

Sincronización Robusta de Arreglos de Sistemas Mecánicos de 1GDL Basada en Observadores

Ervin Álvarez*, Joaquín Álvarez*, David Rosas**

*Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada
Depto. de Electronica y Telecomunicaciones
Km. 107 Carr. Tijuana-Ensenada, Ensenada, B.C.
{jgalvar, ejalvare}@cicese.mx

**Universidad Autónoma de Baja California
Facultad de Ingeniería, Mexicali
Blvd. Benito Juárez S/N, Mexicali, B.C., drosas@uabc.mx

Resumen—Se presenta una técnica para sincronizar una clase de arreglos de sistemas mecánicos. Sus principales características son: no necesita una matriz de conectividad simétrica, los mecanismos pueden ser diferentes e inciertos, sólo se necesita medición de la posición y muestra buenas propiedades de robustez. La técnica se basa en generación de funcionales definidas a partir de las conexiones en el arreglo, si la matriz de conectividad es invertible, entonces se garantiza la existencia de señales de acoplamiento que producen la sincronización. Las señales de acoplamiento se basan en observadores discontinuos que estiman las velocidades y los términos necesarios para alcanzar el estado de sincronización en el arreglo. Se presentan resultados numéricos y experimentales que ilustran el desempeño de la técnica de sincronización.

Palabras clave: Sincronización de arreglos, sistemas mecánicos, robustez

I. Introducción

En los últimos años se han propuesto diferentes técnicas de sincronización bajo el esquema de interconexión llamado maestro-esclavo. Algunas de ellas se basan en técnicas de control clásico como retroalimentación lineal de estados (Sarasola, et. al., 2003), modos deslizantes (Tao y Hui, 2002) y sincronización basada en observadores (Fradkov, et. al., 2000). Estas técnicas se aplican, en su mayoría, en la sincronización de sistemas caóticos.

Un campo importante de investigación es la sincronización de mecanismos. En los procesos de manufactura actuales hay tareas que no pueden ser realizadas por un solo mecanismo, sino que dos o más sistemas deben de trabajar en forma sincronizada para hacer una tarea común. Algunos trabajos importantes en este tema son (Angeles y Nijmeijer, 2004), (Dong y Mills, 2002) y (Hernández, et. al., 2007).

En (Angeles y Nijmeijer, 2004) se presenta una técnica de sincronización para arreglos de sistemas mecánicos con medición parcial del estado, con modelos idénticos y sin perturbaciones. El problema de incertidumbres peramétricas es abordado en (Dong

y Mills, 2002), donde se propone un control adaptivo para sincronizar dos mecanismos con restricciones cinemáticas bajo una conexión bidireccional. Aquí se asume medición completa del vector de estado y mecanismos con la misma estructura.

En (Hernández, et. al., 2007) se presenta una técnica de sincronización que considera incertidumbres paramétricas, perturbaciones externas y medición parcial del estado. Esta técnica se basa en un observador discontinuo que presenta un modo deslizante de orden dos el cual, con la ayuda de un filtro pasa bajas, estima las perturbaciones en la planta. Estas perturbaciones estimadas son incluidas en las señales de acoplamiento para compensar las perturbaciones reales. Sin embargo, la sintonización del filtro para minimizar los retardos generados en la señal estimada no está del todo bien definida.

En este trabajo se presenta una modificación a la técnica presentada en (Hernández, et. al., 2007). Se incorpora un observador que estima las velocidades y las perturbaciones en cada uno de los nodos del arreglo sin el uso de un filtro adicional, de esta forma se evitan los retardos en la estimación de las perturbaciones y se mejora la robustez en el sistema en lazo cerrado utilizando señales de acoplamiento suaves. Otra mejora importante es que la técnica puede ser aplicada a una clase de sistemas más amplia, por ejemplo a sistemas que puedan ser llevados a una forma normal, en donde se incluyen a los sistemas con estructura lagrangiana.

