

## Diseño de un controlador robusto con ajuste de la función de sensibilidad perturbación a la salida

S. Camacho-Venegas, V. Alvarado-Martínez, G. Guerrero-Ramírez  
Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico,  
Interior Internado Palmira S/N, C.P. 62490, Cuernavaca, Mor., México

[patriciacamacho07e@cenidet.edu.mx](mailto:patriciacamacho07e@cenidet.edu.mx)

[victor.alvarado.martinez@gmail.com](mailto:victor.alvarado.martinez@gmail.com)

[gerardog@cenidet.edu.mx](mailto:gerardog@cenidet.edu.mx)

Teléfono: 01(777) 362-7770

**Resumen**— En este trabajo se describe la metodología de diseño de un controlador robusto con ajuste de la función de sensibilidad perturbación a la salida. El análisis y diseño del controlador se realiza en tiempo discreto, la metodología empleada permite obtener simultáneamente condiciones de robustez y cumplir con las especificaciones de desempeño en lazo cerrado, con el fin de proponer una solución que pueda ser implementada en línea.

**Palabras clave:** Controlador robusto, colocación de polos, sensibilidad, desempeño, robustez.

### I. INTRODUCCIÓN

En un sentido amplio, un sistema es un conjunto de elementos asociados de forma tal que sea capaz de cumplir un objetivo dado, como producir energía, acumular materia, separarla, transportarla, etc. El interés principal a nivel industrial es conocer el comportamiento de un sistema en diferentes situaciones, y cómo la intersección de sus partes determina su evolución temporal.

En la industria, la aplicación de técnicas de control avanzadas está teniendo cada vez más auge no solamente por la mejora de prestaciones que son capaces de aportar sino por el desarrollo de controladores que se están diseñando para controlar la planta en un punto de operación y que sean robustos a perturbaciones.

Generalmente, la combinación de modelos complejos de sistemas dinámicos y el diseño de controladores robustos, dan como resultado que los controladores sean de mayor orden, lo que dificultan su implementación en la práctica.

Para el diseño del controlador robusto se utiliza el método de colocación de polos basado en una estructura RST, el cual es ampliamente utilizado para el diseño de controladores de sistemas S.I.S.O. (Single-input and single-output), ya que se basa en la solución de la ecuación de Bezout. En (Aström y Wittermark 1990), (O y G 2005), (Landau 1998), aquí los autores trabajan la atenuación de la perturbación en bajas frecuencias de tipo polinomial de cualquier orden y garantizan para lazo cerrado una ganancia unitaria, teniendo

en cuenta sólo que la entrada de referencia sea constante.

Las funciones de sensibilidad (en particular la función de sensibilidad a la salida), son indicadores claves del desempeño nominal (y robusto) para la estabilidad robusta de los sistemas de lazo cerrado (Landau, Cyrot, y Rey 1993), (Landau 1995).

Con el análisis y la asimilación del método de colocación de polos y ajuste de la función de sensibilidad perturbación a la salida, se puede desarrollar una herramienta que permite llevar a cabo el diseño del controlador robusto y la reducción del orden del controlador.

Con el fin de lograr un mayor desempeño del sistema de control, se tienen las siguientes necesidades: especificaciones del desempeño deseado, identificación o conocimiento de la dinámica de la planta, técnica de implementación del controlador y, por último, validación del controlador (Landau 2000).

El objetivo de este trabajo es suministrar una herramienta de control robusto, un software libre bajo la plataforma de MatLab® y SciLab®, para distribuir en la comunidad especializada de la temática.

Esta herramienta definirá un “patrón”, para la función de sensibilidad perturbación a la salida que asegure un cierto margen de robustez del sistema en lazo cerrado con el controlador.

