

Control de Sincronización de un Robot Diferencial: Aplicación de Doble Acción Integral

Alba Aracely De León Aguirre, América Morales Díaz, Ismael López Juárez
CINVESTAV del I.P.N unidad Saltillo, Grupo de Robótica y Manufactura Avanzada,
Carr. Saltillo-Monterrey Km. 13.5 en Ramos Arizpe Coah. C.P 5900
deleon.alba@gmail.com
Tel.: +52 844 4 38 9600 ext. 9659

Resumen—En este artículo se propone un control de sincronización para un robot móvil diferencial utilizando una doble acción integral. El objetivo del control de sincronización está basado en controlar la posición angular de cada rueda de acuerdo a la trayectoria deseada y al mismo tiempo el error diferencial entre la posición angular de las ruedas. De esta manera se garantiza que el robot móvil siga la trayectoria deseada con la orientación apropiada. El controlador se basa en retroalimentación de posición y velocidad angular de las ruedas utilizando también una doble acción integral en el error de seguimiento. El controlador solamente requiere la medición de la posición angular de las ruedas.

Palabras clave: Control de sincronización, PI2D, Robot Móvil diferencial.

I. INTRODUCCIÓN

Los robots móviles son dispositivos de transporte automático, es decir, una plataforma mecánica dotada de un sistema de locomoción capaz de navegar a través de un determinado ambiente de trabajo, compuesta de cierto nivel de autonomía para su desplazamiento portando cargas. Sus aplicaciones pueden ser muy variadas y siempre están relacionadas con tareas que normalmente son riesgosas o nocivas para la salud humana, en áreas como la agricultura, en el transporte de cargas peligrosas o en tareas de exploración solitarias o cooperativas junto a otros vehículos no tripulados.

Cuando se transportan objetos grandes y/o pesados el uso de un sólo móvil no es suficiente, en dichas situaciones se considera un set de dos o más. Los sistemas de robots móviles normalmente trabajan de manera sincrona para ejecutar una tarea (Siméon et al., 2002)(Sugar y Kumar, 2002)

La sincronización puede ser definida como la mutua conformidad de procesos o sistemas con respecto al tiempo. La conformidad puede ser caracterizada por la aparición de ciertas relaciones de funcionales de los procesos. Existen dos esquemas básicos de sincronización, esquema de coordinación y esquemas de cooperación debido a que ambas tareas no pueden ser alcanzadas por un solo sistema. (Alejandro Rodríguez Angeles, 2002).

El control de sincronización puede ser aplicado para resolver el problema de deriva que presentan los robots móviles diferenciales ya que éstos son sistemas subactuados al poseer tres grados de libertad de movimiento. En seguimiento de trayectorias dicho control considera que el ángulo de inicio es afectado por el error existente entre las coordenadas de las dos ruedas motrices.

El presente trabajo se basa en regular, mediante dos entradas de control, las coordenadas de la rueda así como el error de sincronización entre ellas y se añade una doble acción integral sobre el error de sincronización. Además se considera que únicamente se mide la posición k entonces los valores de velocidad y aceleración angular son estimados, por lo que sólo se requiere conocer el valor de la posición angular.

Este artículo está organizado como sigue: En la sección 2 se muestran los modelos cinemáticos y dinámicos de un robot móvil diferencial. El control de sincronización se presenta en la sección 3, mientras que las simulaciones se pueden revisar en la sección 4. En la sección final se encuentran las conclusiones y trabajo futuro.

II. MODELADO MATEMÁTICO DE MOVIMIENTO DIFERENCIAL

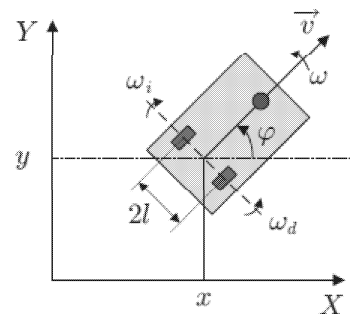


Figura 1. Robot móvil

El robot móvil bajo estudio es un vehículo que tiene dos llantas traseras idénticas, izquierda y derecha, que son paralelas entre sí, no deformables y unidas por un eje. Además usa una rueda frontal omnidireccional que asegura que la plataforma del robot se encuentre sobre un plano. En la figura 1 podemos observar el esquema general del robot móvil.