II. Definiciones preliminares

A. Definición de los sistemas que forman el arreglo

Considere k sistemas mecánicos de un grado de libertad (1GDL), llamados nodos, descritos por la ecuación

$$M_i \ddot{q}_i + G_i(q_i) - \gamma_i(t, q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i) = \tau_i + v_i, \quad (1)$$

para $i = 1, \dots, k$, donde $q_i \in \mathcal{R}$ es la posición, M_i es la constante de inercia, $G_i(q_i)$ es el término de pares gravitacionales, τ_i en una entrada de control que produce un

comportamiento autónomo en el nodo i , v_i es una señal de acoplamiento, y $\gamma_i(t, q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i)$ es un término que incluye perturbaciones externas, términos generados por variaciones paramétricas y también incluye la fricción.

Se considera que el comportamiento del sistema (1) es acotado para $v_i = 0$ y τ_i ; es decir, q_i , \dot{q}_i y \ddot{q}_i son acotadas. Como consecuencia, se asume que el término $\gamma_i(t, q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i)$ es acotado en amplitud y velocidad.

La representación en el espacio de estado del sistema (1) es la siguiente

$$\begin{aligned} \Sigma_i &: \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ f_i(\cdot) + \lambda_i v_i \end{bmatrix}, \\ y_i &= q_i, \end{aligned} \quad (2)$$

para $i = 1, \dots, k$, donde

$$\begin{aligned} f_i(\cdot) &= M_i^{-1} (-G_i(q_i) + \gamma_i(t, q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i) + \tau_i), \\ \lambda_i &= M_i^{-1}. \end{aligned}$$

B. Definición de sincronización

Considere k funcionales $\epsilon_i : Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_k \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, donde Y_i son los conjuntos de todas las funciones de salida.

Definición 1: Se dice que las salidas $y_1(t), \dots, y_k(t)$ de los sistemas $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k, \Sigma_r$ con condiciones iniciales $(q_1(0), \dot{q}_1(0))^T, \dots, (q_k(0), \dot{q}_k(0))^T$ se sincroniza en forma asintótica con respecto a las funcionales $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon_i(y_i(t), \dots, y_k(t)) = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (3)$$

C. Gráficas de conexión

Una gráfica de conexión describe la presencia o ausencia de acoplamiento entre los nodos que forman el arreglo y, al mismo tiempo, la dirección del flujo de información a través de estos acoplamientos.

Considere la gráfica de conexión que se muestra en la figura 1. Los círculos representan los nodos Σ_i y las líneas representan los acoplamientos entre los nodos. Estas líneas tienen una dirección en particular, lo que define el flujo de información.

El significado de las líneas de acoplamiento es la disponibilidad de información; una línea que sale del sistema Σ_i y entra al sistema Σ_j indica que el nodo j tiene acceso al estado q_i del nodo i

III. Definición del problema de sincronización

Basados en la definición 1, el problema de sincronización se define como diseñar las señales de acoplamiento v_i tal que los sistemas que forman el arreglo se sincronicen en forma asintótica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|q_i(t) - q_j(t)\| = 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, k\}, \quad i \neq j. \quad (4)$$

Para resolver este problema se definen las variables de error entre los nodos como

$$e_{i,j} = q_i - q_j, \quad i \neq j, \quad (5)$$

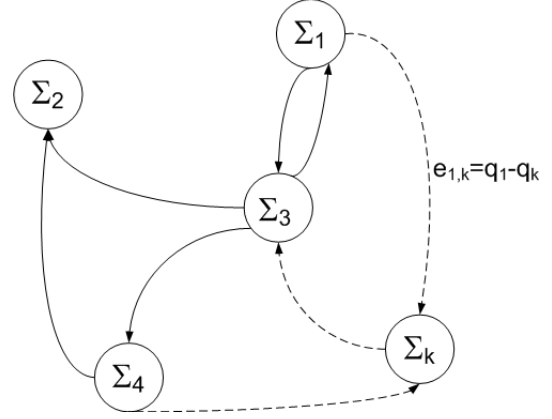


Figura 1. Ejemplo de gráfica de conexión.

para $i, j = 1, \dots, k$.

La ecuación (5) define $k(k-1)$ errores independientes cuya dinámica se debe estabilizar en forma asintótica en el origen utilizando sólo k señales de control.