### II. REPRESENTACIÓN DE LA PLANTA

El modelo de la planta  $G(z^{-1})$  es en tiempo discreto y LTI (lineal e invariante en el tiempo), su estructura está dada por:

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{z^{-d} (b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n})}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (1)$$

donde  $z = e^{sT_s}$ , y  $d$  es el retardo puro de la planta en un periodo de muestreo  $T_s$ , contenido en el tiempo de retardo de la planta.

Se asume que los polinomios  $A(z^{-1})$  y  $B(z^{-1})$  no tienen factores comunes.

### III. MÉTODO DEL DISEÑO DEL CONTROLADOR ROBUSTO

Una vez que se conoce la planta en tiempo discreto y se ha elegido la función de transferencia para lazo cerrado, se diseña un controlador con estructura RST, ya que es un método muy efectivo puesto que conduce a una solución automática (O. y G. 2005).

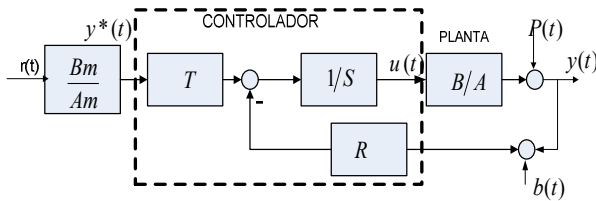


Figura 1. Configuración de lazo cerrado.

#### A. Método de colocación de polos

La figura 1, muestra un diagrama de bloques de un sistema de control con un controlador digital RST (Landau y Zito 2002), (Aström y Wittermark 1990). La forma canónica es:

$$S(z^{-1})u(t) = T(z^{-1})y^*(t) - R(z^{-1})y(t) \quad (2)$$

donde  $u(t)$  es la entrada a la planta (la ley de control),  $y(t)$  es la salida de la planta y  $y^*(t)$  es la trayectoria deseada.

Esta trayectoria se almacena en una computadora o es generada por un modelo de referencia, como el siguiente:

$$y^*(t) = \frac{B_m(z^{-1})}{A_m(z^{-1})} r(t) \quad (3)$$

donde  $r(t)$  es la referencia.

La función de transferencia en lazo cerrado  $H_{LC}(z^{-1})$  entre la trayectoria de referencia y salida de la planta está dada por:

$$H_{LC}(z^{-1}) = \frac{z^{-d} B(z^{-1}) T(z^{-1})}{P(z^{-1})} \quad (4)$$

donde se definen los polos en lazo cerrado  $P(z^{-1})$  como:

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d} B(z^{-1})R(z^{-1}) \quad (5)$$

$$P(z^{-1}) = P_D(z^{-1})P_A(z^{-1})$$

El término  $P_D(z^{-1})$  de la ecuación (5) corresponde a los polos dominantes en lazo cerrado deseados,  $P_A(z^{-1})$  son los polos auxiliares. La solución de la ecuación (5) está dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} nP &= \deg P(z^{-1}) \leq n_A + n_B + d - 1 \\ nS &= \deg S(z^{-1}) \leq n_B + d - 1 \\ nR &= \deg R(z^{-1}) \leq n_A - 1 \end{aligned} \quad (6)$$

donde,

$$S(q^{-1}) = 1 + s_1 q^{-1} + \dots + s_{n_S} q^{-n_S} = 1 + q^{-1} S^*(q^{-1}) \quad (7)$$

$$R(q^{-1}) = r_0 + r_1 q^{-1} + \dots + r_{n_R} q^{-n_R} \quad (8)$$

Añadir partes fijas al controlador es de mucha utilidad para el diseñador, debido a que con éstas se pueden establecer comportamientos deseados de éste (fijar polos).

Las partes fijas más comunes que se añaden al controlador (Landau y Zito 2002) son: un integrador al polinomio  $S(z^{-1})$ ,  $H_S(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$ , para asegurar un error cercano a cero, en el punto  $[-1, j0]$ , y la otra parte fija es en el polinomio  $R(z^{-1})$ ,  $H_R(z^{-1}) = 1 + z^{-1}$  a lo que se denomina "abrir el lazo", esto hace que el controlador se comporte como un filtro pasabajos, rechazando señales con frecuencias mayores a 0.5 veces la frecuencia de muestreo.

