



# Diseño óptimo de un COBOT tridimensional de 4 grados de libertad con engranajes planetarios

Nicolás Store, C. A. Cruz-Villar, A. Rodríguez-Ángeles  
CINVESTAV - IPN, Depto. Ing. Eléctrica, Sección Mecatrónica  
Av. IPN 2508, Col. San Pedro Zacatenco, C.P.07360, México D.F.  
nstore@cinvestav.mx  
Telefono: (55)-57-47-38-00

**Resumen**— Los COBOTs son robots pasivos que comparten su espacio de trabajo con un operador humano. Son seguros para quién los manipula y facilitan la realización de la tarea lo que lleva a un aumento en productividad. Además aprovechan de la visión, inteligencia y destreza del hombre. Pueden realizar tareas de transporte o de precisión, reduciendo el tiempo de formación del operador y a bajo costo. El robot que se pretende diseñar es tridimensional con 4 grados de libertad. Se optimiza el diseño para una sola trayectoria y el criterio de optimización está especializado para los COBOTs. Además las transmisiones continuas empleadas son engranajes planetarios que poseen alta eficiencia, simplicidad de ensamblaje y soportan grandes cargas. Se analizan los esfuerzos dentro de los eslabones, la cinemática directa e inversa del robot y se encuentra la razón de transmisión del engranaje planetario. Además, se genera una trayectoria que toma en cuenta una superficie virtual porque se ubica en un plano horizontal, dentro del espacio de trabajo. El proceso de diseño se simplifica a una sola etapa, la optimización. Se expresan matemáticamente todos los criterios de diseño para poder programarlos. No se necesita experiencia en el diseño. Este método se puede reproducir para cualquier sistema. **Palabras clave:** Differential gears, CVT, Collaborative Robot, Optimization problems.

## I. INTRODUCCIÓN

En los 90's la industria automotriz necesitaba nuevos sistemas mecánicos para realizar tareas de ensamblaje en un espacio compartido con sus trabajadores. J. Edward Colgate and Michael A. Peshkin inventaron en E.U.A un nuevo tipo de máquinas inteligentes cuyo propósito era colaborar con un operador humano. La llamaron *Collaborative roBOTs*, (Michael A. Peshkin, J. Edward Colgate, Carl A. Moore, R. Brent Gillespie, 2001). Por otra parte, los robots convencionales manejan grandes fuerzas y son muy rápidos, entonces, por seguridad de las personas, no comparten su espacio de trabajo con un empleado.

Los COBOTs son dispositivos pasivos cuyos motores, de baja potencia, no podrían mover el robot por ellos mismos. Su meta es de cambiar la razón de transmisión de cada articulación pero el operador proporciona toda la potencia para el movimiento. El control se encarga del seguimiento de trayectoria y el operador se preocupa de dirigir aproximadamente el manipulador. Una analogía del COBOT podría ser un tren y sus vías. Un tren genera la potencia para su movimiento y sus vías se encargan de la dirección a seguir.

El humano correspondería al tren. El sistema de control y las transmisiones jugarían el papel de las vías.

En los COBOTs las transmisiones son continuas, llamadas en inglés CVTs (Continuously Variable Transmission). Una caja de velocidades de un coche pasa la potencia del motor a las ruedas pero solo posee un número finito de cambios posibles. Una transmisión continua, tiene idealmente un número infinito de razones de transmisión. Una de las primeras CVTs era constituida de dos poleas cónicas unidas por una cadena. Una traslación de una polea cambia su radio y la razón de transmisión. Una CVT dispone de dos entradas: para la potencia a transmitir y para el control, así como de una salida. Diferentes investigaciones emplearon CVTs basadas en engranajes planetarios que son más eficientes porque no se basan en fricción como en las CVTs esféricas, ver (J. Krüger, R. Bernhardt, D. Surdilovic, 2006) y (Yuhong Dong, Lixun Zhang, Dunmin Lu, 2004).

Los COBOTs se han empleado principalmente en tareas de transporte de cargas porque aumentan el confort y la eficiencia del trabajador. Se han encontrado también en cirugías como en (O. Schneider, J. Troccaz, O. Chavanon, D. Blin, 2000). Pero pueden también usarse como entrenadores en tareas de precisión aumentando la productividad. Además se requeriría muy poca formación del personal que manipulara el COBOT.

