

Diseñando Observadores PI para Sistemas LPV

Addison Rios-Bolivar* Francklin Rivas**

* Universidad de Los Andes, Facultad de Ingeniería, Escuela de
Sistemas, La Hechicera, Mérida 5101, Venezuela.
(e-mail: ilich@ula.ve).

** Universidad de Los Andes, Facultad de Ingeniería, Escuela de
Sistemas, La Hechicera, Mérida 5101, Venezuela.
(e-mail: rivas@ula.ve).

Resumen: Considerando los sistemas lineales a parámetros variantes (LPV), en esta contribución se presenta un método para la síntesis de Observadores Proporcional+Integral (PIO) robustos. Vistos los sistemas LPV con incertidumbres politópicas, el método está basado en considerar una dinámica extendida del PIO, para luego transformar el diseño de las matrices de la dinámica de tal observador, como un diseño de la ganancia de realimentación estática de la salida (SOF) de un problema de control robusto. Bajo esas condiciones, se establecen, a partir de las normas $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ descritas como desigualdades matriciales lineales, LMIs, los criterios para obtener la ganancia de problema de SOF, considerando índices de desempeño en \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ , bajo la presencia de incertidumbres y perturbaciones. Para ilustrar los resultados y el desempeño de la estimación de estados robusta, se presentan ejemplos numéricos.

Keywords: Sistemas LPV. Observadores Proporcional+Integral (PIO). LMI. Normas \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_∞ .

1. INTRODUCCIÓN

El contexto de los sistemas a parámetros lineales (LPV), se refiere a los sistemas dinámicos lineales cuyas representaciones en espacio de estados dependen de parámetros no estacionarios exógenos (Shamma, 2012). Los sistemas LPV son una generalización de los sistemas LTV, estableciendo un modelo intermedio entre dinámicas lineales y no lineales, por lo que pueden constituirse en un modelo representativo para el control de procesos no lineales (Duan and Yu, 2013).

Si para un sistema LTV se extiende la variación temporal como la variación de un parámetro α , que depende del tiempo, entonces se describe el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t); & x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= C(\alpha(t))x(t)\end{aligned}\quad (1)$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$ son los estados, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ son los controles y $y(t) \in \mathbb{R}^q$ las salidas medidas, y además $\alpha(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^l$. El modelo representa un sistema LPV. Es claro que si $\alpha(t) = t$, $l = 1$, el modelo LPV describe un sistema LTV.

Desde un punto de vista práctico, un sistema LPV tiene, al menos, dos interpretaciones interesantes (Bruzelius et al., 2004):

1. Puede ser visto como un sistema LTI con incertidumbre paramétrica, donde la incertidumbre está dada por el parámetro variante en el tiempo $\alpha(t)$.
2. Puede ser visto como un modelo LTV, o un modelo resultante de la linealización de un sistema no lineal

(SNL) a lo largo de las trayectorias del parámetro α , aplicando linealización extendida.

Definición 1.1. Un sistema LPV es una dinámica en la cual las matrices contienen funciones que dependen de un vector de parámetros variantes conocidos.

Por otro lado, la observación causal es el problema de encontrar las estimaciones para los valores actuales de un conjunto de señales a partir de los valores presentes y pasados de otro conjunto de señales, donde ambos conjuntos de señales son inter-conectados por la acción de un sistema dinámico. Éste último se denominada *observador*, y el procedimiento se conoce como estimación o reconstrucción de estados. Así, en el observador de Luenberger se describe un método de como, a partir de las señales de entrada y de salida, para sistemas LTI de dimensión finita, se pueden estimar los estados.

Una característica importante es que la estimación sea asintóticamente exacta, es decir, converja al valor real de las señales observadas cuando el tiempo va al infinito (observabilidad asintótica). Para el caso de sistemas LPV, se sigue esta idea. La construcción de un sistema dinámica que permita la estimación asintótica de los estados, bajo la presencia de variaciones paramétricas.

En principio, el problema de diseño de observadores para sistemas LPV implica un análisis de la observabilidad de dichos sistemas. Así, en (Balas et al., 2003) se presenta la noción de sub-espacios invariantes para sistemas LPV, introduciendo el concepto de subespacios invariantes de parámetros variantes, que es muy importante para el diseño de observadores de estado, ya que caracteriza una condición geométrica de la observabilidad. Los resultados

son aplicados al diseño de filtros de detección de fallas en sistemas LPV (Bokor and Balas, 2004).