Para definir la configuración del robot móvil, son necesarias 3 coordenadas generalizadas, 2 de posición (desplazamiento del vehículo en X y en Y) y una de orientación (rotación en el eje z del marco no inercial asignado al robot móvil). Donde el ángulo θ se define como el ángulo de rotación. La variación de este ángulo es controlada por la relación de velocidades entre las dos llantas y el valor del radio de cada una de ellas. Las relaciones de variación de cada coordenada del robot móvil, se expresan a continuación en función de las velocidades angulares ω_d y ω_i de las ruedas derecha e izquierda respectivamente.

$$\dot{x} = \cos\theta \frac{rw_d + rw_i}{2} \quad (1)$$

$$\dot{y} = \sin\theta \frac{rw_d + rw_i}{2} \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = \frac{rw_d - rw_i}{b} \quad (3)$$

Las dos primeras velocidades se deducen fácilmente contemplando el único desplazamiento admisible en un infinitésimo de tiempo. Podemos definir la velocidad angular del móvil, analizando vectorialmente las velocidades lineales en los puntos de contacto de cada rueda, donde sólo la diferencia de velocidades originará una velocidad angular en el eje de pivoteo, tomando en cuenta la restricción de posición entre las dos llantas.

La condición de no deslizamiento en las ruedas impone la siguiente restricción no holónoma:

$$\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta = 0 \quad (4)$$

De forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ \omega_c \end{pmatrix} \quad (5)$$

Donde:

$$V_x = \frac{rw_d + rw_i}{2} \quad (6)$$

$$\omega = \frac{rw_d - rw_i}{b} \quad (7)$$

Y su matriz de transformación :

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & -R \\ \sin\theta & \cos\theta & R \end{pmatrix} \quad (8)$$

Para la obtención del modelo dinámico de las ruedas se considera la formulación Euler-Lagrange:

$$H_i(\phi_i)\ddot{\phi}_i + C_i(\phi_i, \dot{\phi}_i)\dot{\phi}_i + F_i(\phi_i, \dot{\phi}_i) = \tau_i \quad (9)$$

Donde el Lagrangiano se define como la suma de la energía cinética y la energía potencial

$$L = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x)^2 + I_{zz}\omega_c^2 \quad (10)$$

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{V_1 + V_2}{2}\right)^2 + I_{zz}\left(\frac{-V_1 + V_2}{2R}\right)^2 \quad (11)$$

Al hacer cambio a variables articulares considerando: $v_1 = rw\dot{\phi}_1$ y $v_2 = rw\dot{\phi}_2$ y sus derivadas $\dot{v}_1 = rw\ddot{\phi}_1$ y $\dot{v}_2 = rw\ddot{\phi}_2$ se encuentran las siguientes relaciones

$$\left(\frac{1}{4}m + \frac{I_{zz}}{4R^2}\right)rw\ddot{\phi}_1 + \left(\frac{1}{4}m - \frac{I_{zz}}{4R^2}\right)rw\ddot{\phi}_1 = \tau_1 \quad (12)$$

$$\left(\frac{1}{4}m - \frac{I_{zz}}{4R^2}\right)rw\ddot{\phi}_2 + \left(\frac{1}{4}m + \frac{I_{zz}}{4R^2}\right)rw\ddot{\phi}_2 = \tau_2 \quad (13)$$

Las cuales pueden ser agrupadas de forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} \frac{rw}{4}\left(m + \frac{I_{zz}}{R^2}\right) & \frac{rw}{4}\left(m - \frac{I_{zz}}{R^2}\right) \\ \frac{rw}{4}\left(m - \frac{I_{zz}}{R^2}\right) & \frac{rw}{4}\left(m + \frac{I_{zz}}{R^2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Donde m es la masa del robot, I_{zz} es el tensor de inercia en Z, R es la distancia de la rueda al centro de masa del robot, τ_1 y τ_2 son las entradas de control a nivel rueda.