El método de diseño propuesto no necesita experiencia por parte del diseñador porque se establece como un problema de optimización. Se minimiza una función matemática, llamada función objetivo, modificando sus variables que deben cumplir algunas restricciones. En este caso se desea orientar y dimensionar los semi-ejes del elipsoide de fuerza en cada punto de la trayectoria en la dirección de sus gradientes. Además se requiere minimizar el peso de todos los eslabones. Las variables del problema son las dimensiones de los eslabones (figura 5). No todas las dimensiones que minimizan la función objetivo generan eslabones resistentes a las fuerzas aplicadas sobre el robot. Por lo tanto las dimensiones deben respetar los esfuerzos límites dentro de los eslabones, el espacio de trabajo del robot, la cinemática inversa y varias relaciones de proporcionalidad entre ellas.

## II. TRANSMISIÓN DIFERENCIAL Y CVT

Hoy en día las transmisiones continuas son comunes en la industria automotriz porque incrementan la eficiencia del vehículo. Su propósito es realizar un aumento o disminución continua de la velocidad de entrada. Entonces variando la entrada de control se decide de la amplitud del incremento o decremento en la velocidad de salida. Existen diferentes tipos de mecanismos que lo logran como se menciona en (O. Schneider, J. Troccaz, O. Chavanon, D. Blin, 2000) y (Michael A. Peshkin, J. Edward Colgate, Carl A. Moore, R. Brent Gillespie, 2001).

En este robot se utilizan trenes de engranes epicicloidales porque se encuentran fácilmente en el mercado. Se componen de 5 engranes externos, el sol y los planetas, y un interno, el anillo. Los planetas y el anillo giran alrededor del sol. Los planetas están siempre en contacto con el sol y el anillo, como se observa en la figura 1. Los ejes de rotación de los planetas están fijos a un sólido llamado brazo. Un análisis cinemático en estos puntos de contacto llevan a obtener la relación de transmisión.

Se considera que los contactos entre los engranes son cinemáticamente equivalentes a ruedas sin deslizamiento.

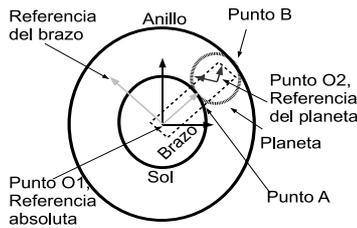


Figura 1. Representación del engranaje planetario con un planeta

### Contacto entre el sol y un planeta: punto A

En este punto la velocidad del sol con respecto al planeta es cero porque no hay deslizamiento. Se nota  $\vec{V}_{sol \text{ en } A/planeta} = \vec{0}$ , la velocidad del engrane llamado sol en el punto de contacto A medido con respecto al planeta. Se coloca un sistema de coordenadas en el sol, al planeta y el brazo que comparten el eje Z que corresponde a los ejes de rotación de las tres entidades. El eje Y del brazo une los centros de rotación del sol,  $O_1$ , y del planeta, llamado  $O_2$ . Entonces  $O_1A = R_{sol}\vec{y}_{brazo}$  y  $O_2A = -R_{planeta}\vec{y}_{brazo}$  representan respectivamente los radios de las circunferencias primitivas del sol y del planeta. Cambiando de referencia se logra:  $\vec{V}_{sol \text{ en } A/planeta} = \vec{V}_{sol \text{ en } A/brazo} + \vec{V}_{brazo/planeta}$ . Sea  $\omega_{sol/brazo}\vec{z}$  el vector de velocidad angular del sol con respecto al brazo.

Cualquier movimiento se representa mediante una traslación y una rotación:  $\vec{V}_{sol \text{ en } A/brazo} = \vec{V}_{sol \text{ en } O_1/brazo} + O_1A \times \omega_{sol/brazo}\vec{z}$ . De la misma forma se tiene:  $\vec{V}_{brazo/planeta} = \vec{V}_{brazo \text{ en } O_2/planeta} + O_2A \times \omega_{brazo/planeta}\vec{z}$ . Este engranaje no produce traslación de los engranes:  $\vec{V}_{sol \text{ en } O_1/brazo} = \vec{V}_{brazo \text{ en } O_2/planeta} = \vec{0}$ .

