonces el edificio es modelado como un medio estratificado y en capas, soportado por una base rígida, libre de esfuerzos en el techo, excitado por una onda de cortante (SH) con incidencia vertical y movimiento de manera horizontal, con desplazamientos en el techo y en los pisos, definidos como u_1, u_2, \dots, u_{n+1} . Se considera que cada capa, numerada de arriba hacia abajo, representa un piso o grupo de pisos y que a la vez estos equivalen a estratos. Las capas son heterogéneas y anisotrópicas, con altura h_i , densidad de masa ρ_i , módulo de corte μ_i , y velocidad de onda de corte $\beta_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\rho_i}}$, $i = 1, \dots, n$, respectivamente (ver Fig.4).

De la Ec. (20), se sabe que $f(z)$ es continua en las interfaces de las capas y si ésta es conocida en algún punto, entonces, se puede proyectar a otro punto en cualquiera de las capas. De esta manera se puede comenzar desde

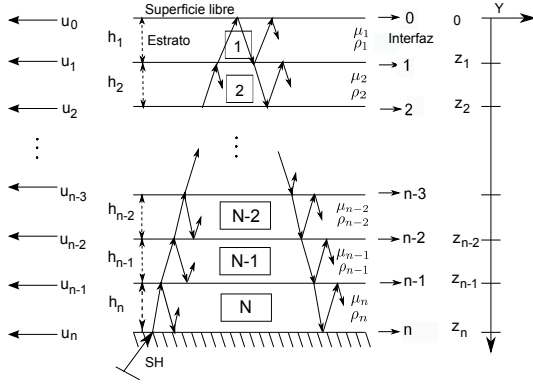


Figura 4. Medio estratificado

el techo con $f(0) = \{u(t), 0\}^T$ y $f(z)$ puede ser calculada recursivamente en las interfaces de las capas $z = z_1, z_2, \dots$, haciendo posible propagar la onda en el interior de cada capa si se conocen las dos fronteras de la misma. Entonces, para un medio estratificado lo anterior se puede expresar de la siguiente manera

$$f(z) = P(z, 0)f(0), \quad z_{i-1} \leq z \leq z_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (21)$$

$$P(z, 0) = P(z, z_{i-1})P(z_{i-1}, z_{i-2}) \cdots P(z_2, z_1)P(z_1, 0) \quad (22)$$

Además, considerando que el techo del edificio es libre de esfuerzo, $\tau = 0$, entonces el desplazamiento en él (u_0) puede relacionarse con el desplazamiento en la base (u_n), mediante

$$u_0(z, w) = \frac{1}{P_{11}(z, 0)} u_n(H, w) \quad (23)$$

donde $P_{11}(z, 0)$ es el elemento (1,1) del propagador. De manera que una vez conocidos el desplazamiento y esfuerzo en el techo del edificio, entonces la Ec. (20) puede ser aplicada para conocer los mismos en cada uno de los pisos.

3.2 Atenuación

Las vibraciones sin amortiguamiento difícilmente ocurren en la naturaleza, pues todas ellas se atenúan después de cierto tiempo disipando parte de la energía ligada al movimiento. En los edificios se introduce un término correctivo Q , denominado factor de calidad con el objetivo de modelar el comportamiento viscoelástico del medio y para considerar la reducción de los desplazamientos. Una Q alta implica una atenuación pequeña y si esta es constante, implica que la amplitud incrementa con la frecuencia. Este valor es incorporado en la solución (20), reemplazando el valor real de $\eta = 1/\beta$ por el valor complejo de la velocidad de propagación (Aki and Richards, 2002):

$$\eta^* = \eta + i \frac{1}{2Q} \eta = (1 + i \frac{1}{2Q}) \frac{1}{\beta} \quad (24)$$

donde Q está relacionada con el coeficiente de amortiguamiento ζ de la siguiente manera

$$\zeta = \frac{1}{2Q} \quad (25)$$

La Ec. (25) permite incluir amortiguamiento al propagador de la Ec. 20, con lo cual, el modelo de edificio a cortante queda completamente descrito.

