

FDI Robusta mediante PIO para Sistemas LPV

Addison Rios-Bolivar* Francklin Rivas*

* Universidad de Los Andes, Facultad de Ingeniería, Escuela de
Sistemas, La Hechicera, Mérida 5101, Venezuela.
(e-mail: ilych@ula.ve, rivas@ula.ve).

Resumen: Considerando los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) continuos con incertidumbres politópicas, esta contribución presenta un método para la síntesis de filtros robustos de detección y diagnóstico de fallas. Tomando ventaja de los reconstructores de entradas desconocidas, los filtros se diseñan como observadores proporcional-integral (PIO), considerando y resolviendo un problema de control por realimentación estática de la salida (SOF), donde la ganancia de realimentación corresponde a las matrices de diseño del PIO. El método está basado en condiciones de desempeño modificadas, establecidas a partir de las normas $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, las cuales se describen como desigualdades matriciales lineales, LMIs. La generación de los residuos, producto de los filtros robustos, se obtiene aplicando esas condiciones modificadas sobre los sistemas con perturbación desconocidas y sujetos a incertidumbres paramétricas. Los parámetros inciertos se suponen que pertenecen a un politopo. Las condiciones de desempeño $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ extendidas se obtienen por medio del lema de proyección. El diagnóstico de las fallas se alcanza en primer lugar, estableciendo condiciones de detectabilidad y separabilidad. En segundo lugar, diseñando un banco de filtros basados en PIOs.

Keywords: Diagnóstico de Fallas. Control Robusto. Normas $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Desigualdades Matriciales Lineales (LMI). Observadores Proporcional-Integral (PIO).

1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, los sistemas de detección y diagnóstico de fallas (FDI) han sido un campo de investigación muy activo. Fundamentalmente, un sistema de FDI se compone de tres elementos: a) un mecanismo de generación de residuos, b) un componente para la evaluación de los residuos y, c) un mecanismo de toma de decisiones. De esos tres elementos, el más crítico es el sistema de generación de residuos, mismo que provee las bases para el diagnóstico y las tomas de decisiones correspondientes.

Una técnica de generadores de residuos está basada en modelo matemáticos. Cuando el modelo de diagnóstico toma en consideración las señales de perturbación y las incertidumbres, entonces se trata de un problema de detección robusta de fallas (RFD). Una técnica muy popular para la generación de residuos consiste en diseñar observadores de Luenberger, que ha sido propuesta por Beard (1971); Jones (1973). Para el problema de robustez en la generación de los residuos ver Frisk and Nielsen (2006).

Por el lado de los observadores proporcional-integral (PIO), en Niemann et al. (1997) se diseña un filtro de FDI para sistemas LTI. Allí no se consideran las incertezas del modelo de diagnóstico. Un estudio comparativo de la técnicas de FDI basados en observadores es presentado en Zhang (2009). Allí, se aborda el problema FDI a partir de observadores para sistemas LTI, con un énfasis en robustez respecto a la estimación de entradas desconocidas. Se analizan cinco estructuras del observador: observador de Luenberger, el observador de perturbación (DO), el

observador de entrada desconocida (UIO), el PIO y el PIO de “aclaramiento”. La robustez se define en conexión a la detección de la falla, no tomándose en cuenta incertidumbres del modelo de diagnóstico.

En Casavola et al. (2007); Weng et al. (2007) se trata el problema para los sistemas con incertidumbres politópicas. En todos estos casos no se definen condiciones características para la detectabilidad y la separabilidad de las fallas. Por el contrario, en Bokor and Balas (2004) se presenta una revisión y solución formal solo para el caso de los sistemas lineales variantes en parámetros (LPV). Es importante destacar que las condiciones de detectabilidad de fallas se presentan como extensión de las condiciones geométricas para sistemas LTI descritas en Massoumnia (1986), para una clase de sistemas LPV y quasi-LPV.

En este orden de ideas, en los años recientes mucha investigación se ha dedicado al filtraje robusto para sistemas politópicos, no así para la RFD, (ver Duan et al. (2006) y sus referencias). Recientemente han sido presentados algunos resultados para la RFD en sistemas politópicos, Mazars et al. (2007). A partir de múltiples observadores de Luenberger, en Ríos-Bolívar and Acuña (2010) se presenta un método de diagnóstico robusto de fallas basado en optimización convexa, utilizando una representación afín para los sistemas politópicos. El diseño de los filtros de FDI preserva condiciones de desempeño en $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, irrespectivamente de la incertidumbre en los parámetros del sistema. Estableciéndose, además, condiciones de detectabilidad y separabilidad de fallas en sistemas politópicos.