Por lo tanto se tiene que en el eje X del sistema de coordenadas del brazo:

$$R_{sol}\omega_{sol/brazo} - R_{planeta}\omega_{brazo/planeta} = 0.$$

### Contacto entre un planeta y el anillo: punto B

Se aplica la misma metodología que en el punto A. Se buscan las velocidades en el punto B del planeta y del anillo con respecto al brazo porque  $\vec{V}_{planeta \text{ en } B/anillo} = \vec{0} = \vec{V}_{planeta \text{ en } B/brazo} + \vec{V}_{brazo/anillo}$ . Descomponiendo el movimiento en dos rotaciones se obtiene:  $\vec{V}_{planeta \text{ en } B/anillo} = R_{planeta} \vec{y}_{brazo} \times \omega_{planeta/brazo}\vec{z} + R_{anillo} \vec{y}_{brazo} \times \omega_{brazo/anillo}\vec{z}$ . Lo que lleva en amplitudes a la relación:

$$R_{planeta}\omega_{planeta/brazo} + R_{anillo}\omega_{brazo/anillo} = 0.$$

**Velocidades absolutas** Las relaciones de velocidades obtenidas en el punto A y B se reescriben de la siguiente manera en la referencia absoluta:  $R_{sol}(\omega_{sol} - \omega_{brazo}) - R_{planeta}(\omega_{brazo} - \omega_{planeta}) = 0$  y en el punto B:  $R_{planeta}(\omega_{planeta} - \omega_{brazo}) + R_{anillo}(\omega_{brazo} - \omega_{anillo}) = 0$ . Reacomodando estas dos ecuaciones se obtiene la expresión de la velocidad del brazo en la referencia fija:

$\omega_{sol} \frac{R_{sol}}{R_{sol}+R_{anillo}} + \omega_{anillo} \frac{R_{anillo}}{R_{sol}+R_{anillo}} = \omega_{brazo}$ . Haciendo  $k = \frac{R_{sol}}{R_{sol}+R_{anillo}}$  se tiene  $k\omega_{sol} + (1-k)\omega_{anillo} = \omega_{brazo}$  que representa la cinemática de la transmisión diferencial. El número de dientes de los engranes determina el factor  $k$  de la siguiente manera:  $\frac{N_{sol}}{N_{anillo}+N_{sol}}$ . Para los COBOTS, las transmisiones continuas son fundamentales, ya que se modifica la relación de transmisión en función de la posición del efector final. Por ejemplo, si el operador desea moverlo en una dirección prohibida, el controlador bloqueará las articulaciones para que el humano lo sienta y cambie de dirección. Se considera conectar el engrane

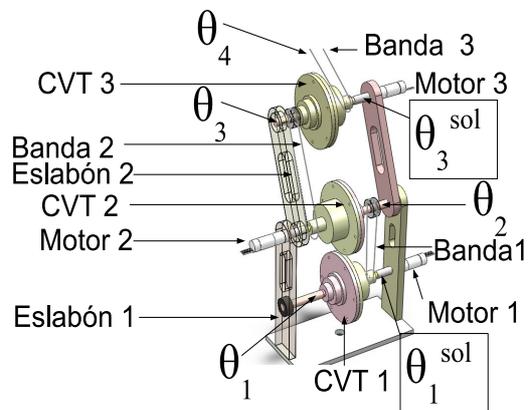


Figura 2. Esquema de la conexión de las CVTs a los eslabones.

sol de la transmisión a un motor de control, el anillo al eslabón siguiente y el brazo al eslabón anterior, ésta es la arquitectura serial de un COBOT, que permite únicamente un control de la posición del robot. Se puede observar en la figura 2.

