

Sistematización del cálculo de controladores PID estabilizantes

A. Mora[†]

jmorah@iingen.unam.mx
(52)-55-56233600 ext. 8821

Instituto de Ingeniería-UNAM, Coyoacan DF 04510, México^{† ‡}

C. Verde[‡]

verde@unam.mx
(52)-55-56233684

Resumen—Existen en la actualidad diversas técnicas de diseño y sintonización de controladores PID. Una de ellas, presentada por Bhattacharyya [3] permite obtener todos los controladores PID estabilizantes para un sistema SISO de orden n en el espacio de parámetros del controlador (k_p, k_i, k_d) . Un paso fundamental en el método propuesto por Bhattacharyya consiste en resolver un sistema de desigualdades lineales en \mathbb{R}^2 para obtener regiones convexas (k_i, k_d) . En este artículo se presenta una propuesta para resolver dicho sistema de desigualdades planteado como un problema de programación lineal.

Palabras clave—PID controllers, linear programming, linear systems

I. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, los controladores de tipo PID siguen gozando de gran popularidad debido a su sencillez de implementación y la amplia gama de métodos de diseño y sintonización disponibles.

Algunos de estos métodos proveen de resultados en el espacio de parámetros del controlador (k_p, k_i, k_d) , como es el caso de la técnica utilizada en este artículo.

Bhattacharyya y otros ([1], [3], [4]) han mostrado que es posible determinar todos los controladores PID estabilizantes asociados a una planta SISO de orden n , en el espacio de parámetros del controlador a través de una generalización del Teorema de Hermite-Biehler.

Uno de los aspectos atractivos de esta técnica, además de proveer todos los controladores estabilizantes, es que se puede describir a través de un algoritmo relativamente sencillo que puede ser implementado como una pieza de software.

Según se muestra mas adelante, uno de los pasos fundamentales de esta técnica consiste en resolver para un valor de k_p fijo, un sistema de desigualdades lineales en el plano (k_i, k_d) .

En diversos trabajos se menciona la posibilidad de resolver dicho sistema como un problema de programación lineal, sin embargo no se proporciona un método sistemático que permita apreciar el planteamiento del problema.

En este artículo se presenta una posible implementación para resolver el sistema de desigualdades utilizando MATLAB[®].

En la sección II se presenta la teoría subyacente a la técnica de diseño de controladores, en la sección III se presentan los fundamentos básicos necesarios de programación lineal para resolver el sistema de desigualdades, en la sección IV se presenta un ejemplo que ilustra la aplicación de estos conceptos y finalmente se presentan las conclusiones en la sección V.

II. MARCO TEÓRICO

Bhattacharyya mostró que basándose en una generalización del teorema de Hermite-Biehler es posible obtener un método que permite realizar el cálculo de todos los controladores PID estabilizantes para un sistema SISO de orden n .

Teorema 1 (Teorema de Hermite - Biehler): Sea $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \dots + \delta_n s^n$ un polinomio real de orden n . Entonces $\delta(s)$ es estable en el sentido Hurwitz, si y sólo si, todos los ceros de $\delta_e(s^2)$ y $\delta_o(s^2)$ son reales y distintos, donde $\delta(s) = \delta_e(s^2) + s\delta_o(s^2)$, δ_n y δ_{n-1} son del mismo signo, y los ceros reales no negativos satisfacen la siguiente propiedad:

$$0 < \omega_{e1} < \omega_{o1} < \omega_{e2} < \omega_{o2} < \dots$$

donde para cada frecuencia $\omega \in \mathbb{R}$ se denota:

$$\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$$

con $p(\omega) = \delta_e(-\omega^2)$, $q(\omega) = \omega\delta_o(-\omega^2)$. \square

Es decir, el criterio de estabilidad se basa en que las raíces de $\delta_e(s^2)$ y $\delta_o(s^2)$ deben cumplir con una propiedad de enlazamiento.