De las ecuaciones (7) y (8) se obtiene:

$$R(z^{-1}) = R'(z^{-1})H_R(z^{-1}) \quad (9)$$

$$S(z^{-1}) = S'(z^{-1})H_S(z^{-1})$$

$R'(z^{-1})$  y  $S'(z^{-1})$  son la parte a calcular resolviendo la ecuación de Bezout de los polinomios del controlador como sigue:

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1})S'(z^{-1})H_S(z^{-1}) + z^{-d} B(z^{-1})R'(z^{-1})H_R(z^{-1}) \quad (10)$$

La parte de seguimiento  $T(z^{-1})$  de la ecuación (2), del controlador es usada para compensar la dinámica en lazo cerrado de tal manera que toda la función de transferencia (desde  $r(t)$  a  $y(t)$ ) tiene la dinámica del modelo de referencia  $\frac{B_m}{A_m}$ .

El polinomio  $T(z^{-1})$  tiene tres formas básicas:

La primera forma contiene todos los polos del lazo cerrado dados por el polinomio  $P = AS + BR$  y la ganancia

estática se ajusta de tal forma que  $y^*(t)$  a  $y(t)$  es 1; por lo tanto la función de transferencia es:

$$T(z^{-1}) = \frac{P(z^{-1})}{B(1)} \quad (11)$$

La segunda forma contiene los polos dominantes del lazo cerrado dados por el polinomio  $P_D$  y la ganancia estática es ajustada, por lo que la ganancia estática de la función de transferencia para  $y^*(t)$  a  $y(t)$  es 1, donde:

$$T(z^{-1}) = \frac{P_D(z^{-1})P_A(z^{-1})}{B(1)} \quad (12)$$

La tercera forma es el valor de una ganancia definida por:

$$T(z^{-1}) = \frac{P(1)}{B(1)} \quad (13)$$

#### IV. FUNCIONES DE SENSIBILIDAD

Las funciones de sensibilidad describen la atenuación en las perturbaciones debido a la realimentación, es decir, permiten determinar instantáneamente una gran cantidad de información sobre el sistema de control (perturbaciones, estabilidad, robustez, entre otros).

Según la figura 1, se definen las siguientes funciones de sensibilidad:

La función de sensibilidad entre la salida del controlador  $u(t)$  y la perturbación  $p(t)$  (función de sensibilidad perturbación a la entrada) se define como:

$$S_{up} = -\frac{A(z^{-1})R(z^{-1})}{P(z^{-1})} \quad (14)$$

La función de sensibilidad entre la salida  $y(t)$  y la perturbación  $p(t)$  (función de sensibilidad perturbación a la salida) se define como:

$$S_{yp} = \frac{A(z^{-1})S(z^{-1})}{P(z^{-1})} \quad (15)$$

La función de sensibilidad entre salida de la planta  $y(t)$  y el ruido medido  $b(t)$  (función de sensibilidad ruido a la salida) se define como:

$$S_{yb}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})R(z^{-1})}{P(z^{-1})} \quad (16)$$

Esto es importante para enfatizar la siguiente propiedad:

$$S_{yp}(z^{-1}) - S_{yb}(z^{-1}) = 1 \quad (17)$$

La ecuación (17) se utilizará para definir el margen de retardo expresado en términos robustos (ver ecuación 24).

#### V. MÁRGENES DE ROBUSTEZ

La distancia mínima con relación al punto crítico  $[-1, j0]$  caracteriza la "reserva de estabilidad" o la "robustez" del sistema en lazo cerrado frente a las variaciones de los parámetros del sistema (o incertidumbres sobre el valor de los parámetros).

Dos márgenes de robustez, el margen de módulo y el margen de retardo son importantes para el diseño de controladores digitales (Landau, Cyrot y Rey 1993.), (Landau (1995).].