De manera de aprovechar las ventajas de los PIOs: simplicidad, robustez, recuperación de la transferencia de lazo (LTR) y principalmente la estimación de entradas desconocidas, lo cual permite el diagnóstico de fallas por reconstrucción de los modos de las mismas; en este trabajo se presenta el diseño de filtros múltiples de FDI para sistemas LPV, donde las incertidumbres, en todas las matrices del modelo de diagnóstico, se describen como politopos. El diseño de los filtros como PIOs se realiza por solución de un problema de control por realimentación estática de la salida, tal como se describe en Ríos-Bolívar (2014).

1.1 Preliminares

Considérese el sistema LTI

$$\dot{x} = Ax + B\omega, \quad y = Cx + D\omega \quad (1)$$

Lemma 1. (Desempeño \mathcal{H}_2 relajado). Considérese el sistema (1) con $D = 0$. Para $P = P^T > 0$, las siguientes declaraciones son equivalentes

- i) A es estable y $\|C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B\|_2^2 < \mu$.
- ii) Existen P y Z , tales que: $\text{tr}(Z) < 1$ y

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B \\ B^T P & -\mu \mathbb{I} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} P & C^T \\ C & Z \end{bmatrix} > 0, \quad (2)$$

- iii) Existen P, Z y G , tales que: $\text{tr}(Z) < 1$ y

$$\begin{bmatrix} -(G + G^T) & G^T A + P + G^T & G^T B \\ A^T G + P + G & -2P & 0 \\ B^T G & 0 & -\mu \mathbb{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} P & C^T \\ C & Z \end{bmatrix} > 0,$$

Demostración

Ver Wei (2003). ■

De la misma forma que para el caso \mathcal{H}_2 , existen algunos resultados para mejorar el desempeño en \mathcal{H}_∞ , tal como se muestra a continuación.

Lemma 2. (Desempeño \mathcal{H}_∞ Relajado). Considérese el sistema (1). Con $P = P^T > 0$ y la matriz G , las siguientes declaraciones son equivalentes:

- i) A es estable y $\|C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B + D\|_\infty < \gamma$.
- ii) Existe P , tal que

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B & C^T \\ B^T P & -\gamma^2 \mathbb{I} & D^T \\ C & D & -\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (4)$$

- iii) Existen P y G tal que, para $\tau \gg 1$

$$\begin{bmatrix} -(G + G^T) & G^T A + P + \tau G^T & 0 & G^T B \\ A^T G + P + \tau G & -2\tau P & C^T & 0 \\ 0 & C & -\mathbb{I} & D \\ B^T G & 0 & D^T & -\gamma^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (5)$$

Demostración

Ver Wei (2003). ■

Estos resultados son aplicados para síntesis de los filtros robustos de FDI.

2. FILTROS PARA EL DIAGNÓSTICO ROBUSTO DE FALLAS (RFDI)

La idea es diseñar PIO como filtros generadores de residuales. Así, considérese el siguiente sistema LPV

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B_1(\alpha)w(t) + B_2(\alpha)u(t) \\ y(t) &= C(\alpha)x(t), \end{aligned} \quad (6)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ son los estados, $w(t) \in \mathbb{R}^q$ son perturbaciones desconocidas, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ son los controles, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ son las salidas medidas, mismas que se van a comparar con las salidas estimadas desde un observador. Se considera que las matrices del sistema son inciertas y pertenecen a un conjunto politópico convexo tal que $\forall \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ es definido como

$$\Omega = \left\{ (A(\alpha), B_1(\alpha), B_2(\alpha), C(\alpha)) \mid (A(\alpha), B_1(\alpha), B_2(\alpha), C(\alpha)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A^{(i)}, B_1^{(i)}, B_2^{(i)}, C^{(i)}) \right\}. \quad (7)$$

Para efectos del diagnóstico de fallas, se considera un modelo de anomalías como un término adicional a (6), esto es

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B_1(\alpha)w(t) + \\ & B_2(\alpha)u(t) + \sum_{k=1}^M L_k(\alpha)\nu_k(t) \\ y(t) &= C(\alpha)x(t), \end{aligned} \quad (8)$$

donde $\nu_k(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$ son los *modos de fallas* y son señales desconocidas, y $L_k(\alpha)$ son las *direcciones de fallas*, las cuales pertenecen al politopo, esto es, $\forall \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$,

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ (A(\alpha), B_1(\alpha), B_2(\alpha), C(\alpha), L_k(\alpha)) \mid \right. \\ & (A(\alpha), B_1(\alpha), B_2(\alpha), C(\alpha), L_k(\alpha)) = \\ & \left. \sum_{i=1}^N \alpha_i (A^{(i)}, B_1^{(i)}, B_2^{(i)}, C^{(i)}, L_k^{(i)}(\alpha)) \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

para todo $k = 1, 2, \dots, M$. Tal como en Bokor and Balas (2004), las direcciones de fallas inciertas imponen el diseño de generadores de residuos robustos, que a continuación se presenta como un PIO.