En ese mismo orden de ideas, en (Trumpf, 2007) se presentan unas caracterizaciones y unas condiciones necesarias y suficientes para la existencia de observadores de seguimientos y asintóticos para funciones lineales del estado de sistemas variantes en el tiempo finito dimensional. Los resultados son evaluados en sistemas afines a parámetros variantes y sistemas de control bilineales.

Para el diseño de observadores en sistemas LPV, en (Bara et al., 2001) se aborda un método de síntesis de observadores programados. Allí, el estado y las matrices de ganancia del observador son programadas usando un método de la interpolación que es lineal según cada parámetro, pero que es no lineal respecto el vector de parámetros variantes. La estabilidad del error estimación se evalúa mediante la existencia de una función de Lyapunov dependiente, de manera afín, respecto a parámetros. En (Hammouri and Tmar, 2010) se trata el diseño de un observador de entrada desconocidas (UIO) para sistemas afines en el estado. A partir de un método geométrico se establece una condición necesaria y suficiente para la existencia de un observador UIO. La técnica también es evaluada en (Rodrigues et al., 2005; Aguilera-González et al., 2011).

En este trabajo se presenta un método de diseño de observadores para sistemas LPV a partir de los estimadores Proporcional+Integral (PI), considerando variaciones paramétricas en el proceso y en los sensores. Se analiza la estabilidad del sistema observador mediante estabilidad Lyapunov de sistemas LPV. El observador dinámico se construye mediante una formulación de control por realimentación estática de la salida (SOF).

1.1 Preliminares

Unos resultados importantes que se deben toman en cuenta, ya que serán utilizados en el desarrollo de la técnica propuesta, corresponde a las caracterizaciones como desigualdades matriciales lineales (LMI)s extendidas de las norma \mathcal{H}_∞ y \mathcal{H}_2 de sistemas (Wei, 2003; Pipeleersa et al., 2009). Sea el sistema LTI

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\omega \\ y &= Cx + D\omega \end{aligned} \quad (2)$$

Lema 1.1. (Desempeño \mathcal{H}_2 relajado). Considérese el sistema (2) con $D = 0$. Para $P = P^T > 0$, las siguientes declaraciones son equivalentes

- i) A es estable y $\|C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B\|_2^2 < \mu$.
- ii) Existen P y Z , tales que: $\text{tr}(Z) < 1$ y

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & -\mu\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} P & C^T \\ C & Z \end{bmatrix} > 0, \quad (3)$$

- iii) Existen P, Z y G , tales que: $\text{tr}(Z) < 1$ y

$$\begin{bmatrix} -(G + G^T) & G^T A + P + G^T & G^T B \\ A^T G + P + G & -2P & 0 \\ B^T G & 0 & -\mu\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} P & C^T \\ C & Z \end{bmatrix} > 0,$$

Prueba. La equivalencia entre las tres primeras declaraciones han sido mostrada en el Teorema 3.3 de (Apkarian et al., 2001), que se basa en el lema de proyección y su recíproco. La equivalencia entre *ii*) y *iii*) es mostrada en (Wei, 2003).

De la misma forma que para el caso \mathcal{H}_2 , existen algunos resultados para mejorar el desempeño en \mathcal{H}_∞ , tal como se muestra a continuación.

Lema 1.2. (Desempeño \mathcal{H}_∞ Relajado). Considérese el sistema (2). Con $P = P^T > 0$ y la matriz G , las siguientes declaraciones son equivalentes:

- i) A es estable y $\|C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B + D\|_\infty < \gamma$.
- ii) Existe P , tal que

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma^2 \mathbb{I} & D^T \\ C & D & -\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (5)$$

- iii) Existen P y G tal que, para $\tau \gg 1$

$$\begin{bmatrix} -(G + G^T) & G^T A + P + \tau G^T & 0 & G^T B \\ A^T G + P + \tau G & -2\tau P & C^T & 0 \\ 0 & C & -\mathbb{I} & D \\ B^T G & 0 & D^T & -\gamma^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (6)$$

Prueba. Las condiciones *i*) y *ii*) representan el bien conocido *Lema Real Acotado*. La equivalencia entre *ii*) y *iii*) puede ser vista en (Wei, 2003).

2. SISTEMAS LPV

Sea el sistema (1) tal que

$$\begin{pmatrix} A(\alpha) & B(\alpha) \\ C(\alpha) & 0 \end{pmatrix} \in \Omega. \quad (7)$$

donde Ω es un politopo. Entonces, ese sistema se puede caracterizar por el *hull* convexo de Ω considerando los vértices de ese politopo, es decir

$$C_o \Omega = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A_l & B_l \\ C_l & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (8)$$

donde esos vértices matriciales son conocidos, siempre que $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, l$, $\sum_{i=1}^l \alpha_i = 1$.