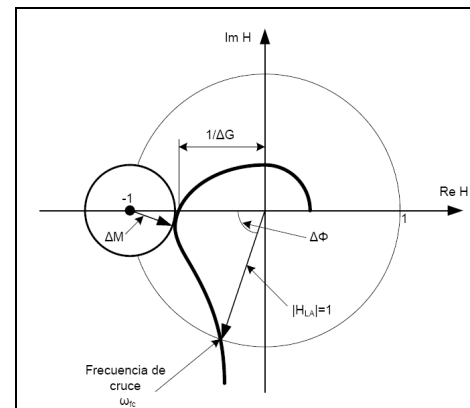


Figura 2. Márgenes de robustez.

##### A. Margen de módulo ( $\Delta M$ )

La función de transferencia en lazo abierto  $H_{LA}(z^{-1})$  del sistema es la siguiente:

$$H_{LA}(z^{-1}) = \frac{z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1})} \quad (18)$$

El margen de módulo ( $\Delta M$ ) se define como el radio de un círculo con centro en  $[-1, j0]$ , dicho círculo es tangente a la gráfica (traza) de Nyquist del sistema  $|H_{LA}(z^{-1})|$  (ver ecuación 18), como se muestra en la figura 2.

El margen de módulo ( $\Delta M$ ), está dado por:

$$\Delta M = \min |1 + H_{LA}(z^{-1})| = \min |S_{yp}^{-1}(z^{-1})| = (\max |S_{yp}(z^{-1})|)^{-1} \quad (19)$$

En consecuencia, la reducción  $\max |S_{yp}(z^{-1})|$  provocará un crecimiento al margen de módulo y viceversa.

Los valores típicos para un buen margen de módulo son (Landau 2000):

$$\Delta M \geq 0.5(-6dB) \quad [\min : 0.4(-8dB)] \quad (20)$$

### B. Margen de retardo ( $\Delta\tau$ )

Un retardo puro introduce un desfaseamiento proporcional a la frecuencia  $\omega$ . Para una cierta frecuencia  $\omega_0$ , el desfaseamiento que introduce un retardo puro  $\tau$  es:

$$\angle\Phi(\omega_0) = \omega_0 \tau \quad (21)$$

De esta forma es posible convertir un margen de fase en un “margen de retardo”; entonces, el margen de retardo ( $\Delta\tau$ ) se muestra como el retardo adicional que puede tolerar el sistema en lazo abierto antes de provocar inestabilidad al sistema en lazo cerrado ( ver figura 2).

$$\Delta\tau = \frac{\Delta\Phi}{\omega_{fc}} \quad (22)$$

Si la gráfica de Nyquist interseca en varias ocasiones ( $i$ ) al círculo unitario, entonces el margen de retardo se define como:

$$\Delta\tau = \min_i \frac{\Delta\Phi_i}{\omega_{fc}^i} \quad (23)$$

Un valor típico del margen de retardo es: una fracción del retardo puro del sistema (10%) o de la respuesta en el tiempo (10%), usualmente  $1T_s$ , donde  $T_s$  es el tiempo de muestreo.

## VI. SIMULACIONES

### A) DEFINICIÓN DE LA “PLANTILLA” PARA LA FUNCIÓN DE SENSIBILIDAD A LA SALIDA.

Usando el teorema de pequeña ganancia y la representación de la incertidumbre de la planta, el margen de módulo y el margen de retardo pueden ser convertidos en “condiciones de estabilidad robusta”.

Por otra parte la estabilidad robusta permite la definición de la plantilla “superior” para los módulos de las varias funciones de sensibilidad (Landau (1995).