4. CÁLCULO DE LA RIGIDEZ

Una manera fácil y rápida para evaluar la integridad y funcionamiento de los edificios, es a través de la frecuencia fundamental, pues basta con que ésta cambie para saber que existe algún tipo de daño, aunque no se sabe de la ubicación del mismo o cuan grande es. En ese sentido el trabajo aquí descrito proporciona un modelo analítico novedoso para identificar los cambios de rigidez que la estructura puede presentar luego de estar sometida a sismos de gran intensidad. Para ello se hace uso de la Ec. (26), la cual describe la velocidad de propagación de la onda de cortante

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (26)$$

donde el módulo de cortante μ es definido como

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (27)$$

que sustituyendolo en la Ec. (26), permite expresar el módulo de Young, como

$$E = 2\rho(1 + \nu)\beta^2 \quad (28)$$

y si los elementos estructurales son columnas, su rigidez puede ser calculada como

$$k = \Sigma 12EI/h^3 \quad (29)$$

y considerando que $\beta = h/\tau$, donde h es la altura de la columna y τ el tiempo de propagación de la onda, la ecuación de rigidez se puede reescribir de la siguiente manera

$$k = \sum \frac{24\rho(1 + \nu)I}{h\tau^2} \quad (30)$$

con I equivalente al segundo momento de inercia de la columna. Una vez que la rigidez es calculada con la Ec. (30), el daño puede ser detectado comparando el valor actual con registros históricos o con base en los calculados con las propiedades de los materiales. Este método permite localizar los pisos dañados de manera fácil y rápida en comparación con métodos basados en análisis modal o espacio de estados. El tiempo de viaje de onda es obtenido analizando el tiempo de arribo del pulso más prominente de la base hasta el techo del edificio, como será explicado en la sección de resultados de simulación.

5. PULSO DE RICKER

Cuando se calcula la respuesta dinámica de sistemas, por lo general se utilizan funciones analíticas como señal de excitación. En este trabajo se utiliza el pulso de Ricker para propagarse a través de todos los pisos/capas, debido a que permite un control directo sobre el periodo

de muestreo de los datos y se le puede diseñar para excitar el modelo con énfasis en una determinada banda de frecuencia. Éste a la vez, equivale a la segunda derivada de una función Gaussina y está definido de la siguiente forma (Sánchez-Sesma and Velázquez, 1987):

$$r(t) = \left(a^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-a^2} \quad (31)$$

donde $a = \frac{\pi(t-t_s)}{t_p}$, con t_s definiendo el centro del pulso, t_p puede considerarse como el periodo característico y $\sqrt{6}t_p/\pi$ como el periodo central. Por otra parte, en el dominio de la frecuencia el pulso de Ricker se define como

$$r(\omega) = -\frac{t_p}{\sqrt{\pi}} b^2 e^{-b^2} e^{-i\omega t_s} \quad (32)$$

donde $b = \omega/\omega_p$, $\omega_p = 2\pi f_p = 2\pi/t_p$, de lo anterior, f_p corresponde a la frecuencia de energía máxima conocida como *frecuencia característica*. La Fig. 5, muestra un ejemplo del pulso de Ricker.

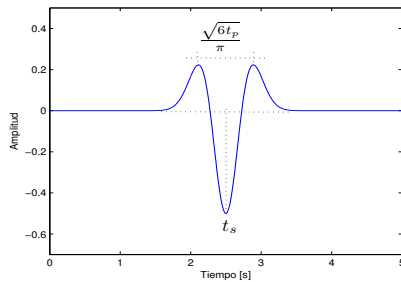


Figura 5. Pulso de Ricker

6. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Los resultados de simulación están basados en un edificio de 9 pisos de concreto reforzado tomado de la literatura, con veinte columnas en cada piso de sección transversal cuadrada cada una de ellas, como se muestra en la Fig. 6. La altura de los pisos y la sección transversal de las columnas son diferentes, por lo tanto la rigidez también varía a lo largo de los pisos. La densidad de masa, el módulo de Young y otros parámetros de las capas fueron obtenidos de las propiedades de los materiales (McCormac, 2005) y aplicando ecuaciones estructurales estándares (Chopra, 1995), (Hibbeler, 2006).