Por otro lado, en [3] se muestra que esto es equivalente a:

Teorema 2 (Generalización del teorema de H-B): Sea $\delta(s)$ un polinomio real de grado n como se definió anteriormente. Entonces, para que el polinomio sea estable, es necesario y suficiente que:

$$l(\delta) - r(\delta) = \sigma_i(\delta)$$

donde, la firma imaginaria σ_i de $\delta(s)$ está definida como:

$$\sigma_i(\delta) = \begin{cases} \operatorname{sgn} [p_f^{(k)}(\omega_0)] + 2 \sum_{r=1}^{m-1} (-1)^r \operatorname{sgn}(p_f(\omega_r)) \\ + (-1)^m \operatorname{sgn} [p_f(\omega_m)] \times (-1)^{m-1} \operatorname{sgn} [q(\infty)] \\ \text{si } n \text{ es par} \\ \operatorname{sgn} [p_f^k(\omega_0)] + 2 \sum_{r=1}^{m-1} (-1)^r \operatorname{sgn}(p_f(\omega_r)) \\ \times (-1)^{m-1} \operatorname{sgn} [q(\infty)] \\ \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$l(\cdot)$ es el número de raíces reales de (\cdot) en el lado izquierdo del plano complejo (LHP) y $r(\cdot)$ es el número de raíces reales de (\cdot) en el lado derecho del plano complejo (RHP). \square

Para aplicar estos resultados al caso de un controlador de tipo PID, considérese el sistema retroalimentado:

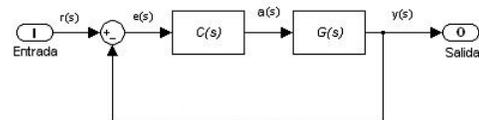


Figura 1. Sistema retroalimentado

donde:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (1)$$

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + sk_d = \frac{s^2 k_d + sk_p + k_i}{s} \quad (2)$$

$N(s)$ es de grado m y $D(s)$ es de grado p . El polinomio característico de lazo cerrado es:

$$\delta(s, k_p, k_i, k_d) = sD(s) + (k_i + k_p s + k_d s^2)N(s)$$

y $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ es de grado n . Multiplicando por el polinomio auxiliar $N^*(s)$ y desarrollando se obtiene:

$$\delta(j\omega, k_p, k_i, k_d)N^*(j\omega) = p(\omega, k_i, k_d) + jq(\omega, k_p) \quad (3)$$

donde:

$$N^*(s) := N(-s) = N_e(s^2) - sN_o(s^2)$$

$$p(\omega, k_i, k_d) = p_1(\omega) + (k_i - k_d \omega^2)p_2(\omega) \quad (4)$$

$$q(\omega, k_p) = q_1(\omega) + k_p q_2(\omega) \quad (5)$$

$$p_1(\omega) = -\omega^2(N_e(-\omega^2)D_o(-\omega^2) - D_e(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \quad (6)$$

$$p_2(\omega) = N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2) \quad (7)$$

$$q_1(\omega) = \omega(D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \quad (8)$$

$$q_2(\omega) = \omega(N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \quad (9)$$

Para una mejor presentación del resultado, se deben hacer las definiciones siguientes:

Definición 1: Para una k_p fija, sean $0 < \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{l-1}$ los ceros reales, finitos, distintos y no negativos de $q(\omega, k_p)$. Se define una secuencia de números $i_0, i_1, i_2, \dots, i_l$ tales que $i_t \in \{-1, 0, 1\}$. A partir de ellos se define A_{k_p} :

$$A_{k_p} = \begin{cases} \{\{i_0, i_1, i_2, \dots, i_l\}\} & \text{si } n+m \text{ es par} \\ \{\{i_0, i_1, i_2, \dots, i_{l-1}\}\} & \text{si } n+m \text{ es impar} \end{cases} \quad (10)$$

De las cadenas de números del conjunto A_{k_p} se seleccionan las cadenas que cumplen con la restricción

$$A(\gamma) = A(n - (l(N(s)) - r(N(s)))) \quad (11)$$

donde:

$$\gamma(\Gamma) := \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \{i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{l-1}2i_{l-1} + (-1)^l i_l\} \\ \times (-1)^{l-1} \text{sgn}[q(\infty, k_p)] \\ \text{para } m+n \text{ par} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \{i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{l-1}2i_{l-1}\} \\ \times (-1)^{l-1} \text{sgn}[q(\infty, k_p)] \\ \text{para } m+n \text{ impar} \end{array} \right. \end{cases}$$

Definición 2: El conjunto de cadenas en A_{k_p} que satisfacen la restricción anterior para una k_p dada, definen el conjunto de cadenas factibles:

$$F_{k_p}^* = A_{k_p}(n - (l(N(s)) - r(N(s)))) \quad (12)$$

Teorema 3: El problema de estabilización PID, con k_p fija, se puede resolver para una planta dada con función de transferencia $G(s)$ si y solo si, las siguientes condiciones se mantienen:

- $F_{k_p}^*$ no es un conjunto vacío.