La velocidad angular del robot móvil diferencial $\dot{\phi}(t)$ es dada por:

$$\dot{\phi}(t) = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{2R} = \frac{rw}{2R}(\dot{\phi}_1(t) - \dot{\phi}_2(t)) \quad (15)$$

La orientación del móvil puede determinarse a partir de la ecuación 14.

$$\phi(t) = \int_0^t \dot{\phi}(\omega)d\omega = \phi_c(\phi_1(t) - \phi_2(t)) \quad (16)$$

II-A. Modelado Matemático considerando fricción

Considerando que la inercia a vencer entre el robot y la superficie de contacto es tomada en cuenta, existen diversos modelos de fricción. La fricción de Coulomb es una fuerza que tiene amplitud constante con respecto al cambio de velocidad, pero el signo de la fuerza de fricción cambia al invertir la dirección de velocidad, ésta se muestra a continuación. (Hernández et al., 2011)

$$f = F_N f_c \text{sign}(v), \quad v \neq 0 \quad (17)$$

III. CONTROL DE SINCRONIZACIÓN

Sea $q_d(t) = [x_{cd}(t); y_{cd}(t); \theta_d(t)]$ la configuración deseada del robot móvil, se mapa como:

$q_d(t) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \begin{bmatrix} \phi_{d1}(t) \\ \phi_{d2}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, éste se define de manera única, sin embargo esto no implica que se llegue a la configuración cinemática deseada. Lo anterior representa el problema de deriva en el seguimiento de trayectorias del robot móvil, para resolver este problema, se puede utilizar el control de sincronización de las dos ruedas.

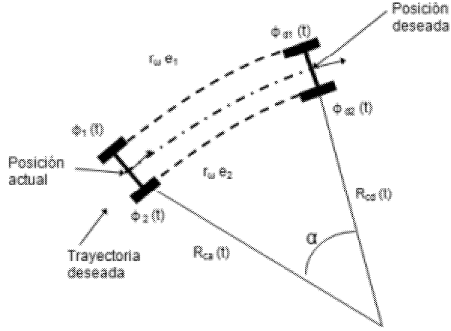


Figura 2. Trayectoria Deseada

El objetivo del control de sincronización es regular que el ángulo de posición entre las dos ruedas ϕ_1 , ϕ_2 alcancen sus valores deseados ϕ_{d1} , ϕ_{d2} y la diferencia del error de seguimiento entre la trayectoria de cada rueda a la deseada, deben ser cero. La figura 2 muestra las dos ruedas motrices del robot en una trayectoria curva deseada en el instante de tiempo t . El desplazamiento angular de las ruedas es denotado por, ϕ_{d1} y ϕ_{d2} , y el desplazamiento angular actual ϕ_1 y ϕ_2 .

El error seguimiento se define como:

$$e_i = \phi_i(t) - \phi_{di}(t) \quad (18)$$

Considerando que la trayectoria deseada es suave y continua y el radio de curvatura no varía significativamente, se debe cumplir una relación cinemática, dada por:

$$\frac{r_w e_1(t)}{R_c(t) \pm R} = \frac{r_w e_2(t)}{R_c(t) \pm R} \quad (19)$$

Esto debido a que la trayectoria considera:

- La diferencia de los radios de curvatura $R_{ca}(t)$ y $R_{cd}(t)$ es suficientemente pequeño para ser despreciado, por decir:
 $R_{ca}(t) \approx R_{cd}(t) = R_c(t)$
- El radio de curvatura $R_c(t)$ es tal que $R_c(t) > R$ y al menos dos veces diferenciable.

Para una trayectoria circular el radio de curvatura se mantiene constante. Cuando el radio de curvatura varía a lo largo de la trayectoria lo anterior se cumple si $e_1(t)$ y e_2 son suficientemente pequeñas. La línea recta como trayectoria deseada es un caso especial, en el que el radio de curvatura es infinitamente grande. (Nijmeijer y Rodríguez-Ángeles, 2006)

Se puede ver en la figura 2 que cuando el robot sigue una trayectoria deseada, ésta debe cumplir una relación cinemática, la cual está dada por:

$$\frac{r_w e_1(t)}{R_c(t) \pm R} = \frac{r_w e_2(t)}{R_c(t) \mp R} = \infty \quad (20)$$

Bajo la condición de que el error inicial de la configuración del robot es cero se tiene que con la ecuación 19 se asegura que el robot mantiene la trayectoria deseada, la cual se puede volver a escribir como:

$$c_1(t)e_1(t) + c_2(t)e_2(t) = 0 \quad (21)$$

Donde $c_1(t)$ y $c_2(t)$ denotan a los parámetros de acoplamiento:

$$c_1(t) = \frac{R_c}{R_c(t) \pm R}; \quad c_2(t) = \frac{R_c}{R_c(t) \mp R} \quad (22)$$