Para el “margen de retardo” de un periodo de muestreo la condición de estabilidad robusta a partir de la ecuación (17) es expresada como:

$$1 - |1 - z^{-1}|^{-1} < S_{yp}(z^{-1}) < 1 + |1 - z^{-1}|^{-1} \quad (24)$$

$$z = e^{j\omega T_s}, \quad 0 \leq \omega \leq \pi$$

Para asegurar el margen de retardo  $\Delta\tau = T_s$ , se requiere que el módulo de  $S_{yp}(z^{-1})$  se encuentre dentro de un “tubo” definido por una plantilla, como se muestra en la figura 3, la cual en la parte baja está dada por  $|W^{-1}|_{inf} = 1 - |1 - z^{-1}|^{-1}$  y una parte alta de la plantilla definida por  $|W^{-1}|_{sup} = 1 + |1 - z^{-1}|^{-1}$ .

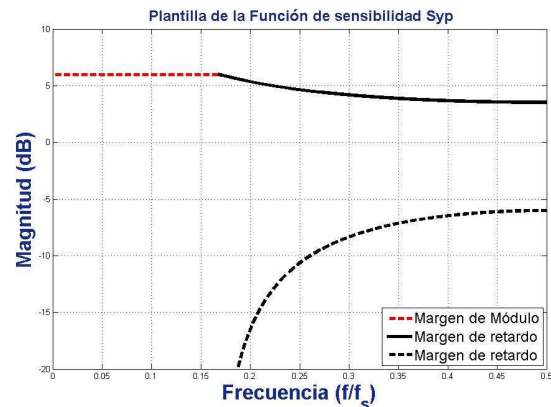


Figura 3. Plantilla de la función de sensibilidad a la salida.

En cuanto a la “estabilidad robusta”, el margen de módulo define el máximo valor de los módulos de la función de sensibilidad a la salida (la parte superior de la plantilla) y el “margen de retardo” define una parte superior e inferior de la plantilla, la parte inferior se iniciará en  $0.15f_s$  (para  $\Delta\tau = T_s$ ).

### B) APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA

Para probar la metodología implementada se realizaron algunas simulaciones con los datos del modelo de una planta de transmisión flexible.

La transmisión flexible consta de tres poleas unidas por cintas elásticas (ver figura 4.), una de estas poleas está limitada por el eje de un motor D.C. y el motor de posición es controlado por un servo-local; el objetivo del control es conseguir la posición deseada de las tres poleas.

Modificando el voltaje de entrada del motor que impulsa la primera polea, la salida  $y(t)$  del sistema es la posición del eje de la tercera polea, y la señal  $u(t)$  es la referencia para la primera posición del eje de la polea.

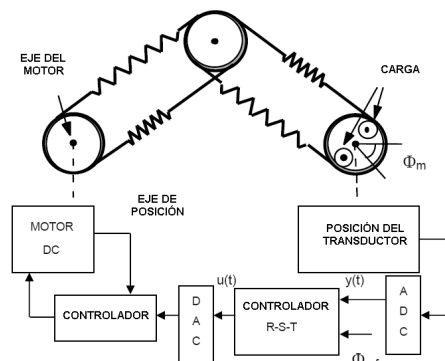


Figura 4. Control de posición por medio de transmisión flexible.

El modelo de la planta está representado por:

$$A(z^{-1}) = 1 - 1.609555z^{-1} + 1.87644z^{-2} - 1.49879z^{-3} + 0.8857z^{-4}$$

$$B(z^{-1}) = 0.3053z^{-1} + 0.3943z^{-2}$$

$$d = 2$$

En la figura 5 se representa la frecuencia característica de este modelo, los modos de vibración de la planta, se definen por  $\omega = 1.9017\text{Hz}$ ,  $\zeta = 0.042$  y  $\omega = 5.0074\text{Hz}$ ,  $\zeta = 0.023$ .