- Existe al menos una cadena $\Gamma = \{i_0, i_1, \dots\} \in F_{k_p}^*$, y valores de k_i y k_d tales que $\forall t = 0, 1, 2, \dots$ para los cuales $N^*(j\omega) \neq 0$

$$p(\omega_t, k_i, k_d)i_t > 0 \quad (13)$$

□

Nótese que cada ecuación en (13) representa un semiplano en el espacio (k_i, k_d) por lo tanto, la solución será una intersección de semiplanos, lo cual implica que el resultado (si existe) es un conjunto convexo.

La ecuación (13) implica que para un valor determinado de k_p el correspondiente conjunto de valores (k_i, k_d) se obtiene al resolver un sistema de desigualdades lineales. En diversos artículos publicados (ver [1],[3],[4],[5]) se menciona que una manera de hallar la solución de dicho sistema consiste en aplicar técnicas de programación lineal, sin embargo en ningún caso se presenta un procedimiento sistemático para llevarlo a cabo.

Por lo tanto, en este trabajo se propone un procedimiento para determinar el conjunto convexo (k_i, k_d) en \mathbb{R}^2 reformulado como un problema de programación lineal.

III. ANTECEDENTES DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Un Programa Lineal (PL) es un problema de optimización en donde la función objetivo es lineal en las incógnitas, y las restricciones son igualdades y desigualdades lineales [6].

Independientemente de la forma que adopte, cualquier PL se puede llevar a la llamada *forma estándar*:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ \text{sueto a} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \\ \text{con} & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{array}$$

o en forma compacta:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^T x \\ \text{sujeta a} & Ax = b \quad x \geq 0 \end{array} \quad (14)$$

donde $c^T x$ es la función objetivo, o función a optimizar. Hay ciertos conceptos básicos que se deben tener en cuenta antes de continuar:

Definición 3 (Solución básica): Dado un conjunto de m ecuaciones lineales simultáneas con n incógnitas (14), sea P cualquier submatriz no singular de $m \times m$ formada por columnas de A . Entonces, si todas las $n - m$ componentes de x no asociadas con las columnas de P se igualan a cero, la solución resultante del conjunto de ecuaciones lineales se conoce como *solución básica* de (14) con respecto a la base P . Si además $x \geq 0$, entonces la solución se llama *solución básica factible*.

La importancia de la solución básica radica en su relación con el concepto de punto extremo en la teoría de conjuntos convexos. De acuerdo con [6]:

Definición 4 (Punto límite): Un punto x en un conjunto convexo C se llama *punto extremo*, si no existen otros dos puntos x_1 y x_2 en C tales que $x = x_1 \alpha + (1 - \alpha)x_2$ para cualquier α tal que $0 < \alpha < 1$.

La relación entre la solución básica factible y puntos extremos se establece mediante el siguiente teorema:

Teorema 4: Sea A una matriz de $m \times n$ de rango n y b un vector de dimensión m . Sea K un politopo formado por todos los vectores x de dimensión n que satisfacen:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Un vector x es un punto extremo de K si y solo si x es una solución básica factible de (15). \square

La demostración de este teorema se puede consultar en [6].

IV. BÚSQUEDA DE LA REGIÓN ID ESTABILIZANTE

Tomando en cuenta las definiciones y resultados anteriores, para el caso particular del sistema (13) se tiene:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & \omega_t^2 \\ k_i & k_d \end{bmatrix} \\ x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ b &= \begin{bmatrix} -\frac{p_1(\omega_t)}{p_2(\omega_t)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nótese que el sistema (13) no se encuentra en la forma estándar dado que las restricciones son exclusivamente desigualdades y además, el sentido de estas depende del valor de i_t .

Para llevarlo a dicha forma, se puede hacer uso de variables auxiliares (*slack variables*) de manera que el problema se transforma en:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{sujeto a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + y_m = b_m \\ \text{con} \quad & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\ \text{y} \quad & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_n \geq 0 \end{aligned}$$

o bien, en la forma compacta (14) con:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} A & I_{m \times m} \end{bmatrix} \\ \hat{x} &= \begin{bmatrix} k_i \\ k_d \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \\ b &= \begin{bmatrix} -\frac{p_1(\omega_t)}{p_2(\omega_t)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

En este caso las variables auxiliares representan un desplazamiento que se aplica sobre las rectas que definen los límites de la región convexa que es solución del problema de cálculo de controladores PID. Por lo tanto, cuando dicho desplazamiento es cero, se tiene la recta original que representa una de las orillas. (Figura 2)