Si el parámetro α pertenece al politopo Ω entonces, con $x(t_0) = x_0$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left(\sum_{i=1}^l A_i \alpha_i \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^l B_i \alpha_i \right) u(t); \\ y(t) &= \left(\sum_{i=1}^l C_i \alpha_i \right) x(t) \end{aligned} \quad (9)$$

donde $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, l$, $\sum_{i=1}^l \alpha_i = 1$.

Siguiendo el análisis de estabilidad Lyapunov, el sistema LPV (9) autónomo tiene un conjunto de soluciones para cada condición inicial $x(t_0) = x_0$, por lo cual las definiciones de estabilidad son redefinidas, estableciéndose la *estabilidad asintótica fuerte* y la *Estabilidad Cuadrática* de la inclusión diferencial (Ríos-Bolívar, 2014). El concepto de estabilidad cuadrática tiene la ventaja de que puede ser comprobado fácilmente usando métodos de programación

semi-definida (métodos numéricos), ver (Hangos et al., 2004).

Bajo los criterios de Lyapunov, si se considera la estabilidad del sistema LPV politópico (9), en su concepción autónoma, dicho sistema será estable si existe $P > 0$ tal que $\forall i = 1, \dots, l$

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^l \alpha_i = 1. \quad (10)$$

En este caso se tiene un conjunto de LMIs, definidas por el número de vértices del politopo, y esas LMIs se resuelven para una única matriz P generando conservatismo (He et al., 2005). Versiones generalizadas para reducir el conservatismo han sido propuestas, que se basan en el lema de proyección y representan una prueba directa y unificada de todos los resultados de LMIs extendidas (Pipeleers et al., 2009; Wei, 2004).

Por otro lado, el estudio de la controlabilidad y de la observabilidad de sistemas LPV ha sido presentado como extensión de los sub-espacios invariantes de los sistemas LTV (Balas et al., 2003; Bokor and Balas, 2005). Ello permite establecer las siguientes definiciones:

Definición 2.1. Controlabilidad LPV. Sea el sistema (1). Se dice que el par $(A(\alpha), B(\alpha))$ es controlable si existe una ganancia K tal que el control $u(t) = Kx(t)$ hace que la matriz $A_c = A(\alpha) + B(\alpha)K$ sea afín cuadráticamente estable.

Definición 2.2. Observabilidad LPV. Sea el sistema (1). Se dice que el par $(C(\alpha), A(\alpha))$ es observable si existe una ganancia L tal que el control dual $\bar{u}(t) = Lx(t)$ hace que la matriz $A_c^T = A^T(\alpha) + C^T(\alpha)L$ sea afín cuadráticamente estable.

3. UN PIO PARA SISTEMAS LPV

En (Wu and Duan, 2008) se presenta una generalización de diseño de observadores PIO que consiste en una solución paramétrica explícita a ecuaciones matriciales de Sylvester para las ganancias del observador. En la siguiente propuesta, el diseño de las ganancias del observador PIO generalizado se obtiene por solución de un problema de control por SOF, considerando la estabilidad en lazo cerrado y siguiendo la caracterización de la estabilidad afín cuadrática como un problema de factibilidad LMIs. Por consiguiente, sea el sistema LPV

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + Bu(t); \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= C(\alpha)x(t) \end{aligned} \quad (11)$$

con las mismas consideración para el modelo (1), excepto que en este caso se tiene certeza del funcionamiento de los accionadores, ya que la matriz de control B se supone conocida y constante. Se admite que el par $(C(\alpha), A(\alpha))$ es observable, para todo α .

A partir del modelo de un PIO, (Kaczorek, 1978), considérese la siguiente versión generalizada:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= F\zeta(t) + K_I\vartheta + K_P(y(t) - \tilde{y}(t)) + Bu(t), \\ \dot{\vartheta}(t) &= G\vartheta + H(y(t) - \tilde{y}(t)) \\ \tilde{y}(t) &= J\zeta(t) \end{aligned} \quad (12)$$

donde las matrices F, G, H, J, K_P y K_I , de dimensiones apropiadas, se definen como las matrices del observador a ser determinadas, a condición de que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} e(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix} = 0 \quad (13)$$

siendo $e(t) = x(t) - \zeta(t)$ el error de la estimación.