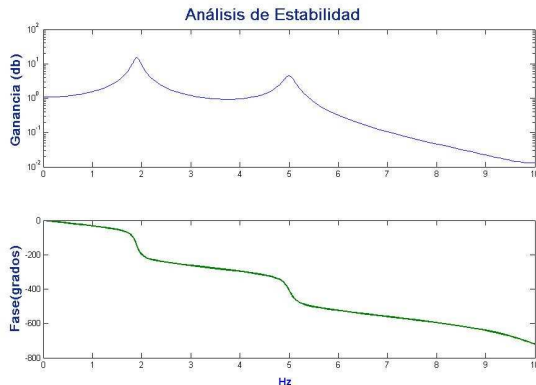


Figura 5. Diagrama de Bode del modelo de la planta de transmisión flexible.

El controlador diseñado debe asegurar ciertas especificaciones de robustez en términos del margen de módulo, margen de retardo y el valor máximo de los módulos de la función de sensibilidad a la entrada a frecuencias altas, las especificaciones de desempeño y robustez de la planta son resumidas a continuación:

Dinámica de seguimiento: se realiza con un sistema de segundo orden y los datos utilizados son:  $\omega_0 = 1.9017\text{H}$  y  $\zeta = 0.9$ .

Error igual a cero en estado estacionario: se incluye un integrador:  $H_S(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$

Los polos dominantes del lazo cerrado: corresponden a la discretización de un sistema en tiempo continuo con  $\omega_0 = 1.9017\text{H}$  y  $\zeta = 0.8$ .

Margen de módulo:  $\Delta M \geq 0.5$

Margen de retardo:  $\Delta \tau \geq 0.05\text{seg}$

Función de sensibilidad a la entrada:

$$\left| S_{up}(z^{-1}) \right|_{\text{máx}} \leq 10 \text{ dB por } f \geq 0.35 f_s$$

Se diseña un primer controlador con solo los polos dominantes, el valor del margen de módulo es  $\Delta M = 0.498$ , el cual es ligeramente menor al valor deseado y su  $\left| S_{up}(z^{-1}) \right|$  en frecuencias altas es superior a 10dB del valor requerido como se observa en la figuras 6 y 7 (curva del controlador A), (ver tabla 1).

En el segundo diseño se utiliza un segundo par de polos, los cuales representan el segundo modo de vibración con amortiguamiento igual o superior al valor en lazo abierto.

Al aumentar el valor de amortiguación el margen de módulo es  $\Delta M = 0.522$  y se observa otra vez que se encuentra ligeramente superior al valor deseado, el efecto del par de polos reduce significativamente, el máximo  $\left| S_{up}(z^{-1}) \right|$  a 6.24 dB (ver figuras 6 y 7, curvas del controlador B).

El tercer controlador se diseña porque la función de sensibilidad a la entrada se está amplificando unos pocos dB de la medición del ruido y se puede interpretar como perturbación, para contrarrestar este fenómeno es suficiente abrir el lazo en altas frecuencias, mediante la introducción de la partes fijas  $H_R(z^{-1}) = 1 + z^{-1}$  en el controlador y se observa que disminuye en gran medida en las frecuencias altas (ver figura 6 y 7, controlador C), el valor del margen de módulo es  $\Delta M = 0.544$  y el  $\left| S_{up}(z^{-1}) \right|$  1.5 dB.

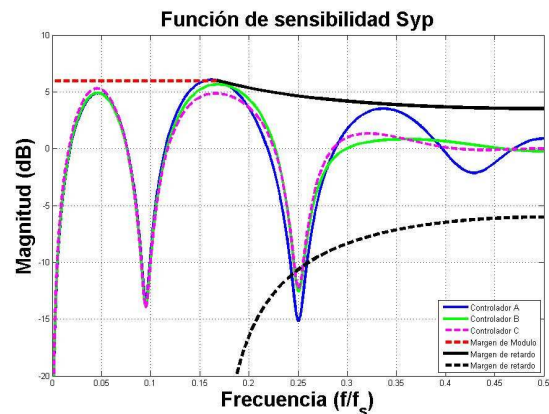


Figura 6. Varios controladores para el control de posición por medio de transmisión flexible, por la función de sensibilidad a la salida.