Por el teorema 4 se sabe que los puntos extremos de la región convexa que es solución al problema de controladores PID se

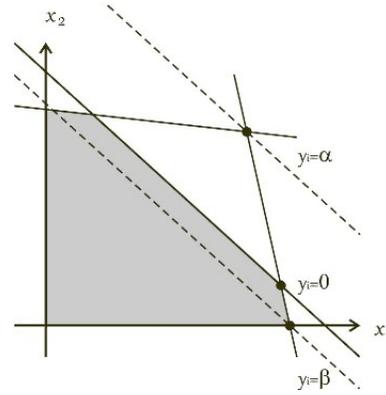


Figura 2. Desplazamiento a través de variables auxiliares

pueden hallar obteniendo las soluciones básicas factibles del sistema (16).

Nótese que si se obtiene una solución básica tomando cualesquiera dos de las variables $x_i = 0$ y $x_j = 0$, se obtendrá un punto donde todas las rectas se intersecan gracias al desplazamiento producido por las variables auxiliares, por lo tanto solo se debe probar si dicho punto satisface las restricciones dadas por las desigualdades y de ser así, el punto es un punto extremo.

Para hallar estos puntos, hemos utilizado la función `linprog` de MATLAB® dentro de un ciclo iterativo en el cual se cambia la pareja de variables $x_i = 0$ y $x_j = 0$ en cada paso.

Considérese la planta:

$$G(s) = \frac{\omega^3 + 2\omega^2 - \omega + 2}{\omega^6 + 9\omega^5 + 32\omega^4 + 26\omega^3 + 266\omega^2 + 90\omega - 4}$$

Utilizando las ecuaciones (6) a (9) se obtiene:

$$\begin{aligned} p_1(\omega) &= \omega^{10} - 13\omega^8 + 164\omega^6 + 502\omega^4 - 176\omega^2 \\ p_2(\omega) &= \omega^6 + 6\omega^4 - 7\omega^2 + 4 \\ q_1(\omega) &= -7\omega^9 - 49\omega^7 + 532\omega^5 - 614\omega^3 - 8\omega \\ q_2(\omega) &= \omega^7 + 6\omega^5 - 7\omega^3 + 4\omega \end{aligned}$$

de donde, para un valor de $k_p = 50$ los ceros reales no repetidos de $q(\omega, k_p)$ son:

$$\omega_0 = 0 \quad \omega_1 = 0.505 \quad \omega_2 = 0.954 \quad \omega_3 = 3.218$$

a partir de las definiciones 1 y 2 y considerando que $m + n$ es par ($\omega_4 = \infty$) se tiene:

$$F_{k_p} = \{ 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \}$$

Dado que solo hay una cadena de valores en F_{k_p} , si existe, solo habrá una combinación posible de desigualdades para este valor de k_p tal que las correspondientes parejas (k_i, k_d) existen también.

De acuerdo con el teorema 3, el sistema de desigualdades (13) es:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -0.2555 \\ -1 & 0.9106 \\ 1 & -10.3585 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_i \\ k_d \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ 3.6325 \\ 110.6962 \\ -120.8887 \end{bmatrix}$$

Nótese que para $\omega_4 = \infty$ la desigualdad se puede escribir como:

$$i_t k_d < \left(\frac{p_1(\omega_t)}{p_2(\omega_t)\omega_t^2} + \frac{k_i}{\omega_t^2} \right) i_t$$

Tomando el límite cuando $\omega \rightarrow \infty$ del lado derecho de la desigualdad se observa que el término $k_i/\omega_t^2 \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow \infty$. En cambio el término $p_1(\omega_t)/(p_2(\omega_t)\omega_t^2)$ arroja una indeterminación de tipo ∞/∞ que se puede intentar resolver utilizando la regla de L'Hôpital, sin embargo dado que el grado de $p_1(\omega)$ es mayor que el grado de $p_2(\omega)$, el límite de la expresión tiende a ∞ cuando $\omega \rightarrow \infty$.

En este caso $i_4 = 1$, por lo que la desigualdad se puede interpretar como:

$$k_d < \infty$$

y por lo tanto, se puede ignorar como restricción.