Para facilitar la solución de este problema se define un conjunto de funcionales $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \beta_{1,2}e_{1,2} + \dots + \beta_{1,j}e_{1,j} + \dots + \beta_{1,k}e_{1,k}, \\ \epsilon_2 &= \beta_{2,1}e_{2,1} + \dots + \beta_{2,j}e_{2,j} + \dots + \beta_{2,k}e_{2,k}, \\ &\vdots \\ \epsilon_i &= \beta_{i,1}e_{i,1} + \dots + \beta_{i,j}e_{i,j} + \dots + \beta_{i,k}e_{i,k}, \quad i \neq j, \\ &\vdots \\ \epsilon_k &= \beta_{k,1}e_{k,1} + \dots + \beta_{k,j}e_{k,j} + \dots + \beta_{k,k-1}e_{k,k-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

donde $\beta_{i,j}$ es una constante positiva, que puede interpretarse como una fuerza de acoplamiento. Reescribiendo la ecuación anterior en forma matricial y en términos de q_i se tiene

$$\epsilon = \Theta q, \quad (7)$$

donde

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_k \end{bmatrix}^T, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \sum_{j=2}^k \beta_{1,j} & -\beta_{1,2} & \dots & -\beta_{1,k} \\ -\beta_{2,1} & \sum_{j=1, j \neq 2}^k \beta_{2,j} & \dots & -\beta_{2,k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\beta_{k,1} & -\beta_{k,2} & \dots & \sum_{j=1, j \neq k}^k \beta_{k,j} \end{bmatrix},$$

$$q = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_k]^T$$

Si las funcionales ϵ_i son cero, la ecuación (7) tiene varias soluciones para q , una de ellas es $q = 0$ y otra es $q_1 = q_2 = \dots = q_k$. Por lo tanto, un tema importante de investigación es encontrar condiciones sobre diferentes tipos de configuraciones tal que $q_1 = q_2 = \dots = q_k$ sea la única solución. En la siguiente subsección se presenta el análisis de un tipo particular de arreglos en donde se garantiza la unicidad de solución.

A. Análisis de un tipo de arreglos con solución única

Considere que en el arreglo hay un sistema cuya dinámica no es alterada por el resto de los sistemas. Este sistema se convierte en un sistema de referencia ya que el estado del resto de los sistemas debe converger al estado de este sistema.

Por simplicidad se asume que el sistema Σ_1 es el sistema de referencia, entonces la matriz Θ toma la forma

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\beta_{2,1} & \sum_{j=1, j \neq 2}^k \beta_{2,j} & \cdots & -\beta_{2,k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\beta_{k,1} & -\beta_{k,2} & \cdots & \sum_{j=1, j \neq k}^k \beta_{k,j} \end{bmatrix}$$

por lo que la ecuación (7) se se puede reescribir como

$$\epsilon' = \Theta' q' - B q_1,$$

donde

$$\epsilon' = [\epsilon_2 \quad \cdots \quad \epsilon_k]^T,$$

$$\Theta' = \begin{bmatrix} \sum_{j=1, j \neq 2}^k \beta_{2,j} & \cdots & -\beta_{2,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_{k,2} & \cdots & \sum_{j=1, j \neq k}^k \beta_{k,j} \end{bmatrix}_{k-1 \times k-1},$$

$$q' = [q_2 \quad \cdots \quad q_k]^T,$$

$$B = [\beta_{2,1} \quad \cdots \quad \beta_{k,1}]^T,$$

a la matriz Θ' se le llama la matriz de conexión. Como se asume que todos los nodos tienen al menos una conexión, entonces $B \neq 0$. Una condición suficiente para satisfacer el problema de sincronización (4) es que la matriz Θ' sea invertible. Esta condición resulta de resolver la ecuación $0 = \Theta' q' - B q_1$ para q' considerando las propiedades de las matrices Θ' y B . En este punto el problema de sincronización se convierte en un problema de control para estabilizar, en forma asintótica, la dinámica de las variables ϵ' .

B. Diseño de las señales de acoplamiento

La dinámica de las variables ϵ' está determinada por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}' &= \eta, \\ \dot{\eta} &= \Theta' F(\cdot) - B f_1(\cdot) + \Theta' \Lambda V, \\ Y &= \epsilon', \end{aligned}$$

donde

$$F(\cdot) = [f_2(\cdot) \quad f_3(\cdot) \quad \cdots \quad f_k(\cdot)]^T,$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \lambda_3 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix},$$

$$F(\cdot) = [v_2 \quad v_3 \quad \cdots \quad v_k]^T.$$

Un controlador ideal que resuelve el problema es

$$V = (\Theta' \Lambda) (-\Theta' F(\cdot) + B f_1(\cdot) - K_1 \epsilon' - K_2 \eta). \quad (8)$$

Sin embargo, η no está disponible y las funciones $F(\cdot)$ y $f_1(\cdot)$ son parcialmente desconocidas. Por lo tanto, no se puede implementar este controlador en forma directa. En la siguiente sección se presenta un observador de estado que, en forma indirecta, estima estos términos desconocidos.