A partir del modelo de diagnóstico (8), un PIO generalizado para efectos de FDI es Ríos-Bolívar (2014):

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= F\zeta(t) + K_I\vartheta + K_P(y(t) - \tilde{y}(t)) + B_2(\alpha)u(t), \\ \dot{\vartheta}(t) &= G\vartheta + H(y(t) - \tilde{y}(t)) \\ \tilde{y}(t) &= J\zeta(t) \end{aligned} \quad (10)$$

donde las matrices F, G, H, J, K_P y K_I , de dimensiones apropiadas, se definen como las matrices del observador a ser determinadas, a condición de que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} e(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix} = 0 \quad (11)$$

siendo $e(t) = x(t) - \zeta(t)$ el error de la estimación de estados.

En el PIO, K_P y K_I son las ganancias proporcional-integral, la variable o señal ϑ se relaciona con la integral “pesada” del error de estimación de la salida, y se puede usar para estimar entradas desconocidas. La matriz G representa el coeficiente de “aclaramiento” y tiene el efecto de regular la respuesta transitoria de este observador. La matriz H es un coeficiente de efecto integral también, se usa para mejorar el margen de estabilidad.

De la dinámica del error se tiene

$$\begin{aligned} \dot{e} = \dot{x} - \dot{\zeta} &= (A(\alpha) - K_P C(\alpha))x - (F - K_P J)\zeta \\ &\quad - K_I \vartheta + B_1(\alpha)w(t) + \sum_{k=1}^M L_k(\alpha)\nu_k(t) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\dot{\vartheta} = G\vartheta + H(C(\alpha)x - J\zeta)$$

Por consiguiente, si $F = A(\alpha)$ y $J = C(\alpha)$, entonces

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{e} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} &= \mathfrak{A}(\alpha) \begin{pmatrix} e \\ \vartheta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} w \\ &\quad + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^M L_k(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \nu_k \end{aligned} \quad (13)$$

Allí, la matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$ corresponde a

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\alpha) &= \begin{pmatrix} A(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ &\quad \begin{pmatrix} -K_P & -K_I \\ H & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(\alpha) & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_p \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

donde \mathbb{I}_p es una matriz identidad de orden p . Se puede notar que, en ausencia de perturbaciones $w(t)$ y de fallas $\nu_k(t)$, la condición (11) se satisface si la matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$ es cuadráticamente estable. Esto es lo que permitirá generar los residuos por comparación de la salida estimada $\tilde{y}(t)$ respecto a la salida real $y(t)$, es decir $r_y(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$. Así, bajo la consideración del problema de estabilización de la matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$, entonces se deben seleccionar apropiadamente las matrices G , H , K_P y K_I . En ese sentido, sean las matrices

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_o(\alpha) &= \begin{pmatrix} A(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_o = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_m \end{pmatrix}, \\ \mathcal{C}_o(\alpha) &= \begin{pmatrix} C(\alpha) & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_q \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (15)$$

y la matriz

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -K_P & -K_I \\ H & G \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Las matrices en (15) definen el sistema dinámico

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \mathcal{A}_o(\alpha)z(t) + \mathcal{B}_o v(t) \\ \eta(t) &= \mathcal{C}_o(\alpha)z(t) \end{aligned} \quad (17)$$

Se puede verificar que el par $(\mathcal{A}_o(\alpha), \mathcal{B}_o)$ es controlable. Además, el sistema (17) cumple las condiciones para el diseño de una ganancia para el problema de SOF. Por consiguiente, la matriz \mathbb{K} corresponde a la ganancia de realimentación para el problema de control por SOF del sistema (17), Ríos-Bolívar (2014).

Lemma 3. Sea el sistema (17). Dicho sistema admite un control por SOF de la forma $v(t) = \mathbb{K}\eta(t)$ tal que, en lazo cerrado, la dinámica es asintóticamente estable.

Demostración

En efecto, si $v(t) = \mathbb{K}\eta(t)$, entonces la matriz dinámica de lazo cerrado es

$$\mathcal{A}_o(\alpha) + \mathcal{B}_o \mathbb{K} \mathcal{C}_o(\alpha) = \mathfrak{A}(\alpha)$$

■

En consecuencia, la estabilización de la matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$ del PIO corresponde al diseño de la ganancia \mathbb{K} para el problema de estabilización por SOF del sistema (17), Ríos-Bolívar (2014).