En el PIO, K_P y K_I son las ganancias proporcional-integral, la variable o señal ϑ se relaciona con la integral “pesada” del error de estimación de la salida, y se puede usar para estimar entradas desconocidas. La matriz G representa el coeficiente de “aclaramiento” y tiene el efecto de regular la respuesta transitoria de este observador. La matriz H es un coeficiente de efecto integral también, se usa para mejorar el margen de estabilidad. Nótese que si $G = 0$ se tiene un PIO clásico. Al asumir que dicha matriz puede ser distinta de cero, se puede interpretar como un PIO generalizado. Además, si en estado estacionario $\vartheta(t) = 0$, implica que $y(t) - C(\alpha)\zeta(t) = 0$. Las matrices G y H se pueden escoger *a priori*.

Definición 3.1. El sistema dinámico (12) se dice que es un PIO generalizado de orden completo para el sistema (11), si y solamente si, las matrices F, G, H, J, K_P y K_I son tales que la expresión (13) se satisface.

En consecuencia, se puede establecer el siguiente teorema:

Teorema 1. El sistema dinámico (12) es un PIO generalizado de orden completo para el sistema (11), si y solamente si, las matrices F, G, H, J, K_P y K_I son tales que

1. $F = A(\alpha)$ y $J = C(\alpha)$.
2. La matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$ es estable en el sentido de Lyapunov, la cual está dada por

$$\mathfrak{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} F - K_P C(\alpha) & -K_I \\ HC(\alpha) & G \end{pmatrix} \quad (14)$$

Prueba. De la dinámica del error se tiene

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\zeta} = (A(\alpha) - K_P C(\alpha))x - \\ &\quad (F - K_P J)\zeta - K_I \vartheta \\ \dot{\vartheta} &= G\vartheta + H(C(\alpha)x - J\zeta) \end{aligned}$$

Por consiguiente, si $F = A(\alpha)$ y $J = C(\alpha)$, entonces

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{\vartheta}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F - K_P C(\alpha) & -K_I \\ HC(\alpha) & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix} \\ &= \mathfrak{A}(\alpha) \begin{pmatrix} e(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

El sistema dinámico (15) debe ser afín cuadráticamente estable para que se cumpla la condición (13), lo cual implica la estabilización cuadrática de la matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$. ■

Se puede verificar que la matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$ se expresa como

$$\mathfrak{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} A(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K_P & -K_I \\ H & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(\alpha) & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_q \end{pmatrix} \quad (16)$$

Así, sean las matrices

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_o(\alpha) &= \begin{pmatrix} A(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_o = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_q \end{pmatrix}, \\ \mathcal{C}_o(\alpha) &= \begin{pmatrix} C(\alpha) & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_q \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (17)$$

y la matriz

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -K_P & -K_I \\ H & G \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Las matrices en (17) definen el sistema dinámico

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \mathcal{A}_o(\alpha)z(t) + \mathcal{B}_ov(t) \\ \eta(t) &= \mathcal{C}_o(\alpha)z(t) \end{aligned} \quad (19)$$

Es fácilmente verificable que el par $(\mathcal{A}_o(\alpha), \mathcal{B}_o)$ es controlable. Además, el sistema cumple las condiciones para el diseño de una ganancia para el problema de SOF (Ríos-Bolívar, 2014). Por consiguiente, la matriz \mathbb{K} corresponde a la ganancia de realimentación para el problema de control por SOF del sistema (19).

Si bien se ha considerado que la matriz B es plenamente conocida, ello tiene una implicación práctica, ya que si se asume que es incierta, $B(\alpha)$, en la dinámica del error aparecerá un término de la forma $B(\alpha)u(t)$, que se puede considerar como una perturbación y luego abordar el diseño de acuerdo al planteamiento que se presenta en la Sección 4. Así, se tiene un método de diseño de PIO para sistemas LPV completamente incierto.

Lema 3.1. Sea el sistema (19). Dicho sistema admite un control por SOF de la forma $v(t) = \mathbb{K}\eta(t)$ tal que, en lazo cerrado, la dinámica es asintóticamente estable.

Prueba. En efecto, si $v(t) = \mathbb{K}\eta(t)$, entonces la matriz dinámica de lazo cerrado es

$$\mathcal{A}_o(\alpha) + \mathcal{B}_o\mathbb{K}\mathcal{C}_o(\alpha) = \mathfrak{A}(\alpha) \quad \blacksquare$$

Por lo tanto, la estabilización de la matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$ del PIO generalizado corresponde al diseño de la ganancia \mathbb{K} para el problema de estabilización por SOF del sistema (19). Esto tiene la ventaja de que el diseño se obtiene por solución directa de un problema de control estabilizante para sistemas LPV.