C. Diseño de un observador de estado

Considere el sistema (2), el observador que se propone es el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{1_i} &= c_{11_i}(q_i - \hat{x}_{1_i}) + w_{1_i}, \\ \dot{w}_{1_i} &= c_{21_i}(q_i - \hat{x}_{1_i}) + c_{31_i} \text{sign}(q_i - \hat{x}_{1_i}), \\ \dot{\hat{x}}_{2_i} &= \lambda_i v_i + c_{12_i}(w_{1_i} - \hat{x}_{2_i}) + w_{2_i}, \\ \dot{w}_{2_i} &= c_{22_i}(w_{1_i} - \hat{x}_{2_i}) + c_{32_i} \text{sign}(w_{1_i} - \hat{x}_{2_i}). \end{aligned} \quad (9)$$

Para mostrar el desempeño del observador para cada nodo defina las variables de error

$$\begin{aligned} e_{1_i} &= q_i - \hat{x}_{1_i}, \\ e_{2_i} &= \dot{q}_i - \hat{x}_{2_i}, \end{aligned}$$

cuya dinámica está dada por el sistema

$$\begin{aligned} \dot{e}_{1_i} &= \dot{q}_i - c_{11_i} e_{1_i} - w_{1_i}, \\ \dot{w}_{1_i} &= c_{21_i} e_{1_i} + c_{31_i} \text{sign}(e_{1_i}), \\ \dot{e}_{2_i} &= f_i(\cdot) - c_{12_i}(w_{1_i} - \dot{q}_i + e_{2_i}) - w_{2_i}, \\ \dot{w}_{2_i} &= c_{22_i}(w_{1_i} - \dot{q}_i + e_{2_i}) + c_{32_i} \text{sign}(w_{1_i} - \dot{q}_i + e_{2_i}). \end{aligned} \quad (10)$$

Haciendo el cambio de variables $z_{1_i} = e_{1_i}$, $z_{2_i} = \dot{q}_i - c_{11_i} e_{1_i} - w_{1_i}$, $z_{3_i} = w_{1_i} - \dot{q}_i + e_{2_i}$ y $z_{4_i} = f_i(\cdot) - c_{12_i}(w_{1_i} -$

$\dot{q}_i + e_{2_i}) - w_{2_i}$, el sistema (10) puede reescribirse en la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{z}_{1_i} &= z_{2_i}, \\ \dot{z}_{2_i} &= \ddot{q}_i - c_{11_i} z_{2_i} - c_{21_i} z_{1_i} - c_{31_i} \text{sign}(z_{1_i}), \\ \dot{z}_{3_i} &= \dot{w}_{1_i} - \ddot{q}_i + z_{4_i}, \\ \dot{z}_{4_i} &= \dot{f}_i(\cdot) - c_{12_i} (\dot{w}_{1_i} - \ddot{q}_i + z_{4_i}) - c_{22_i} z_{3_i} \\ &\quad - c_{32_i} \text{sign}(z_{3_i}).\end{aligned}\quad (11)$$

Si \ddot{q}_i y $\dot{f}_i(\cdot)$ son acotadas en amplitud y velocidad se puede aplicar el Teorema 1 propuesto en (Rosas, Alvarez y Fridman, 2006) para seleccionar todas las constantes c_{kl_i} , tal que el origen sea un punto de equilibrio exponencialmente estable. De esta forma, en el límite cuando el tiempo tiende a infinito, $\hat{x}_{1_i} = q_i$, $\hat{x}_{2_i} = \dot{q}_i$ y $w_{2_i} = f_i(\cdot)$ y la entrada de control (8) puede ser implementada.