La estabilización de la matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$ permite satisfacer la condición (11), lo cual conlleva a obtener los residuos. Bajo la condición (11), los residuos $r_y(t)$ serán nulos en ausencia de perturbaciones y fallas, de manera que una primera evaluación es imponer un umbral que se define por la minimización de los efectos de las perturbaciones sobre $r_y(t)$. Esta minimización se puede realizar imponiendo características de desempeño óptimo-robusto sobre el diseño de la ganancia \mathbb{K} en consideración del efecto de $w(t)$ en los residuos $r_y(t)$. La detección de la presencia de una falla se analiza cuando, para cualquier modo de falla $\nu_k(t) \neq 0$, los residuos $r_y(t)$ superan el umbral, es decir

$$\mathfrak{N}(r_y(t)) < T_h \quad \text{si } \nu_k(t) = 0, \quad (18)$$

$$\mathfrak{N}(r_y(t)) > T_h \quad \text{si } \nu_k(t) \neq 0, \quad (19)$$

donde $\mathfrak{N}(\cdot)$ es una función que cuantifica el “tamaño” de la señal residual $r_y(t)$, es decir, es una norma para dicha señal. T_h es el umbral. En este trabajo las normas que se emplean son $\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_\infty$, caracterizadas como LMIs.

2.1 Condiciones para RFDI

Para el caso de sistemas LTI ciertos, las condiciones han sido presentadas en Massoumnia (1986). Para los sistemas LTV esas condiciones son extendidas en Ríos-Bolívar (2001). En el caso de sistemas con incertidumbres politópicas los resultados en esas direcciones han sido los presentados en Bokor and Balas (2004, 2005), las cuales son extendidas para sistemas LPV en Ríos-Bolívar and Acuña (2010). De allí se desprende lo siguiente:

Proposition 4. Para un sistema LPV, con $(\mathcal{C}, \mathfrak{A})$ -invariante, se puede diseñar un PIO de la forma (10), con la condición (11), de modo que la proyección de las fallas en el subespacio de salida generan los residuos $r_y(t)$.

Si esa condición de detectabilidad se satisface, entonces para cualquier modo de falla $\nu_k(t) \neq 0$, para $t \geq t_1$, los residuos $r_y(t) \neq 0$ para $t \geq t_1$.

Para la condición de separabilidad se establece que las direcciones de fallas son mapeadas sobre el espacio de observabilidad, a partir de lo cual es factible su aislamiento, diseñando PIOs, lo cual es posible considerando el diseño de PIO múltiples, considerando un índice de desempeño para cada una de las direcciones de fallas separables y para las perturbaciones.

2.2 Multifiltraje para RFDI

A los efectos de obtener la separación de fallas y al mismo tiempo atenuar el ruido exógeno, se aplica el multifiltraje. A partir del PIO dado por (10), el banco de filtros, para $k = 1, \dots, M$, está dado por

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_k(t) &= F\zeta_k(t) + K_{I_k}\vartheta_k + \\ &\quad K_{P_k}(y(t) - \tilde{y}_k(t)) + B_2(\alpha)u(t), \\ \dot{\vartheta}_k(t) &= G_k\vartheta_k + H_k(y(t) - \tilde{y}_k(t)) \\ \tilde{y}_k(t) &= J\zeta_k(t)\end{aligned}\quad (20)$$

donde, $\zeta_k(t)$ y $\tilde{y}_k(t)$ representan los estados estimados y las salidas estimadas para el filtro k -ésimo, donde los parámetros de diseño son: K_{P_k} , K_{I_k} , G_k y H_k ; bajo la consideración de que $F = A(\alpha)$, $J = C(\alpha)$. Entonces, la dinámica de estimación corresponde a ese k -ésimo filtro es

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_k(t) \\ \dot{\vartheta}_k(t) \end{pmatrix} = \mathfrak{A}_k(\alpha) \begin{pmatrix} e_k(t) \\ \vartheta_k(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{B}_k(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{w}_k(t) + \begin{pmatrix} L_k(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \nu_k(t)\quad (21)$$

donde

$$\mathfrak{A}_k(\alpha) = \begin{pmatrix} A(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K_{P_k} & -K_{I_k} \\ H_k & G_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(\alpha) & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_p \end{pmatrix},\quad (22)$$

$$\mathcal{B}_k(\alpha) = \left[B_1(\alpha) \sum L_{k0}(\alpha) \right],\quad (23)$$

$$\tilde{w}_k(t) = [w(t)^T \nu_{k0}^T(t)]^T.\quad (24)$$

$\nu_k(t)$ y $L_k(\alpha)$ son los modos y dirección de fallas para el k -ésimo filtro, y que es sensible a esa condición de falla. El resto de los modos y direcciones de fallas, es decir, $\nu_{k0}(t)$ y $\sum L_{k0}(\alpha)$, son incluidas dentro del vector de perturbaciones extendido $\tilde{w}_k(t) \in \mathbb{R}^{n_f+q-1}$ y $\mathcal{B}_k(\alpha)$, respectivamente, y que se debe atenuar en los residuos.