3.1 Diseño del PIO generalizado por SOF

El resultado principal de este trabajo se describe mediante el siguiente teorema:

Teorema 2. Sea el sistema (19). Existe una ganancia \mathbb{K} para el control por SOF, a condición de que la matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$ sea estable, si y solamente si, existe una matriz $Q = Q^T > 0$ y la matriz Y de modo que la LMI siguiente se satisfice

$$Q\mathcal{A}_{o_i} + \mathcal{A}_{o_i}^T Q + \mathcal{B}_{o_i} Y \mathcal{C}_{o_i} + \mathcal{C}_{o_i}^T Y^T \mathcal{B}_{o_i}^T < 0 \quad (20)$$

y la ganancia \mathbb{K} se obtiene por

$$\mathbb{K} = M^{-1}Y, \quad \text{donde } M = \mathcal{B}_o^{-1}Q\mathcal{B}_o \quad (21)$$

Prueba. De acuerdo a la estabilidad para matrices politópicas dada por (10), $\mathfrak{A}(\alpha)$ será estable si existe $Q = Q^T > 0$ tal que

$$Q\mathfrak{A}(\alpha) + \mathfrak{A}^T(\alpha)Q < 0$$

Por sustitución

$$\begin{aligned} Q\mathcal{A}_o(\alpha) + \mathcal{A}_o^T(\alpha)Q + Q\mathcal{B}_o\mathbb{K}\mathcal{C}_o(\alpha) + \mathcal{C}_o^T(\alpha)\mathbb{K}^T\mathcal{B}_o^T Q < 0 \\ Q\mathcal{A}_{o_i} + \mathcal{A}_{o_i}^T Q + Q\mathcal{B}_{o_i}\mathbb{K}\mathcal{C}_{o_i} + \mathcal{C}_{o_i}^T\mathbb{K}^T\mathcal{B}_{o_i}^T Q < 0 \end{aligned}$$

Para la linealización de las desigualdades matriciales, se consideran los cambios de variables $Q\mathcal{B}_o = \mathcal{B}_o M$ y $Y = M\mathbb{K}$. Por consiguiente

$$Q\mathcal{A}_{o_i} + \mathcal{A}_{o_i}^T Q + \mathcal{B}_{o_i} Y \mathcal{C}_{o_i} + \mathcal{C}_{o_i}^T Y^T \mathcal{B}_{o_i}^T < 0$$

resultando una LMI definida por (20) y la expresión (21) que permite calcular \mathbb{K} . \blacksquare

Del cálculo de la ganancia \mathbb{K} se obtienen las matrices G , H , K_P y K_I de observador PIO generalizado. Dado que $F = A(\alpha)$ y $J = C(\alpha)$, para efectos de implantación práctica del observador PIO generalizado, como en la mayoría de los observadores para sistemas LPV, se debe considerar la matriz $F = A_0$ y $J = C_0$, donde A_0 y C_0 son las matrices centrales de los respectivos politopos, conservándose la robustez en el diseño del PIO.

4. DISEÑO DEL PIO EN $\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_\infty$

Como en todo proceso técnico, se considera en el este momento, la presencia de perturbaciones. Así, sea el sistema LPV

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B_1(\alpha)\omega(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C(\alpha)x(t) + D(\alpha)\omega(t), \end{aligned} \quad (22)$$

donde $\omega(t) \in \mathfrak{R}^r$ son perturbaciones desconocidas. Nuevamente, se considera que las matrices inciertas $A(\alpha), B_1(\alpha), C(\alpha), D(\alpha)$ pertenecen a un conjunto politópico convexo, $\forall \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^l \alpha_i = 1$, definido como

$$\Omega = \left\{ \sum_{i=1}^l \alpha_i \left(A^{(i)}, B_1^{(i)}, C^{(i)}, D^{(i)} \right) \right\}. \quad (23)$$

Para el PIO generalizado dado por (12), si $F = A(\alpha)$ y $J = C(\alpha)$, entonces

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{\vartheta}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F - K_P C(\alpha) & -K_I \\ H C(\alpha) & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix} + \\ &\begin{pmatrix} B_1(\alpha) - K_P D(\alpha) \\ H D(\alpha) \end{pmatrix} \omega(t) \end{aligned} \quad (24)$$

Tomando en consideración las matrices definidas en (17), la matriz de ganancia dada por (18), y las siguientes matrices

$$B_{1_o}(\alpha) = \begin{pmatrix} B_1(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_o(\alpha) = \begin{pmatrix} D(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

se deriva el sistema dinámico siguiente

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \mathcal{A}_o(\alpha)z(t) + \mathcal{B}_{1_o}(\alpha)\omega + \mathcal{B}_ov(t) \\ \eta(t) &= \mathcal{C}_o(\alpha)z(t) + D_o(\alpha)\omega \end{aligned} \quad (26)$$

el cual admite un control por SOF de la forma $v(t) = \mathbb{K}\eta(t)$, de manera que la dinámica de lazo cerrado (24), con la salida $\eta(t)$ satisfaga un índice de desempeño en $\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_\infty$. La ganancia \mathbb{K} , que define el PIO generalizado, se obtiene por solución del problema de control óptimo robusto en $\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_\infty$. En consecuencia, en lazo cerrado se tiene