Usando la ecuación 20 se define el error de sincronización (ϵ) entre las dos ruedas:

$$\epsilon(t) = c_1 e_1(t) + c_2 e_2(t) \quad (23)$$

Bajo el enfoque de sincronización el objetivo del control en el espacio cartesiano está dado por :

$$\Delta q(t) = [x_c - x_{dc}, \quad y_c - y_{dc}, \quad \theta - \theta_d] \rightarrow 0 \quad (24)$$

Que en el espacio de rueda es equivalente a:

$$[e_1(t) \quad e_2(t) \quad \epsilon(t)] \rightarrow 0 \quad (25)$$

La convergencia de los errores en el espacio de rueda y bajo la premisa de que $e_i(0), \epsilon(0) = 0$, garantiza el seguimiento de la trayectoria cinemática 24.

Por lo tanto las propiedades de convergencia del sistema en lazo cerrado, dependerán del desempeño del controlador y la configuración inicial del robot, así la convergencia local y estabilidad pueden ser obtenidas.

Suposición 1. El objetivo de emplear la ecuación 25 es evitar la restricción no holonómica en el diseño del control, y por lo tanto es posible diseñar un controlador con retroalimentación continua para así lograr el seguimiento de una trayectoria deseada.

Suposición 2. Cuando el radio de curvatura varía a lo largo de la trayectoria se presenta un error de cálculo al

obtener $c_i(t)$ dada por la ecuación 23. Esto se debe a la diferencia entre $R_{ca}(t)$ y $R_{cd}(t)$. Este cálculo afecta evidentemente el desempeño del movimiento del robot a medida que cambia el radio de curvatura a lo largo de la trayectoria deseada. Reducir el cálculo de los errores $e_1(t)$ y $e_2(t)$ es la estrategia de control de sincronización propuesta y debe de garantizar una convergencia de $e_i(t) \rightarrow 0$.

En esta sección se propone un control que complemente el objetivo de sincronización para el robot móvil diferencial, en la cual se toman las siguientes suposiciones

Suposición 3. Solamente son medidas las posiciones angulares de las ruedas motrices del robot móvil diferencial.

Suposición 4. La trayectoria deseada $q_d(t)$ es suave, continua y por lo menos dos veces diferenciable.

Suposición 5. Los errores de seguimiento $e_1 = \phi_i - \phi_{di}$ y el error del ángulo de partida $\theta - \theta_d$ en $t = 0$ son cercanos a cero.

La Suposición 5 implica que el robot móvil diferencial está cerca de la trayectoria deseada y con la orientación aproximada adecuada, como condición inicial. Se garantiza la convergencia de la posición cartesiana del robot móvil a su trayectoria deseada, al mismo tiempo que las coordenadas de rueda y el ángulo de partida convergen a sus valores deseados.

El controlador usado para las ruedas motrices en este caso es un tipo PD con la retroalimentación del error de sincronización y su derivada, y la doble integración definida en los errores de seguimiento a nivel posición y velocidad de rueda. Con este control se garantiza que el error de seguimiento converja asintóticamente a cero .

Para este caso de estudio la ley de control que se emplea es:

$$\tau_i = H_i(\phi_i)\ddot{\phi}_{ri} + F_i(\phi_i, \dot{\phi}_i) - K_{d,i}\dot{s}_i - K_{p,i}s_i - k_{i,i}e_3 \quad (26)$$

$$s_i = \phi_i - \phi_{ri}, \dot{s}_i = \dot{\phi}_i - \dot{\phi}_{ri} \quad (27)$$

$$e_3 = \epsilon + \dot{\epsilon} \quad (28)$$

Donde $K_{d,i}$, $K_{p,i}$ y son ganancias positivas que se eligen de forma que el sistema a lazo cerrado que conforma la matriz (A-BK) sea Hurwitz, esto garantiza, que los errores de seguimiento y de sincronización convergen asintóticamente a cero (Morales Díaz y Rodríguez Ángeles, 2011). Mientras s_i y \dot{s}_i son errores de sincronización que se definen a continuación:

y $\ddot{\phi}_{r,i}$, $\dot{\phi}_{ri}$ y $\ddot{\phi}_{ri}$, son variables de referencia nominal basadas en las trayectorias deseadas $\phi_{d,i}$:

$$\phi_{ri} = \phi_{di} + \beta_i \int_0^t \epsilon(\omega) d\omega \quad (29)$$

$$\dot{\phi}_{ri} = \dot{\phi}_{di} + \beta_i \epsilon, \quad (30)$$

$$\ddot{\phi}_{ri} = \ddot{\phi}_{di} + \beta_i \dot{\epsilon} \quad (31)$$

IV. SIMULACIONES

Cuando las fuerzas centrífugas no son consideradas el modelo dinámico del móvil se expresa por:

$$H_i\ddot{\phi} + F_i = \tau_i \quad (32)$$

Los parametros del móvil diferencial se escogieron de manera arbitraria para fines de simulación de manera similar a los elegidos en (Nijmeijer y Rodríguez-Ángeles, 2006). Dichos parámetros son: radio de las ruedas $r_w = 0,04[m]$, la separación entre ruedas $2R = 0,29[m]$, y los valores inerciales $H1 = 0,50$ y $H2 = 0,52[kg*m^2]$. Las ganancias en el control son iguales para ambas ruedas $K_p = 1000$ y $k_d = 100$. En los errores de seguimiento se utiliza una ganancia integral con valor de 5.

Para el caso del PID condicional estudiado en (Seshagiri y Khalil, 2004), donde el control por modo deslizante se reduce a la ponderación de una ganancia proporcional en la acción integral cuando la superficie deslizante deja de estar activa. $K_p = 1000$, $k_d = 100$. y $k_i = ,1$

La trayectoria en términos de la posición angular está dada por:

$$\phi_{d1}(t) = (0,3571t^2 - 0,0119t^3) \frac{R_c + R}{R} \quad (33)$$

$$\phi_{d2}(t) = (0,3571t^2 - 0,0119t^3) \frac{R_c - R}{R} \quad (34)$$

cuyo radio de curvatura $R_c = 0,2[m]$

Las condiciones iniciales de posición de las ruedas son: $\phi_1 = 0,2$ y $\phi_2 = 0,1[rad]$ respectivamente.

El robot móvil será puesto a prueba en una superficie de cemento cuyo coeficiente de fricción es 0,8.

En la figura 3 se muestra el error de seguimiento del ángulo de rueda $e_i = \phi_i - \phi_{di}$, mientras que en la figura 4 el error de sincronización $\epsilon = c_1e_1 + c_2e_2$. Y se observa que ambos convergen a cero, por lo que el objetivo de control que consiste en que el robot móvil siga una trayectoria deseada y éste es alcanzado.

En las figuras 5 y 6 se muestra la respuesta del sistema en comparación de la posición y velocidad deseada respectivamente. En la imagen ella se puede apreciar que el control PD tiene sobreamortiguamiento mientras que el

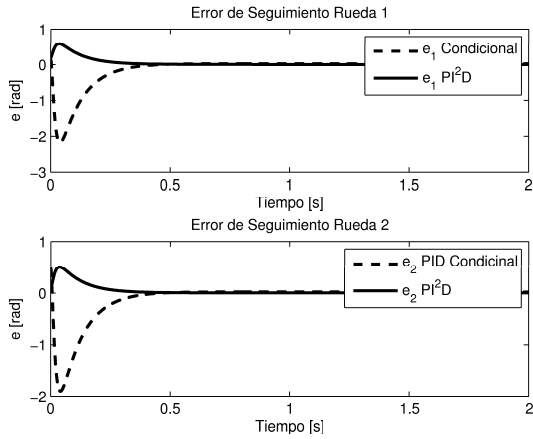


Figura 3. Error de seguimiento

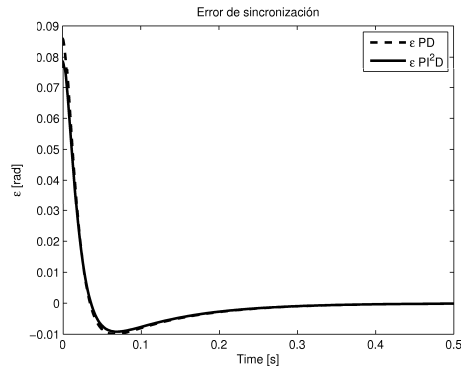


Figura 4. Error de sincronización

PI^2D converge sin oscilaciones.