IV. Aplicación: sincronización de cuatro sistemas mecánicos

En esta sección se presenta la aplicación de la técnica de sincronización a un arreglo de cuatro sistemas. El primer sistema, que es el de referencia, es una versión modificada del oscilador de Van der Pol dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ -\varepsilon \left[q_1^2 + \frac{\dot{q}_1^2}{\mu^2} - \rho^2 \right] \dot{q}_1 - \mu^2 q_1 \end{bmatrix} \\ y_1 &= q_1.\end{aligned}\quad (12)$$

Los tres sistemas restantes son mecanismos con movimiento rotacional, dos de ellos se muestran en la figura 3 y el tercero en la figura 2. Los tres tienen el mismo modelo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ -\frac{B_i}{J_i} \dot{q}_i + \frac{G_i}{J_i} [\tau_i + \nu_i] + \frac{1}{J_i} \xi_i(\cdot) \end{bmatrix} \\ y_i &= q_i, \quad i = 2, 3, 4.\end{aligned}\quad (13)$$



Figura 2. Sistemas 2 y 3, estos mecanismos son parte del sistema IMDU de QUANSER.

Los parámetros nominales de los sistemas son: Para el sistema 1, oscilador de Van der Pol (sistema emulado por software) $\varepsilon = 0.5$, $\mu = 2.14159$, $\rho = 1$. Para el sistema 2: $B_2 = 96.6 \times 10^{-4}$, $J_2 = 174.311 \times 10^{-5}$, $K_{g_2} = 3$, $K_{t_2} = 61.2 \times 10^{-3}$, $K_{a_2} = 2$ y $R_2 = 1.01$. Para



Figura 3. Mecanismo rotacional del Emulador Industrial de ECP, sistema 4.

el sistema 3: $B_3 = 1.15 \times (96.6 \times 10^{-4})$, $J_3 = 1.15 \times (174.311 \times 10^{-5})$, $K_{g_3} = 3$, $K_{t_2} = 1.15 \times (61.2 \times 10^{-3})$, $K_{a_3} = 2$ y $R_3 = 1.15 \times (1.01)$. Para el sistema 4: $B_4 = 15 \times 10^{-3}$, $J_4 = 6.03 \times 10^{-3}$, $K_{g_4} = 1$, $K_{t_4} = 0.1$, $K_a = 2$ y $R_4 = 1.21$. Todas las constantes se definen con sus respectivas unidades.

Las señales de control τ para cada motor son $\tau_2 = \tau_3 = 0.25 \sin(\pi t)$ y $\tau_4 = \sin(\pi t)$. Por simplicidad, la matriz de conexión Θ' y el vector B son los siguientes

$$\begin{aligned}\Theta' &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \\ B &= [-1 \quad -1 \quad -1]^T.\end{aligned}$$

También se desarrollaron los observadores y las transformaciones auxiliares para implementar las señales de acoplamiento siguiendo el procedimiento señalado.

A. Resultados numéricos

En las figura 4 se muestran las posiciones de los cuatro sistemas. Desde $t = 0 \text{seg}$ a $t = 6 \text{seg}$ los sistemas evolucionan libremente. Como se puede observar, el error de sincronización es muy grande. En $t = 6 \text{seg}$ se aplican las señales de acoplamiento obteniendo la sincronización esperada.

B. Resultados experimentales

En el experimento se pusieron las mismas condiciones. Cuando los sistemas evolucionan libremente el error de sincronización es muy grande y después de aplicar las señales de acoplamiento los sistemas se sincronizan, ver figura 5. En la figura 6 se muestran las señales de acoplamiento, las cuales tienen un comportamiento similar a los resultados numéricos, las diferencias existentes se deben a que se están compensando las perturbaciones que existen en los sistemas reales.

V. Conclusiones

Se ha presentado una técnica de sincronización para sistemas con estructura lagrangiana de 1GDL que muestra buenas propiedades de robustez y flexibilidad en el tipo de arreglo. Además de la robustez ante

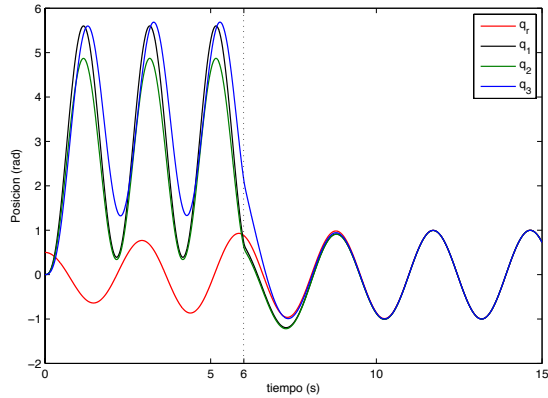


Figura 4. Sincronización de los tres mecanismos y el sistema de referencia virtual, resultados numéricos.