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (\mathcal{A}_o(\alpha) + \mathcal{B}_o \mathbb{K} \mathcal{C}_o(\alpha)) z(t) + \\ &\quad (\mathcal{B}_{1_o}(\alpha) + \mathcal{B}_o \mathbb{K} \mathcal{D}_o(\alpha)) \omega \\ \eta(t) &= \mathcal{C}_o(\alpha) z(t) + \mathcal{D}_o(\alpha) \omega \end{aligned} \quad (27)$$

4.1 Diseño en \mathcal{H}_2

Teorema 3. Considérese el sistema (22) sobre el politopo (23), con $D(\alpha) = 0$. Un PIO generalizado de la forma (12), se determina mediante la ganancia \mathbb{K} por solución del problema de control por SOF para el sistema (26), garantizando un desempeño sub-óptimo en \mathcal{H}_2 para (27), es decir, $\|T_{\omega\eta}(s)\|_2^2 < \mu$, a partir del siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min_{Q, Y, Z, P} \quad & \text{tr}(Z), \quad \text{tal que} \\ & i = 1, \dots, l. \\ \begin{bmatrix} -Q - Q^T & \Upsilon_{o_i} & Q^T \mathcal{B}_{1_{oi}} \\ \star & -2P & 0 \\ \star & \star & -\mu \mathbb{I} \end{bmatrix} & < 0, \quad \begin{bmatrix} P & \star \\ \mathcal{C}_{o_i} & Z \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (28)$$

donde $\Upsilon_{o_i} = Q^T \mathcal{A}_{o_i} + \mathcal{B}_o Y \mathcal{C}_{o_i} + P + Q^T$, $P = P^T > 0$, y las matrices Q (con $Q + Q^T > 0$), Y son de dimensiones apropiadas. Así, la ganancia \mathbb{K} se obtiene por

$$\mathbb{K} = M^{-1}Y, \quad \text{donde } M = \mathcal{B}_o^{-1} Q^T \mathcal{B}_o \quad (29)$$

Prueba. Si se asume que hay una solución factible para el problema de optimización formulado. Mediante el cambio de variable $Y = \mathcal{B}_o M$, donde $Q^T \mathcal{B}_o = \mathcal{B}_o M$, para la declaración *iii*) del Lema 1.1, se hacen las sustituciones respectivas y se llega a la LMI dado por (28).

4.2 Diseño en \mathcal{H}_∞

Teorema 4. Considérese el sistema (22) sobre el politopo (23). Un PIO generalizado de la forma (12) se determina mediante la ganancia \mathbb{K} , por solución del problema de control por SOF para el sistema (26), garantizando un desempeño sub-óptimo en \mathcal{H}_∞ para (27), es decir, $\|T_{\omega\eta}(s)\|_\infty < \gamma$, a partir del siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min_{Q, Y, P, \tau} \quad & \|T_{\omega\eta}(s)\|_\infty, \quad \text{tal que} \\ & i = 1, \dots, l. \\ \begin{bmatrix} -(Q + Q^T) & \Gamma_{o_i} & 0 & Q^T \mathcal{B}_{1_{oi}} + \mathcal{B}_o Y \mathcal{D}_{o_i} \\ \star & -2\tau P & \mathcal{C}_{o_i}^T & 0 \\ \star & \star & -\mathbb{I} & \mathcal{D}_{o_i} \\ \star & \star & \star & -\gamma^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} & < 0 \end{aligned} \quad (30)$$

donde $\Gamma_{o_i} = Q^T \mathcal{A}_{o_i} + \mathcal{B}_o Y \mathcal{C}_{o_i} + P + \tau Q^T$, $P = P^T > 0$, y las matrices Q (con $Q + Q^T > 0$), Y son de dimensiones apropiadas. Así, la ganancia \mathbb{K} se obtiene por

$$\mathbb{K} = M^{-1}Y, \quad \text{donde } M = \mathcal{B}_o^{-1} Q^T \mathcal{B}_o \quad (31)$$

Prueba. De manera similar, si se asume que hay una solución factible para el problema de optimización formulado. Mediante el cambio de variable $Y = \mathcal{B}_o M$, donde $Q^T \mathcal{B}_o = \mathcal{B}_o M$, para el inciso *iii*) del Lema 1.2, se hacen las sustituciones respectivas y se llega a la LMI dado por (30).