Siguiendo la definición de las matrices (15) y la matriz de ganancia (16), se genera el sistema dinámico extendido para el k -ésimo filtro

$$\begin{aligned}\dot{z}_k(t) &= \mathcal{A}_o(\alpha)z_k(t) + \mathcal{B}_o v_k(t) + \mathcal{B}_{1k}(\alpha)\tilde{w}_k(t) \\ &\quad + \mathfrak{L}_k(\alpha)\nu_k(t) \\ \eta_k(t) &= \mathcal{C}_o(\alpha)z_k(t)\end{aligned}\quad (25)$$

donde

$$\mathcal{B}_{1k}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_k(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{L}_k(\alpha) = \begin{pmatrix} L_k(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}\quad (26)$$

Nótese que $\eta_k(t)$ corresponde a la señal residual del filtro. El diseño del filtro se obtiene como solución de un problema de control óptimo-robusto por SOF, donde la ganancia de realimentación \mathbb{K}_k se obtiene en términos de índices de desempeño en \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_∞ caracterizados como LMIs.

Para la dinámica (25), el rechazo a la perturbación $\tilde{w}_k(t)$ se obtiene minimizando la norma \mathcal{H}_2 ó \mathcal{H}_∞ del sistema $T_{\tilde{w}_k \rightarrow \eta_k}(s) = \mathcal{C}_o(\alpha)(sI - \mathfrak{A}_k(\alpha))^{-1}\mathcal{B}_{1k}(\alpha)$, con un control por SOF de la forma $v_k(t) = \mathbb{K}_k\eta_k(t)$, según el Lema 3. Enseguida se muestra el diseño del filtro.

Multifiltraje para RFDI en \mathcal{H}_2

Theorem 5. Considérese el sistema (8) sobre el politopo (9), tal que se admiten las condiciones (??) y (??). Un filtro para la k -ésima falla, de la forma (20), garantizando un desempeño sub-óptimo en \mathcal{H}_2 para (21), es decir, $\|T_{\tilde{w}_k \rightarrow \eta_k}(s)\|_2^2 < \mu$, se obtiene a partir del siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned}\min_{Q_k, X_k, Z_k, P_k^{(i)}} \quad & \text{tr}(Z_k), \quad \text{tal que} \\ & i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, M. \\ \begin{bmatrix} -Q_k - Q_k^T & \Psi_{2,k} & Q_k^T \mathcal{B}_{1k}^{(i)T} \\ \star & -2P_k^{(i)} & 0 \\ \star & \star & -\mu \mathbb{I} \end{bmatrix} & < 0, \\ \begin{bmatrix} P_k^{(i)} & \star \\ \mathcal{C}_o^{(i)} & Z_k \end{bmatrix} & > 0\end{aligned}\quad (27)$$

para $i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, M$, donde $\Psi_{2,k} = Q_k^T \mathcal{A}_o^{(i)} + \mathcal{B}_o X_k \mathcal{C}_o^{(i)} + P_k^{(i)} + Q_k^T$, $Q_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_k \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $Z_k \in \mathbb{R}^{s \times s}$, y $P_k^{(i)} = P_k^{(i)T} > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Así, la ganancia del estimador está dada por

$$\mathbb{K}_k = M_k^{-1} X_k, \quad \text{con} \quad M_k = \mathcal{B}_o^{-1} Q_k^T \mathcal{B}_o.\quad (28)$$

Demostración

A partir del Lema 1, se asume que hay una solución factible para el problema de optimización formulado. Mediante el cambio de variable $X_k = M_k \mathbb{K}_k$, con $Q_k^T \mathcal{B}_o = \mathcal{B}_o M_k$, para la LMI de la declaración *iii*) del Lema 1, se hacen las sustituciones respectivas y se llega a la LMI dado por (27). ■

Multifiltraje para RFDI en \mathcal{H}_∞

Theorem 6. Considérese el sistema (8) sobre el politopo (9), tal que se admiten las condiciones (??) y (??). Un filtro para la k -ésima falla, de la forma (20), garantizando un desempeño sub-óptimo en \mathcal{H}_∞ para (21), es decir, $\|T_{\tilde{w}_k \rightarrow \eta_k}(s)\|_\infty < \gamma$, a partir del siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned}\min_{Q_k, Y_k, P_k^{(i)}, \tau} \quad & \|T_{\tilde{w}_k \rightarrow \eta_k}(s)\|_\infty, \quad \text{tal que} \\ & i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, M. \\ \begin{bmatrix} -(Q_k + Q_k^T) & \Psi_{\infty,k} & 0 & Q_k^T \mathcal{B}_{1k}^{(i)T} \\ \star & -2\tau P_k^{(i)} & \mathcal{C}_o^{(i)T} & 0 \\ \star & \star & -\mathbb{I} & 0 \\ \star & \star & \star & -\gamma^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} & < 0\end{aligned}\quad (29)$$

donde $i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, M$; $\Psi_{\infty,k} = Q_k^T \mathcal{A}_o^{(i)} + \mathcal{B}_o Y_k \mathcal{C}_o^{(i)} + P_k^{(i)} + \tau Q_k^T$, $Q_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y_k \in \mathbb{R}^{n \times p}$, y $P_k^{(i)} = P_k^{(i)T} > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Así, la ganancia \mathbb{K}_k se obtiene por

$$\mathbb{K}_k = M_k^{-1} Y_k, \quad \text{donde} \quad M_k = \mathcal{B}_o^{-1} Q_k^T \mathcal{B}_o.\quad (30)$$