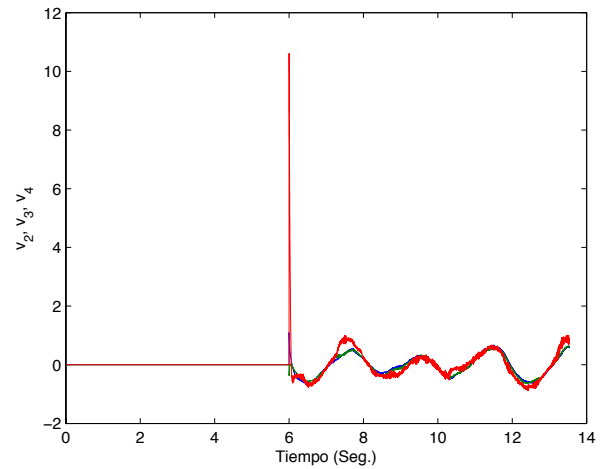


Figura 6. Señales de acoplamiento, resultados experimentales.

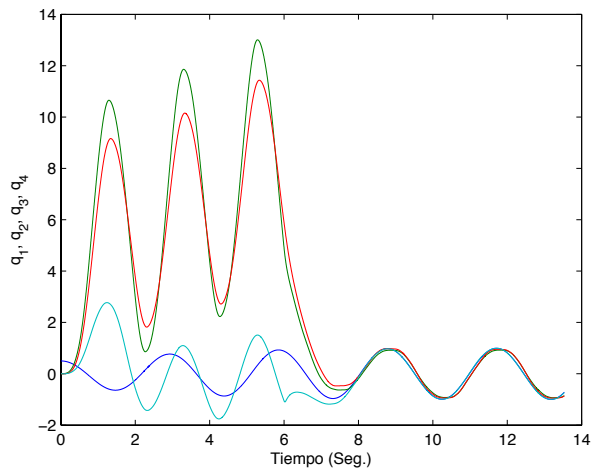


Figura 5. Posiciones de los 4 sistemas, resultados experimentales.

perturbaciones en los nodos, esta técnica también es robusta ante pérdidas de conexiones, ya que no necesita que la matriz de conectividad sea simétrica, sólo se pide que sea invertible.

Esta técnica de sincronización puede generalizarse directamente a sistemas con n grados de libertad

Los resultados numéricos y experimentales han ilustrado satisfactoriamente el desempeño de la técnica. Existen pequeños errores de sincronización en los experimentos, estos se deben principalmente a las no idealidades del sistema como retardos e histéresis.

Referencias

- Dong S. y Mills, J. K. "Adaptive synchronized control for coordination of multirobot assembly tasks". IEEE Transactions on Robotics and Automation. Vol. 18, No. 4, 2002 pp. 498-510.
- Fradkov A., Nijmeijer H. y Pogromsky A. "Adaptive observer-based synchronization". En: Guanrong Chen. Controlling chaos and bifurcations in engineering systems. CRC Press, 2000.

- Hernández D., Álvarez J., Rosas D. y Peña J. "Sincronización robusta de arreglos de sistemas dinámicos". Memorias del AMCA 2007, Monterrey, N.L., 2007.
- Rodríguez A. y Nijmeijer H. "Mutual synchronization of robots via estimated state feedback: A Cooperative Approach". IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 12, No. 4. 2004, pp. 542-554.
- Rosas D., Alvarez J. y Fridman L. "Robust observation and identification of nDOF Lagrangian systems". International Journal Of Robust And Nonlinear Control, Vol. 17. 2006, pp. 842-861.
- Sarasola C., Torrealdea F., D'Anjou A., Moujahid A. y Graña M. "Feedback synchronization of chaotic systems". International Journal of Bifurcations and Chaos. Vol. 13, No. 1, 2003, pp. 177-191.
- Tao Y. y Hui H. S. "Synchronizing chaotic dynamics with uncertainties based on a sliding mode control design". Physical Review E. Vol. 65, 2002, pp. 1-7.