Al aplicar el pulso de Ricker como señal de excitación, tal que su período es menor al tiempo de propagación de la onda² y resolver las ecuaciones del algoritmo de propagación mediante el método de Haskell se obtuvieron los desplazamientos de cada uno de los pisos del edificio. La tabla 2 contiene un resumen de los tiempos de viaje de onda y rigideces nominales así como los estimados usando la metodología propuesta en este trabajo. Se puede apreciar que el método estima los valores de rigidez con buena precisión, dado un tiempo de muestreo de (0.001s)

² Note que más importante que la frecuencia de vibración es el período de la señal de excitación, el cual siempre deber ser menor al tiempo de propagación para obtener los pulsos de manera correcta

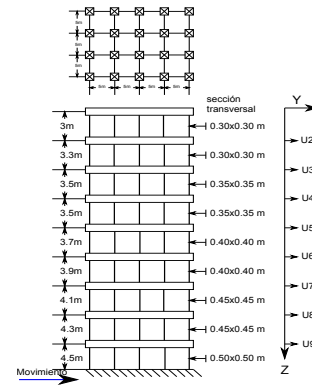


Figura 6. Edificio de 9 pisos

para la transformada inversa de Fourier. Aunado a esto, el error de estimación de los tiempos de viaje de onda es de $\pm 1.2\%$ y $\pm 2.3\%$ para la rigidez en el peor de los casos. La Fig. 7 muestra los sintéticos de los desplazamientos.

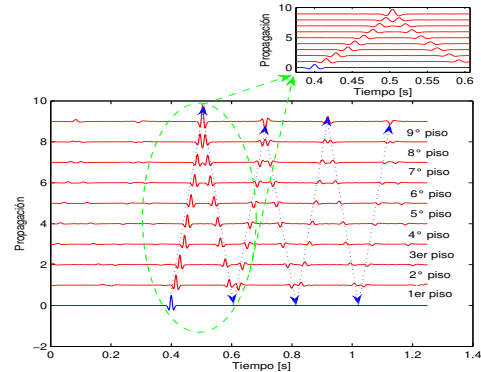


Figura 7. Respuesta del edificio de 9 pisos

7. CONCLUSIONES

Una metodología para estimar valores de rigidez en edificios de múltiples pisos basada en los tiempos de viaje de onda fue presentada. El método de Haskell es usado para propagar el pulso de Ricker a través de todos los pisos, considerando a cada uno de ellos como un estrato. De los tiempos de viaje de onda obtenidos, se logró estimar la rigidez de los entrepiso. De manera que comparando los valores de rigidez obtenidos con registros históricos o con datos nominales, permite detectar y localizar daños en el edificio, abriendo la posibilidad de una localización más precisa. Con respecto a la identificación, el método propuesto tiene la ventaja de ser sumamente rápido en comparación con otros métodos. Finalmente, resultados de simulación de un edificio de nueve pisos confirman la fiabilidad del método propuesto, que puede ser usado con otras técnicas de análisis modal.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a Sánchez Sesma F.J por las múltiples asesorías en el tema de propagación de ondas. El primero también agradece el apoyo de CONACYT y la Coordinación de Estudios de Posgrado de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Cuadro 1. Parámetros del edificio

Capa	Piso	h_i (m)	$\rho\left(\frac{t_f}{m^3}\right)$	$E\left(\frac{t_f}{m^2}\right)$	ν	$fc\left(\frac{t_f}{m^2}\right)$	β (m/s)
				1,0e + 005*			
1	9	3	2,1	6,2610	0,20	2000	352,4571
2	8	3,3	2,2	6,4156	0,21	2100	347,1361
3	7	3,5	2,3	6,4915	0,22	2150	340,1064
4	6	3,5	2,4	6,5666	0,23	2200	333,5005
5	5	3,7	2,5	6,6408	0,24	2250	327,2757
6	4	3,9	2,6	6,7142	0,25	2300	321,3951
7	3	4,1	2,7	6,7868	0,26	2350	315,8267
8	2	4,3	2,8	6,8586	0,27	2400	310,5424
9	1	4,5	2,9	7,0000	0,28	2500	307,0648

Cuadro 2. Comparación de los tiempos de viaje de onda y rigideces, analíticos e identificados