El sistema posee cuatro grados de libertad, tres transmisiones y cuatro articulaciones. Las variables articulares se nombran  $\theta_i$  con  $i$  un entero entre 1 y 4.  $\theta_4$  representa el ángulo del último eslabón con respecto al eslabón anterior como

lo define la convención de Denavit-Hartenberg. En realidad representa la entrada del mecanismo, porque el operador actuará directamente en ella. Se reescribe la relación de transmisión para cada articulación:  ${}^j\omega_{brazo} = \dot{\theta}_j = k_j \dot{\theta}_j^{sol} + (1 - k_j) \dot{\theta}_{j+1}$  para  $j = \{1, 2, 3\}$ . Se acomodan para que aparezca la entrada del sistema,  $\dot{\theta}_4$ . Ésto produce la matriz  $K$  que vincula las velocidades articulares a las variables de control y la entrada:  $\dot{\Theta} = K [\dot{\theta}_1^{sol}, \dot{\theta}_2^{sol}, \dot{\theta}_3^{sol}, \dot{\theta}_4]^T$ . Donde

$$\Theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4]^T \text{ y } K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2(1-k_1) & k_3(1-k_2)(1-k_1) & (1-k_3)(1-k_2)(1-k_1) \\ 0 & k_2 & k_3(1-k_2) & (1-k_3)(1-k_2) \\ 0 & 0 & k_3 & 1-k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### III. CINEMÁTICA DIRECTA Y MATRIZ JACOBIANA

La cinemática directa permite conocer la posición del efector final, conociendo los valores de las variables articulares. En cada articulación se coloca un sistema de coordenadas y se sacan los parámetros de Denavit-Hartenberg (tabla I). La primera articulación permite una rotación alrededor de un eje vertical. Lo que ubica el efector final en el plano horizontal. Las otras tres articulaciones producen una rotación con respecto a un eje horizontal y perpendicular a los eslabones. Lo que logra posicionar el efector final en el plano vertical. El sistema es un péndulo de tres barras cuyo plano de trabajo gira al rededor del eje vertical pasando por la base del péndulo, como se muestra en la figura 3.

Se nombran  $a_i$  a las longitudes de los eslabones y  $d_i$  a las

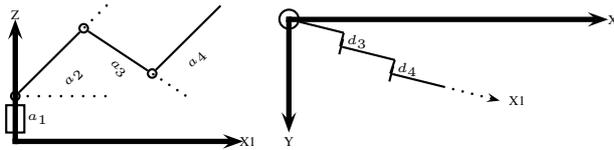


Figura 3. Representación del COBOT en la vista lateral y superior.

distancias en la dirección perpendicular a los ejes. La base

TABLA I  
PARÁMETROS DE DENAVIT-HARTENBERG

$i$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\alpha_{i-1}$	$\theta_i$
1	0	$a_1$	0	$\theta_1$
2	0	0	$\frac{\pi}{2}$	$\theta_2$
3	$a_2$	$d_3$	0	$\theta_3$
4	$a_3$	$d_4$	0	$\theta_4$
5	$a_4$	0	0	0

del robot se sitúa en el origen del sistema (X,Y,Z). Cada línea de la tabla proporciona la matriz de transformación de la extremidad del eslabón  $i$  en la referencia anterior, es decir, en la referencia de la extremidad del eslabón  $i - 1$ . Multiplicandolas se obtiene la matriz de transformación que proporciona la posición  $\vec{P} = [P_x, P_y, P_z]^T$  y la matriz de orientación del efector final, llamada  $Ori$  cuya primera columna, llamada  $\vec{N}$ , apunta siempre hacia la dirección del último eslabón. Sean  $C_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$  y  $S_i = \sin(\theta_i)$ .

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} \{a_4 C_{234} + a_3 C_{23} + a_2 C_2\} C_1 + (d_4 + d_3) S_1 \\ \{a_4 C_{234} + a_3 C_{23} + a_2 C_2\} S_1 + (d_3 + d_4) C_1 \\ a_4 S_{234} + a_3 S_{23} + a_2 S_2 + a_1 \end{bmatrix}$$

$$Ori = [\vec{N}, \vec{O}, \vec{A}] = \begin{bmatrix} C_1 C_{234} & -S_{234} C_1 & S_1 \\ S_1 C_{234} & -S_1 S_{234} & -C_1 \\ S_{234} & C_{234} & 0 \end{bmatrix}$$

La velocidad traslacional del efector final depende linealmente de las velocidades articulares:  $\dot{P} = J(a_i, \Theta) \dot{\Theta} = J(a_i, \Theta) K [\dot{\theta}_1^{sol}, \dot{\theta}_2^{sol}, \dot{\theta}_3^{sol}, \dot{\theta}_4]^T$ . La matriz  $J(a_i, \Theta)$  depende no-linealmente de las variables articulares,  $\Theta$ , y de las longitudes de los eslabones,  $a_i$ .