Los resultados en \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ se pueden combinar para establecer índices de desempeño mezclados. Es importante recalcar que, una vez obtenida la ganancia \mathbb{K} se procede a determinar las matrices del PIO generalizado.

5. EVALUACIÓN NUMÉRICA

Considérese el diseño de un observador robusto en \mathcal{H}_∞ , para lo cual se tomará en cuenta el modelo LPV siguiente, (Bara et al., 2001)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -4,1 - 0,3\rho & 1 \\ -2\rho & 2 - 3,2\rho \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 - 0,6\rho \\ 2 + 0,9\rho \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 1] x \end{aligned}$$

donde $\rho \in [-2 \ 3]$. Se tiene incertidumbre en la matriz de control. Así, la dinámica del error será de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{\vartheta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F - K_P C(\alpha) & -K_I \\ H C(\alpha) & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} u(t);$$

de modo que se asume, en esa dinámica, que $u(t)$ es una perturbación y se aplicará el Teorema 4 para calcular la ganancia \mathbb{K} . Los resultados, para un $\gamma = 1,0216$, son

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &= \begin{bmatrix} 27,2568 & 0,1474 \\ -76,1510 & -0,4980 \\ 0,0024 & -0,4863 \end{bmatrix} \\ K_P &= \begin{bmatrix} -27,2568 \\ 76,1510 \end{bmatrix}, \quad K_I = \begin{bmatrix} -0,1474 \\ 0,4980 \end{bmatrix}, \\ G &= -0,4863 \quad H = 0,0024 \end{aligned}$$

La Figura 1 muestra la distribución de los polos en función de ρ . Allí, todos los polos son estables.

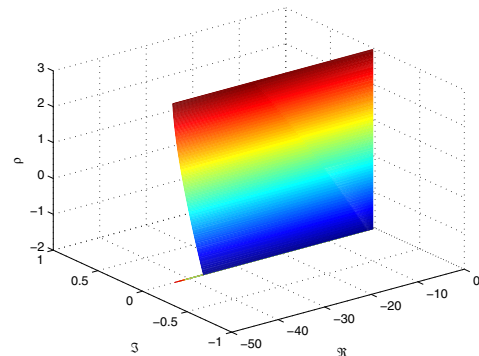


Figura 1: Polos del PIO en \mathcal{H}_∞ .

Considerando variaciones en el parámetro ρ , se realizaron las simulaciones correspondientes para evaluar la estimación. En la Figura 2 se muestra el comportamiento temporal de los estados verdaderos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ con respecto a sus estimados $\zeta_1(t)$ y $\zeta_2(t)$. Se puede observar un seguimiento muy aceptable de los estimados.

La Figura 3 muestra la evolución temporal del error $e(t)$ y de la señal $\vartheta(t)$. Se puede observar que dichas señales convergen al cero, de modo que es verificablemente aceptable la estimación robusta de los estados.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado una técnica para el diseño de observadores Proporcional+Integral en sistemas lineales con incertidumbres politópicas. El método consiste en extender la dinámica del PIO a partir de la cual, la síntesis de las matrices de dicho observador se transforma en un problema de control por realimentación estática

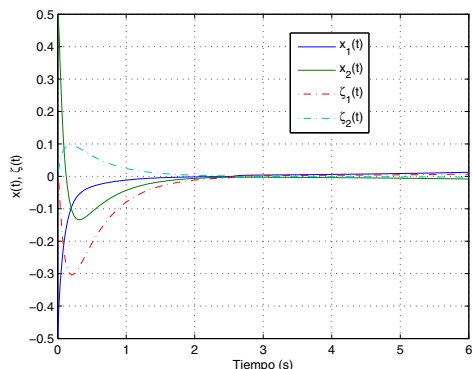


Figura 2. Los estados verdaderos y estimados.