Demostración

De manera similar, si se asume que hay una solución factible para el problema de optimización formulado. Mediante el cambio de variable $Y_k = \mathcal{B}_o M_k$, donde $Q_k^T \mathcal{B}_o = \mathcal{B}_o M_k$, para el inciso *iii*) del Lema 2, se hacen las sustituciones respectivas y se llega a la LMI dado por (29). ■

2.3 RFDI via multifiltraje $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Considérese el modelo de diagnóstico dado por (8) sobre el politopo (9). Aún admitiendo condiciones de separabilidad, algunas direcciones de fallas pueden coincidir con componentes de la matriz $B_1(\alpha)$, lo cual implica que ciertas fallas pueden confundirse como señales de perturbación y el diagnóstico será más difícil de obtener. Así, es necesario evaluar, en lo posible, el efecto de las fallas y las perturbaciones en los residuos, por separado, lo cual es posible por PIO. En consecuencia, considerando un PIO de la forma (20), la dinámica extendida será

$$\dot{z}_k(t) = \mathcal{A}_o(\alpha)z_k(t) + \mathcal{B}_o v_k(t) + \mathcal{B}_{1k}(\alpha)w(t) + \mathcal{B}_{Lk}(\alpha)\nu_{k0}(t) + \mathcal{L}_k(\alpha)\nu_k(t) \quad (31)$$

$$\eta_k(t) = \mathcal{C}_o(\alpha)z_k(t)$$

donde

$$\mathcal{B}_{1k}(\alpha) = \begin{pmatrix} B_1(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{Lk}(\alpha) = \begin{pmatrix} \sum L_{k0}(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$\mathcal{L}_k(\alpha) = \begin{pmatrix} L_k(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Tal como se puede notar, se tiene la falla ν_k que se desea diagnosticar, el resto de las fallas representadas en $\mathcal{B}_{Lk}(\alpha)$ y las perturbaciones descritas por $\mathcal{B}_{1k}(\alpha)$, de manera separadas. Así, el diseño del multifiltraje se puede obtener imponiendo múltiples índices de desempeño:

1. El rechazo al ruido se obtiene minimizando la norma-2 del sistema $T_{w \rightarrow \eta_k}(s) = \mathcal{C}_o(\alpha)(sI - \mathcal{A}_k(\alpha))^{-1}\mathcal{B}_{1k}(\alpha)$, con, $\|T_{w \rightarrow \eta_k}\|_2 < \mu_k$.
2. El diagnóstico de fallas se obtiene minimizando la norma- ∞ del sistema $T_{\nu_{k0} \rightarrow \eta_k}(s) = \mathcal{C}_o(\alpha)(sI - \mathcal{A}_k(\alpha))^{-1}\mathcal{B}_{Lk}(\alpha)$, esto es, $\|T_{\nu_{k0} \rightarrow \eta_k}(s)\|_\infty < \gamma_k$.

En consecuencia, la técnica de multifiltrado para el diseño del banco de filtros con criterios múltiples es una combinación del multifiltraje en \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ .

3. EJEMPLO ILUSTRATIVO

Considérese el modelo LPV dado por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1,75 + \alpha_2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 + \alpha_1 & 0 & 0 \\ -1,8 & -1 & -0,75 + \alpha_1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 + \alpha_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,6 + \alpha_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 1 + \alpha_1 & 1 \\ 1 & 0,5 + \alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \nu_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \nu_2$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

donde los parámetros $\alpha_1 \in [-0,05, 0,05]$ y $\alpha_2 \in [-0,1, 0,1]$. Los vértices del politopo se estructuran con los valores mínimos y máximos de esos parámetros.