Piso	Analítico τ_i (s)	Simulación τ_i (s)	$\Delta\tau/\tau$ (%)	Real $k(t_f/m)$	Estimado $k(t_f/m)$	$\Delta k/k$ %
9	0,0085	0,0086	1.2154	3756,6	3666.9	2.3871
8	0,0095	0,0094	-1.1432	2892,1	2959.4	-2.3262
7	0,0103	0,0103	0.0249	4544,1	4541.8	0.0498
6	0,0105	0,0105	0.0130	4596,6	4595.4	0.0260
5	0,0113	0,0113	-0.0052	6712,5	6713.2	-0.0105
4	0,0121	0,0121	-0.0096	5795,2	5796.3	-0.0193
3	0,0130	0,0130	-0.0201	8075,9	8079.1	-0.0402
2	0,0138	0,0138	-0.0128	7074,7	7076.5	-0.0256
1	0,0147	0,0146	-0.0611	9602,2	9613.9	-0.1224

REFERENCIAS

Aki, K. and Richards, P. (2002). *Quantitative Seismology*. University Science Books, 2nd edition.

Chopra, A.K. (1995). *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall, 3rd edition.

Haskell, N. (1956). The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bulletin of the seismological Society of America*, 43(1), 17–34.

Hibbeler, R. (2006). *Mecánica de Materiales*. Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall, 3rd edition.

Hou, Z., Noori, M., and Amand, R. (2000). Wavelet-based approach for structural damage detection. *Journal of Engineering Mechanics*, 126(7), 677–683.

Hwang, H. and Kim, C. (2004). Damage detection in structures using a few frequency response measurements. *Journal of Sound and Vibration*, 270(1-2), 1–14.

Kausel, E. (2006). *Fundamental Solutions in Elastodynamics*. Cambridge University Press. New York.

Koh, C., See, L., and Balendra, T. (1993). Determination of story stiffness of three-dimensional frame buildings. *Engineering Structures*, 17(3), 179–186.

LeVeque, R.J. (2007). *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: steady-state and time-dependent problems*. Siam.

Maia, N., Silva, J., Almas, E., and Sampaio, R. (2003). Damage detection in structures: From mode shape to frequency response function methods. *Journal of Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(3), 489–498.

McCormac, J. (2005). *Diseño de concreto reforzado*. Alfaomega, 8th edition.

Pujol, J. (2003). *Elastic Wave Propagation and Generation in Seismology*. Cambridge University Press. New York.

Safak, E. and Hudnut, K. (2006). Real-time structural monitoring and damage detection by acceleration and GPS sensors. *US National Conference on Earthquake Engineering*.

Sánchez-Sesma, F.J. and Velázquez, S.A. (1987). On the seismic response of a dipping layer. *Wave Motion*, 9, 387–391.

Todorovska, M.I. and Rahmani, M.T. (2009). Earthquake damage detection in building and early warning based on wave travel times. *Proceedings of 2009 NSF Engineering Research and Innovation Conference, Honolulu, Hawaii*.

Todorovska, M.I. and Trifunac, M.D. (2007). Earthquake damage detection in the imperial county services building i: The data and time-frequency analysis. *Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 27(6), 5.

Todorovska, M.I. and Trifunac, M.D. (2008). Earthquake damage detection in the imperial county services building iii: Analysis of wave travel times via impulse response functions. *Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 28(5), 387–404.

Todorovska, M. and Mohammad, T. (2012). System identification of building by wave travel time analysis and layered shear beam models-spatial resolution and accuracy. *Journal of Structural Control and Health Monitoring*, 20(5), 686–702.

Yang, J., Xia, Y., and Loh, C. (2014). Damage identification of bolt connections in a steel frame. *Journal of Structural Engineering*, 140(3).

Yang, J.N., Pan, S., and Lin, S. (2007). Least squares estimation with unknown excitations for damage identification of structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 133(1), 12–21.

Zhang, R.R., Snieder, R., Gargab, L., and Seibic, A. (2011). Modeling of seismic wave motion in high-rise buildings. *Journal of Probabilistic Engineering Mechanics*, 24(4), 520–527.