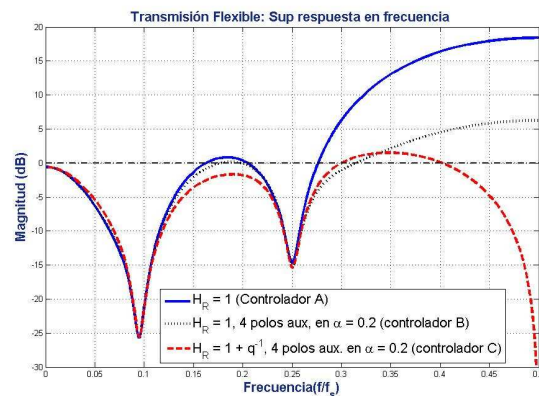


Figura 7. Representación de la función de sensibilidad a la entrada ante varios controladores.

TABLA I  
Especificaciones de los controladores.

	A	B	C
$H_S(z^{-1})$	$1 - z^{-1}$	$1 - z^{-1}$	$1 - z^{-1}$
$H_R(z^{-1})$			$1 + z^{-1}$
<b>Polos dominantes</b>	$\omega = 11.94$ $\zeta = 0.8$	$\omega = 11.94$ $\zeta = 0.8$	$\omega = 11.94$ $\zeta = 0.8$
<b>Polos auxiliares</b>		$\omega = 31.46$ $\zeta = 0.15$ $(1 - 0.2z^{-1})^4$	$\omega = 31.46$ $\zeta = 0.15$ $(1 - 0.2z^{-1})^4$

Landau I.D, Cyrot C., y Rey D (1993). Robust control design using the combined pole placement/ sensitivity function shaping method. European Contr. Conf., Groningen, the Netherlands, vol. 3, pp.1693-1697.

Landau I.D (1995). Robust control of systems with time delay. Vol. 62, No 2, pp. 325-347.

O. Eric and G. Emmanuel (2005). RST-Controller design for sinewave references by means of an auxiliary Diophantine equation. European Contr. Conf., Seville. pp. 6905-6910.

Landau I.D. (1998). The RST digital controller design and applications. Control Enzg. Practice. Vol. 6. pp. 155-165.

## VII. CONCLUSIONES

Se desarrolló un programa libre para el diseño automático del controlador, esta herramienta desarrollada para el cálculo del controlador permite encontrar los polinomios  $R(z^{-1})$ ,  $S(z^{-1})$  y  $T(z^{-1})$ , verificar que él  $S(z^{-1})$  sea estable y que la función de sensibilidad a la salida  $S_{yp}(z^{-1})$ , se encuentre dentro de los límites que garantizan la robustez del controlador.

Si la función de sensibilidad a la salida no se encuentra dentro de los márgenes de robustez, se debe proceder a calcular nuevamente el controlador; modificando ya sea las partes fijas del controlador ( $H_R$  y  $H_S$ ) o los polos auxiliares que forman la parte del polinomio característico del sistema en lazo cerrado ( $P_A$ ); el proceso de cálculo de un controlador robusto es iterativo y depende de las especificaciones dadas por el diseñador.

Con el fin de obtener un controlador robusto con respecto a los errores de modelado más allá del ancho de banda en lazo cerrado, los polos auxiliares se eligen cerca a los polos de alta frecuencia de la planta.

Los resultados de simulación han permitido corroborar la validez de la metodología y el buen comportamiento del controlador diseñado.

## REFERENCIAS

Landau, I.D. (2000). Adaptive control. A perspective, pp. 181-186.

Landau, I.D. y Zito G. (2002). Digital Control System, Design, Identification and Implementation Control Design Prentice-Hall, Paris.

Aström K.J. and Wittermark B. (1990), Computer Controlled System, Theory and Design Prentice-Hall, New York.