Los modos de fallas ν_k , $k = 1, 2$, están asociados a anomalías del actuador. Aplicando multifiltraje en $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, las ganancias de SOF son

$$\mathbb{K}_1 = \begin{bmatrix} -7,9119 & -2,1124 & -18,9915 & 33,7888 \\ 6,9848 & -0,8900 & -12,2796 & 3,6699 \\ 3,5951 & 1,8341 & -3,4365 & 3,4331 \\ 21,4275 & -0,2689 & -5,7651 & -16,2854 \\ -2,8732 & 0,8795 & -0,2863 & -0,4870 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{K}_2 = \begin{bmatrix} 8,6759 & 10,2763 & -40,9927 & 35,2296 \\ 3,9900 & -17,2249 & 12,2568 & 7,6901 \\ 11,2313 & 8,0823 & -38,4933 & 30,9176 \\ 7,6496 & -47,3802 & 67,0193 & -38,9753 \\ -3,5801 & -0,0992 & 3,1071 & -0,4822 \end{bmatrix}$$

De modo que las matrices de los filtros tipos PIO son:

$$K_{P1} = \begin{bmatrix} 7,9119 & 2,1124 & 18,9915 \\ -6,9848 & 0,8900 & 12,2796 \\ -3,5951 & -1,8341 & 3,4365 \\ -21,4275 & 0,2689 & 5,7651 \end{bmatrix} \quad K_{I1} = \begin{bmatrix} -33,7888 \\ -3,6699 \\ -3,4331 \\ 16,2854 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = [-2,8732 \quad 0,8795 \quad -0,2863] \quad G_1 = -0,4870.$$

$$K_{P2} = \begin{bmatrix} -8,6759 & -10,2763 & 40,9927 \\ -3,9900 & 17,2249 & -12,2568 \\ -11,2313 & -8,0823 & 38,4933 \\ -7,6496 & 47,3802 & -67,0193 \end{bmatrix} \quad K_{I2} = \begin{bmatrix} -35,2296 \\ -7,6901 \\ -30,9176 \\ 38,9753 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = [-3,5801 \quad -0,0992 \quad 3,1071] \quad G_2 = -0,4822.$$

El primer filtro es sensible a la falla ν_1 , mientras que el otro es para diagnosticar la falla ν_2 .

Los resultados de las simulaciones se obtuvieron sobre 100 s, permitiendo la variación de los parámetros en todo momento, ya que se tomaron como señales sinusoidales de diferentes frecuencias. Enseguida, la Figura 1 muestra los modos de fallas usados. Como se puede notar, el modo

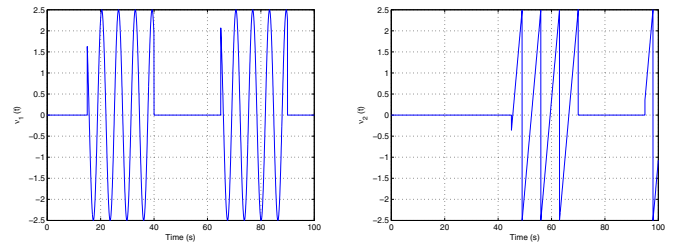


Figura 1. Los modos de fallas.

ν_1 se presenta a partir de $t = 15$ s, correspondiente a una onda sinusoidal. Mientras que ν_2 a partir de $t = 45$ s, y se representa por una señal diente de sierra. Para la generación de los residuos se consideran las salidas medidas, mismas que se muestran en la Figura 2, y las salidas estimadas por cada filtro.

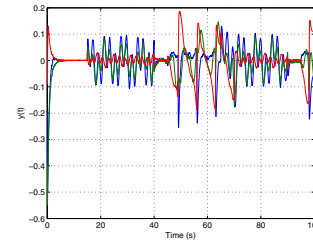


Figura 2. Las salidas.

La Figura 3 muestra las señales residuales obtenidas para cada filtro. Es fácil observar, de los residuos, que las fallas son detectadas y separadas, ya que cada filtro es más sensible a la falla que se quiere diagnosticar, lo cual se evidencia mas aún cuando se evalúan las señales $\vartheta(t)$ de cada filtro, que se muestran en la Figura 4, donde se tiene una adecuada reconstrucción de los modos de fallas, de acuerdo al nivel de sensibilidad alcanzado por cada filtro, lo cual acompaña los residuos generados para distinguir

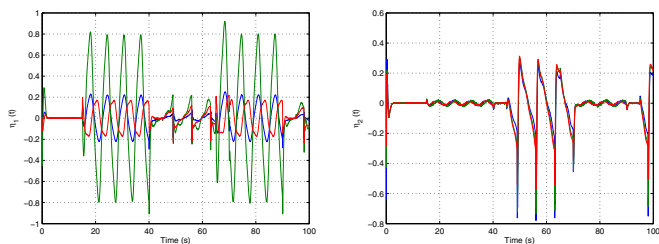


Figura 3. Los residuos.

cada una de las anomalías. Esto fortalece la técnica de diseño de PIO para el diagnóstico y reconstrucción de fallas en sistemas LPV, dándole validez numérica a los resultados teóricos..