Al llevar el sistema a la forma estándar se tiene:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0.2555 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0.9106 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -10.358 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} k_i \\ k_d \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.6325 \\ 110.6962 \\ -120.8887 \end{bmatrix}$$

Para hallar los puntos extremos correspondientes, se utilizará la función `linprog` cuyos datos de entrada son A , b , \hat{A} y f , donde f es la función a optimizar. En este caso se utilizará $f = 2k_i + k_d$. Además, como se mencionó, se deben buscar los puntos donde al menos dos de las variables sean iguales a cero, por lo cual se debe agregar a \hat{A} un par de renglones que representen $x_i = 0$ y $x_j = 0$ con $i = 0, 1, 2, 3$ y $j = 0, 1, 2, 3; i \neq j$.

De esta manera, en cada ciclo donde la función `linprog` converge y devuelve un vector x , solo se deben considerar las dos primeras componentes.

Una vez que se han probado todas las combinaciones donde dos variables $x_i = 0$ y $x_j = 0$, se tendrá el conjunto de puntos extremos de la región ID .

Finalmente, para dibujar la región, se utiliza la función `convhull`, cuyos argumentos de entrada son los puntos que se hallaron en el paso anterior, y la salida serán los índices de los puntos que definen la región convexa.

Para este ejemplo en particular y para el valor de $k_p = 50$ la región (k_i, k_d) se muestra en la Figura 3. Haciendo un barrido sobre distintos valores de k_p se obtiene la región (k_p, k_i, k_d) según se muestra en la Figura 4.

V. CONCLUSIONES

Se ha mostrado en este trabajo una manera de resolver un sistema de desigualdades lineales como parte de un algoritmo para el diseño de controladores PID estabilizantes. Esta implementación hace uso de las funciones `linprog` y `convhull` de MATLAB®.

Actualmente se ha desarrollado en el Instituto de Ingeniería de la

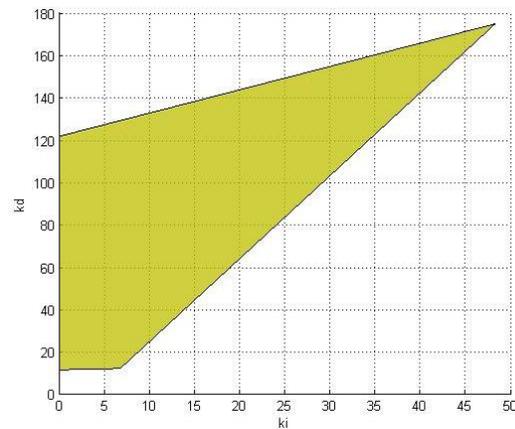


Figura 3. Región de controladores ID estabilizantes para $k_p = 50$

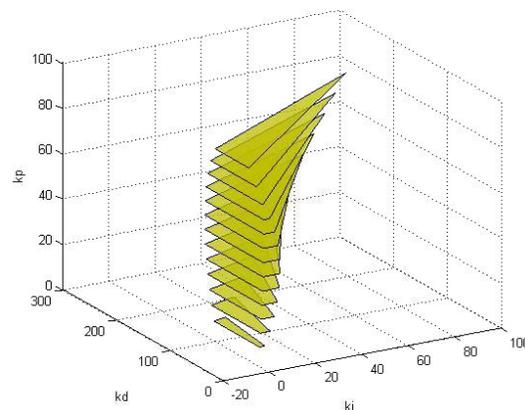


Figura 4. Región de controladores PID estabilizantes para $k_p = 50$

UNAM una implementación en MATLAB® del método para el cálculo de controladores PID estabilizantes que se mostró anteriormente.

Una de las ventajas de esta implementación, aunque no se muestra explícitamente, es en el momento de dibujar superficies abiertas donde los valores de los parámetros k_i y k_d pueden crecer indefinidamente en cierta dirección, ya que las cotas se pueden expresar como una restricción más e integrarse en el algoritmo de manera sencilla.

REFERENCIAS

- [1] S. P. Bhattacharyya and L. H. Keel. Controller synthesis free of analytical models: Three term controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(6), July 2008.
- [2] G.B. Dantzig and M.N. Thapa. *Linear programming: theory and extension*. Springer Verlag, 2003.
- [3] A. Datta, M.T. Ho, and S.P. Bhattacharyya. *Structure and synthesis of PID controllers*. Springer Verlag, 2000.
- [4] M.T. Ho, A. Datta, and SP Bhattacharyya. A linear programming characterization of all stabilizing pid controllers. In *American Control Conference, 1997. Proceedings of the 1997*, volume 6, pages 3922–3928. IEEE, 1997.
- [5] K. Kim and Y.C. Kim. The complete set of pid controllers with guaranteed gain and phase margins. In *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on*, pages 6533–6538. IEEE, 2005.
- [6] David G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison Wesley, 1984.