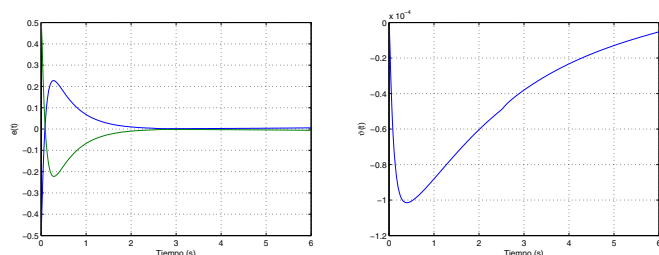


Figura 3. Comportamiento temporal de $e(t)$ y $\vartheta(t)$.

de la salida para sistemas LPV. Luego, considerando las caracterizaciones LMIs extendidas de las normas $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, la técnica de diseño se generaliza para sistemas LPV con perturbaciones, imponiendo índices de desempeño en $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para la síntesis de la ganancia en el problema de control por SOF, la cual deriva en la matrices del PIO. Así, La síntesis puede extenderse a especificaciones multiobjetivos, y puede ser aplicada en la reconstrucción de entradas desconocidas y en el diagnóstico de fallas. Se han presentado ejemplo numéricos que, mediante evaluación, han permitido mostrar la efectividad de la técnica.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el CDCHTA de la Universidad de Los Andes, a través del proyecto No. **I-1302-12-02-B**, por lo que gratamente se reconoce este soporte.

REFERENCIAS

Aguilera-González, A., Flores-Montiel, M., Adam-Medina, M., Astorga-Zaragoza, C., Quintero-Mármol, E., and García-Beltrán, C. (2011). Unknown input estimation for linear parameter varying (LPV) singular systems: Application to a binary distillation column. In AM-CA (ed.), *Proc. Congreso Nacional de la Asociación de México de Control Automático*, volume 1, 129–134. Saltillo, Coahuila.

Apkarian, P., Tuan, H., and Bernussou, J. (2001). Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and \mathcal{H}_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 46(12), 1941–1946.

Balas, G.J., Bokor, J., and Szabó, Z. (2003). Invariant subspaces for lpv systems and their applications. *IEEE Trans. Automat. Control*, 48, 2065–2069.

Bara, G., Daafouz, J., Ragot, J., and Kratz, F. (2001). State estimation for affine LPV systems. Technical report, Centre de Recherche en Automatique de Nancy, Nancy, France.

Bokor, J. and Balas, G. (2004). Detection filter design for lpv systems—a geometric approach. *Automática*, 40, 511–518.

Bokor, J. and Balas, G. (2005). Linear parameter varying systems: A geometric theory and applications. In *16th IFAC World Congress, Prague*, 1–11.

Bruzelius, F., Pettersson, S., and Breitholtz, C. (2004). Linear parameter-varying descriptions of nonlinear systems. In *Proc. American Control Conf.*, 1374–1379. ACC, Boston, Massachusetts.

Duan, G. and Yu, H.H. (2013). *LMIs in Control Systems: Analysis, Design and Applications*. CRC Press, Center for Control Theory and Guidance Technology, China.

Hammouri, H. and Tmar, Z. (2010). Unknown input observer for state affine systems: A necessary and sufficient condition. *Automatica*, 46(2), 271 – 278.

Hangos, K.M., Bokor, J., and Szederkényi, G. (2004). *Analysis and Control of Nonlinear Process Systems*. Springer, London.

He, Y., Wu, M., and She, J. (2005). Improved bounded-real-lemma representation and \mathcal{H}_∞ control of systems with polytopic uncertainties. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 52(7), 380–383.

Kaczorek, T. (1978). *Pole-Zero Assignment Techniques and Some Their Applications*. Number 159 in III. IAC Istituto per le Applicazioni del Calcolo.

Pipeleersa, G., Demeulenaere, B., Sweers, J., and Vandenberghe, L. (2009). Extended LMI characterizations for stability and performance of linear systems. *Systems & Control Letters*, 58(7), 510–518.

Ríos-Bolívar, A. (2001). *Sur la Synthèse de Filtres de Détection de Défaillances*. Ph.D. thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse.

Ríos-Bolívar, A. (2014). *Control de Sistemas Lineales: Realimentando la salida*. Talleres Gráficos Universitarios, ULA, Mérida.

Rodrigues, M., Theilliol, D., and Sauter, D. (2005). Design of a robust polytopic unknown input observer for FDI: Application for systems described by a multi-model representation. In *Proc. of 44th Conference on Decision and Control, and European Control Conference*, 6268–6273.

Shamma, J.S. (2012). *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*, chapter An Overview of LPV Systems, 3–26. Springer.

Trumpf, J. (2007). Observers for linear time-varying systems. *Linear Algebra and its Applications*, 425, 303–312.

Wei, C. (2004). *On Applications of the Projection Lemma to Analysis and Design of Continuous-Time Systems*. Master’s thesis, National Sun Yat-Set University.

Wei, C. (2003). *On Applications of the Projection Lemma to Analysis and Design of Continuous-Time Systems*. Master’s thesis, National Sun Yat-Set University.

Wu, A.G. and Duan, G.R. (2008). Generalized PI observer design for linear systems. *IMA J. of Math. Control & Information*, 25(2), 239–250.