Cuando se estudia el comportamiento del control puede notarse que el esfuerzo requerido por el control PI^2D es menor en comparación del PID Condicional y el PD. Dicho fenómeno puede ser observado en la figura 7.

V. CONCLUSIONES

Se ha propuesto y probado un control de sincronización con doble acción integral para un robot móvil diferencial. El modo de control Integral tiene como propósito disminuir y eliminar el error en estado estacionario, provocado por el modo proporcional. Considerando condiciones iniciales cercanas a cero el control propuesto ha mostrado mejor desempeño y propiedades de convergencia respecto a los demás, en él se garantiza estabilidad y seguimiento a la trayectoria deseada. Como trabajo futuro se encuentra la implementación y el uso de un sistema de visión para calcular posición del móvil.

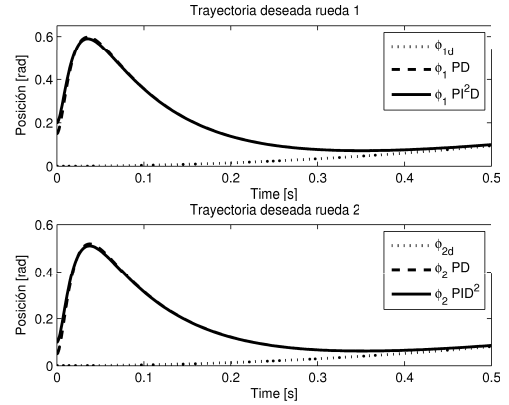


Figura 5. Trayectoria d

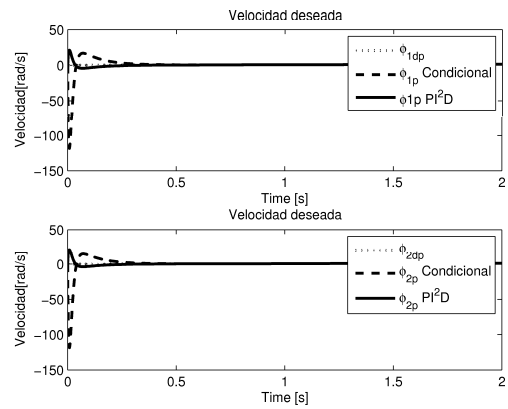


Figura 6. Velocidad de respuesta

VI. AGRADECIMIENTOS

El primer autor desea agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca para realizar estudios de maestría.

REFERENCIAS

- Alejandro Rodríguez Angeles *Synchronization of Mechanical Systems Ph Thesis*, Technische Universiteit Eindhoven, (2002)
- América Morales Díaz y Alejandro Rodríguez Ángeles *A PI2D feedback control type for second order systems* PID Control, Editorial Board ISBN 978-953-307-267-8, (2011)
- Siméon, T., S. Leroy and J.-P. Laumond (2002). *Path coordination for multiple mobile robots: a resolution-complete algorithm*. IEEE Transactions on Robotics and Automation 18, 42-49.
- Sugar, T.G. and V. Kumar (2002). *Control of cooperating mobile manipulators*. IEEE Transactions on Robotics and Automation 18, 94-103.
- Henk Nijmeijer and Alejandro Rodríguez Ángeles, *Control Synchronization of Differential Mobile Robots*, Springer, (2006)
- Sridhar Seshagiri, Hassan K. Khalil *Robust output feedback regulation of minimum-phase nonlinear systems using conditional integrators*, Automatica, (August 2004)
- Rogelio Hernández Suárez, América Morales Díaz, Norberto Flores Guzman, Eliseo Hernández Martínez and Héctor Puebla *High Order Sliding Mode Control for Suppression of Nonlinear Dynamics in Mechanical Systems with Friction* Sliding Mode Control ISBN 978-953-307-162-6 (2011)

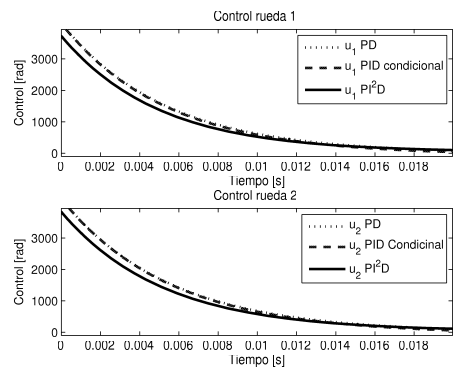


Figura 7. Desempeño del control: PID vs PI²D