### IV. CINEMÁTICA INVERSA

En la sección anterior se obtuvo la posición del efector final dadas las variables articulares. Esta parte trata del problema inverso, dada la posición se buscan las variables articulares. Es importante cuando se desea que el efector final siga una trayectoria conocida porque se controlan primero las articulaciones del robot y luego la posición de su efector final. El ángulo de rotación entre el eje

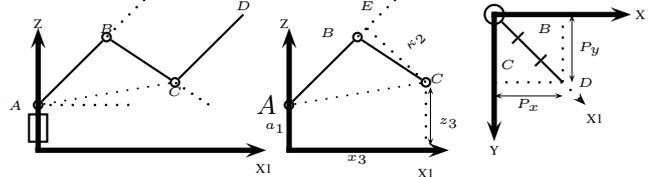


Figura 4. Representación del COBOT de 4 gdl en la vista lateral

fijo  $X$  y el eje  $X_1$  es  $\theta_1 = \arctan 2(P_y, P_x)$  como se puede observar en la figura 4. Dadas las coordenadas del punto D (el efector final) se puede conseguir  $(x_3, z_3)$ , las coordenadas del punto C, con  $x_3 = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} - a_4 C_{234}$  y  $z_3 = P_z - a_4 S_{123} - a_1$ . Dadas las coordenadas del punto C en la referencia (X1,Z), se emplea la ley de los cosenos en el triángulo ABC para expresar  $AC^2$  que se calcula también con el triángulo AEC, rectángulo en E. Lo que lleva a  $\theta_3 = \arccos\left(\frac{x_3^2 + (z_3 - a_1)^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_3 a_2}\right)$ .

Se proyecta perpendicularmente BC (eslabón 3) sobre la recta AB (eslabón 2) para definir el punto E. Además  $AE = \kappa_1 = a_2 + a_3 C_3$  y  $\kappa_2 = a_3 S_3$ . Sea  $\gamma$  el ángulo  $\widehat{BAC} = \widehat{EAC} = \arctan 2(\kappa_2, \kappa_1)$ . En otras palabras  $\gamma$  es el ángulo entre AC y el eslabón 2. La posición del punto C lleva al ángulo entre la recta AC y el eje horizontal con  $\arctan 2(z_3, x_3)$ .  $\theta_2$  es el ángulo entre  $X_1$  y AB por lo tanto su expresión es:  $\theta_2 = \arctan 2(z_3, x_3) - \gamma$ . El vector  $\vec{N}$  de la matriz de orientación  $Ori$  está siempre en la dirección del último eslabón. Entonces  $\theta_{234} = \arctan 2(N_z, N_x)$ . Por lo tanto  $\theta_4 = \theta_{234} - \theta_2 - \theta_3$ . Este sistema necesita el conocimiento de la posición y orientación para poder resolver su cinemática inversa.

### V. TRAYECTORIA DESEADA

Los COBOTs son robots pasivos que necesitan que un humano mueva su efector final. Generalmente se asocia el concepto de COBOT con las superficies virtuales como en (Michael A. Peshkin, J. Edward Colgate, Carl A. Moore, R. Brent Gillespie, 2001). Por ejemplo, se puede definir un plano dentro del espacio de trabajo del robot que limita el movimiento del efector final sobre él. No se podrá atravesar, solamente se permitirá deslizar sobre éste. Además el plano no existe físicamente pero el operador lo percibirá debido al control de las CVTs. Para el diseño del COBOT se va a

restringir su movimiento a una sola trayectoria para la cual el mecanismo será óptimo.