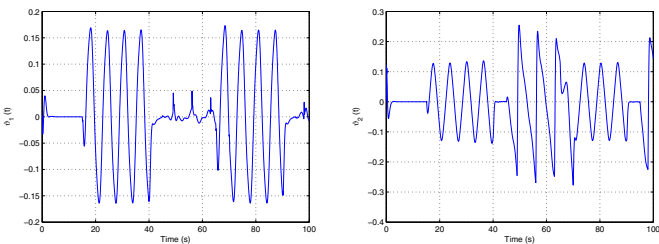


Figura 4. Señales φ .

4. COMENTARIOS CONCLUYENTES

En este trabajo se ha presentado una técnica para el diagnóstico robusto de fallas en sistemas con incertidumbres politópicas, mediante el diseño de filtros definidos por PIO. Se han establecido condiciones de detectabilidad y separabilidad de fallas para tales sistemas, derivadas de las condiciones para los sistemas LTV. El diagnóstico de fallas se obtiene a partir de las condiciones establecidas y definiendo índices de desempeño en $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, caracterizados como versiones extendidas de LMIs. La síntesis de los filtros de diagnóstico se obtiene por solución numérica de las LMIs, transformando el diseño de las matrices del PIO como un problema de control óptimo robusto por SOF, considerando especificaciones multiobjetivos, lo que permite extensiones según la naturaleza de las fallas y sus características como señales. En la separación de fallas por multifiltraje, se ha diseñado un filtro para cada falla, tomando las fallas como perturbaciones y minimizando una medida de desempeño en $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Para una mejor separación y atenuación del ruido, mediante la reducción del conservatismo de las técnicas tradicionales, se han considerado versiones extendidas de las caracterizaciones de las normas $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, además de funciones de Lyapunov dependientes de parámetros. La evaluación numérica ha permitido la verificación de los resultados teóricos, y el análisis de los residuos, conjuntamente con las señales desconocidas estimadas del PIO, fortalecen el proceso de diagnóstico.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el CDCHTA de la Universidad de Los Andes, a través del proyecto No. **I-1302-12-02-B**, por lo que gratamente se reconoce este soporte.

REFERENCIAS

- Beard, R. (1971). *Failure accommodation in linear systems through self-reorganization*. Ph.D. thesis, Mass. Inst. Technol.
- Bokor, J. and Balas, G. (2004). Detection filter design for lpv systems—a geometric approach. *Automática*, 40, 511–518.
- Bokor, J. and Balas, G. (2005). Linear parameter varying systems: A geometric theory and applications. Technical report, Comp. and Automation Research Institute, Hungary.
- Casavola, A., Famularo, D., Franzè, G., and Sorbara, M. (2007). A fault detection, filter-design method for linear parameter-varying systems. *Proc IMechE. Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 221, 865–873. Especial Issue on Fault Diagnosis and Fault-Tolerant Control.
- Duan, Z., Zhang, J., Zhang, C., and Mosca, E. (2006). Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain linear systems. *Automatica*, 42, 1919–1926.
- Frisk, E. and Nielsen, L. (2006). Robust residual generation for diagnosis including a reference model for residual behavior. *Automatica*, 42(3), 437–445.
- Jones, H. (1973). *Failure detection in linear systems*. Ph.D. thesis, Mass. Inst. Technol.
- Massoumnia, M.A. (1986). A geometric approach to the synthesis of failure detection filters. *IEEE Trans. On Autom. Control*, 31(9), 839–846.
- Mazars, E., I.M., J., Li, Z., and Zolotas, A. (2007). Fault detection and isolation filter design for systems subject to polytopic uncertainties. In *Proc. of the IEEE 15th Mediterranean Conf. On Control and Autom.*, CDROM. Athens, Greece.
- Niemann, H., Stoustrup, J., and Shafai, B. (1997). Fault detection using pi observers. In *In Proc. of CONTROL 97*.
- Ríos-Bolívar, A. (2001). *Sur la Synthèse de Filtres de Détection de Défaillances*. Ph.D. thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse.
- Ríos-Bolívar, A. (2014). On the design of PIO for LPV systems. *Revista Ciencia e Ingeniería (bajo consideración)*.
- Ríos-Bolívar, A. and Acuña, W. (2010). Robust FDI in uncertain LTI systems: A multiobjective $\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_\infty$ setting. *Int. J. of Electronics, Electrical and Communication Eng. (IJEECE)*, 2(1), 25–45.
- Wei, C. (2003). *On Applications of the Projection Lemma to Analysis and Design of Continuous-Time Systems*. Master's thesis, National Sun Yat-Set University.
- Weng, A., Patton, R., and Cui, P. (2007). Active fault-tolerant control of a double inverted pendulum. *Proc IMechE. Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 221, 895–904. Especial Issue on Fault Diagnosis and Fault-Tolerant Control.
- Zhang, J. (2009). *Evaluation of observer structures with application to fault detection*. Master's thesis, Northeastern University, Dep. of Electrical and Computer Eng.