Se desea que el efector final pueda deslizarse sobre un plano horizontal, por ejemplo, para realizar una tarea de grabado a lo largo de una trayectoria. Se quiere seguir partes de un semi-círculo en este plano a una cierta altura del plano XY. El radio del semi-círculo se nota  $r = 200\text{mm}$  y su centro en el plano horizontal de altura  $z_i = 100\text{mm}$  tiene por coordenadas  $(h_x, h_y) = (400, 200)$ . La trayectoria empieza en el punto  $(x_i, y_i, z_i) = (200, 200, 100)$  y termina en el punto  $(x_f, y_f, z_i) = (600, 400, 100)$ . El cambio de altura es de:  $z_f - z_i = 100\text{mm}$ . La posición deseada se nomina

$\tilde{P} = [P_x, \tilde{P}_y, \tilde{P}_z]^T$  con  $\tilde{P}_y = h_y + \sqrt{r^2 - (P_x + h_x)^2}$  y  $\tilde{P}_z = (z_f - z_i) \left\{ \frac{1}{\pi} [\arctan(P_x - h_1) + \arctan(-P_x + h_2)] + \frac{1}{2} \right\} + z_i$  con  $h_1 = 300\text{mm}$  y  $h_2 = 450\text{mm}$ . Se necesita el vector  $\vec{N}$  de la matriz de orientación para poder resolver la cinemática inversa. Si se desea que el efector final sea perpendicular al plano, es decir, verticalmente apuntando hacia abajo, se tienen los ángulos de Euler fijos siguientes  $\theta_y = \frac{\pi}{2}$ ,  $\phi_z = 0$  y  $\psi_x = 0$ . Igualando la matriz de orientación  $O_{ri}$  con la matriz de orientación obtenida con los ángulos de Euler se observa que:  $\theta_{234} = -\theta_y$ . Lo que lleva a la matriz:  $\tilde{O}_{ri} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Esta trayectoria respeta el

concepto de superficie virtual porque existe el cambio de altura del efector final que podría interpretarse como un sólido de forma trapezoidal de altura  $z_f - z_i$  puesto sobre un plano horizontal a la altura  $z_i$  entre los puntos  $h_1$  y  $h_2$  del eje X y de longitud infinita. Se puede observar la trayectoria deseada en la figura 7.

## VI. ESFUERZOS EN LOS ESLABONES

El diseño mecánico de un robot es importante como en cualquier estructura. Pequeños errores en el mecanismo pueden impedir el buen funcionamiento del robot. Por lo tanto se deben conocer las cargas aplicadas sobre la máquina y diseñar en función de ellas.

Se asume que la carga máxima del COBOT es de 50N en su extremidad y en todas las direcciones. El mecanismo cuenta con 3 transmisiones, 3 bandas, varios baleros, tres motores, cuatro sensores, más la herramienta para la realización de la tarea. Pero no se considera el peso de estos elementos porque la carga máxima los incluye.

La fuerza en el efector final, para cualquier mecanismo serial, se transmite en cada uno de los eslabones como lo muestra (Lung-Wen Tsai, 1999). La fuerza en el eslabón  $i$ , debida a la carga y a la gravedad, se expresa de la manera siguiente:  $\vec{f}_{i-1,i} = \vec{f}_{i,i+1} + m_i \vec{g}$ . Es decir, que la fuerza aplicada sobre el eslabón  $i - 1$  por el eslabón  $i$  es igual al peso del eslabón  $i$  más la fuerza aplicada sobre el eslabón  $i$  por el eslabón  $i + 1$ . La masa de cada eslabón depende del volumen y del material de construcción. Aplicando esta expresión de manera recursiva desde el efector final hasta la base se consiguen todas las fuerzas. Se obtienen los esfuerzos mediante la fuerza sometida sobre un área. Por

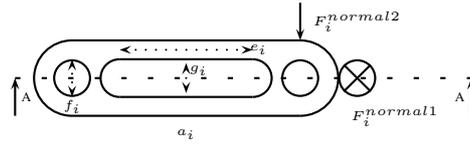


Figura 5. Un eslabón del COBOT y las fuerzas aplicadas

otra parte se simplifica la forma de los eslabones propuesta en (J. Alfonso Pámanes G., David González Flores, David González Campos, J. de Jesús Pámanes G., 2006) para reducir el número de variables del problema de optimización. Entonces se necesitan 5 parámetros para cada eslabón para describir su forma como se observa en la figura 5.

El volumen del eslabón es  $V_i = l_i(a_i w_i - e_i g_i - \frac{\pi}{4}(g_i^2 + 2f_i^2 - w_i^2))$ . La expresión entre paréntesis representa el área de la cara que se presenta en la figura 5 y la profundidad del eslabón es  $l_i$ . La otra sección es la sección AA de la figura 5 por lo tanto su área es:  $l_i(a_i + w_i - 2f_i - g_i - e_i)$ . Los esfuerzos normales son:  $\sigma_{1i} = F_i^{normal1} / [a_i w_i - e_i g_i - \frac{\pi}{4}(g_i^2 + 2f_i^2 - w_i^2)]$  y  $\sigma_{2i} = F_i^{normal2} / [l_i(a_i + w_i - 2f_i - g_i - e_i)]$  con  $i = \{1, 2, 3, 4\}$ . El subíndice 4 representa el efector final y el subíndice 1 representa el primer eslabón. Los esfuerzos informan sobre las fuerzas internas pero lo que se necesita es saber si el sólido las soporta. Cuando la resistencia del material es superior a  $N$  veces el esfuerzo entonces la pieza soporta la carga. La constante  $N$  se llama el factor de seguridad. Matemáticamente, se tiene:  $\frac{F}{A} = \sigma < \frac{S_y}{N} \Leftrightarrow F - A \frac{S_y}{N} < 0$  con  $A$  el área considerada. Los esfuerzos normales son una simplificación del análisis estático pero permiten obtener ecuaciones para que el programa de optimización pueda resolver el problema.

## VII. DISEÑO ÓPTIMO DE LOS ESLABONES

Comunmente el proceso de diseño es iterativo. Primero se define la tarea, luego se proponen dimensiones y se verifica que el mecanismo resiste a la carga. Después se proponen otras dimensiones de acuerdo a los resultados obtenidos. Lo que se pretende hacer con un programa de optimización es generar el diseño en una sola etapa. De antemano se definen los criterios de diseño, luego se expresan matemáticamente y se programan. El programa de optimización proporcionará las dimensiones óptimas según el criterio.

Se puede resumir el papel de los COBOTs en guiar al operador. Toda la fuerza necesaria para realizar la tarea está proporcionada por el operador a través del mecanismo. En el caso de los robots convencionales, los motores transmiten la potencia al mecanismo y al efector final. La eficiencia de la transmisión de potencia depende del jacobiano  $J$  y de la ecuación:  $\vec{\tau}^T J J^T \vec{F} = 1$  donde  $\vec{\tau}$  representa los pares de los motores y  $\vec{F}$  la fuerza transmitida. Ésta es la ecuación del elipsoide de fuerza. La orientación y forma del elipsoide depende del jacobiano. Esta matriz depende de las longitudes de los eslabones y de las variables articulares, por lo tanto la orientación y el tamaño del elipsoide varía

en función de la posición del efector final.

Se obtienen las mejores características de transmisión cuando el elipsoide toma forma de una esfera. Al contrario, en una configuración singular, una esfera unitaria en el espacio de los pares articulares se transforma en un cilindro en el espacio de las fuerzas del efector final. Por eso, la ventaja mecánica del manipulador se convierte infinitamente grande en algunas direcciones. Este concepto está descrito en (Lung-Wen Tsai, 1999).

El COBOT bloquea sus articulaciones cuando el operador desea mover en una dirección prohibida. El objetivo del programa de optimización es determinar los parámetros geométricos de todos los eslabones del robot de manera que se sienta la mayor fuerza de bloqueo posible. Se debe quitar el grado de libertad que corresponde al movimiento en la dirección prohibida. Entonces durante un bloqueo, el mecanismo debe transmitir los pares de los motores de control con la mayor eficiencia. En otras palabras, se debe orientar al elipsoide de fuerza en la dirección deseada y estirarla en esta dirección. Lo que corresponde a minimizar la norma al cuadrado del producto cruz entre la dirección del semi-eje 1 y la dirección deseada. Además, se maximiza el tamaño de este semi-eje.

Los COBOTs hacen que su efector final deslice sobre una superficie virtual. Para el diseño de los eslabones se ocupa una trayectoria. La tangente de la trayectoria representa la dirección deseada del efector final y la dirección prohibida es la perpendicular a la tangente. Entonces se debe orientar el vector propio 1 hacia la tangente y maximizar el tamaño de este semi-eje.

No todas las soluciones que minimizan la función objetivo pueden ser válidas, por ejemplo soluciones negativas. Por lo tanto se restringe el espacio de solución. Para obtener un diseño robusto que soporta las fuerzas externas se necesita calcular los esfuerzos normales en cada eslabón.

Se utilizan también otros criterios que limitan el ancho del eslabón con su longitud y la profundidad con su ancho. Además, se desea tener eslabones lo más ligero posible. Otra restricción consiste en el espacio de trabajo del robot. El efector final debe alcanzar todos los puntos de la trayectoria. En fin, la última restricción consiste en respetar la cinemática inversa. En la figura de la sección *cinemática inversa* se aplica la ley de los cosenos en el triángulo ABC porque el punto C llega a la posición  $(x_3, z_3)$  lo que respeta el triángulo ABC.

## VIII. PROGRAMA DE OPTIMIZACIÓN

El problema de diseño se establece como encontrar las dimensiones de cada eslabón y los parámetros de su hueco que minimizan la función objetivo,  $F_{obj}$ , sujeto a las restricciones presentadas en la sección anterior. Se emplea la función *fmincon* del programa *MATLAB* © que recibe como argumento un archivo donde se calcula la función objetivo y un archivo donde se calculan las restricciones. Primero la función elige los valores de las dimensiones de los eslabones, segundo, verifica que cumplen las res-

tricciones y luego evalúa la función objetivo y sus gradientes que dan información para elegir los nuevos valores de las variables. Se reproduce hasta alcanzar el mínimo de la función objetivo. El algoritmo genético *ga* de *MATLAB* © genera los valores iniciales de la función *fmincon*.

Los semi-ejes del elipsoide de fuerza dependen de los vectores propios de la matriz  $J.K.(J.K)^T$  donde  $J$  es la matriz jacobiana y  $K$  la matriz de transmisión descrita previamente. La matriz  $J.K$  representa la transmisión del par de control. Como se explicó anteriormente el jacobiano depende de las longitudes de los eslabones. Entonces variando estas longitudes se modifica la dirección de los vectores propios y los valores propios.

Sean  $grad$  el vector tangente a la trayectoria,  $\vec{V}_n$  el vector propio  $n$  de  $J.K.(J.K)^T$  y  $\nu_n$  el valor propio  $n$  de  $J.K.(J.K)^T$  con  $n = \{1, 2, 3\}$ . Las dimensiones de los semi-ejes del elipsoide valen  $1/\sqrt{\nu_n}$ .  $\vec{V}_n$  representa la dirección del semi-eje  $n$  del elipsoide de fuerza. En resumen, se debe llevar a cero  $\vec{V}_1 \times grad$  porque  $grad$  simboliza la dirección deseada, lo que orienta el elipsoide. Para estirarla se maximizan  $\nu_2$  y  $\nu_3$  y se minimiza  $\nu_1$ .

**La expresión de la función objetivo** que se minimiza es:  $F_{obj} = \|\vec{V}_1 \times grad\|^2 + \nu_1 - \nu_2 - \nu_3 + \sum_{i=1}^4 [l_i(a_i w_i - e_i g_i - \frac{\pi}{4}(g_i^2 + 2f_i^2 - w_i^2))]$ . La última sumatoria se interpreta como el volumen de los eslabones.

**Las restricciones de las dimensiones** son:

- $raz w_i - a_i < 0$  con  $raz$  la constante de proporcionalidad entre la longitud del eslabón  $i$ ,  $a_i$  y su ancho  $w_i$ .
- $raz l_i - w_i < 0$  con,  $l_i$ , la profundidad.
- $a_3 - a_2 < 0$ ,  $a_4 - a_3 < 0$  para tener menos masa en los eslabones más alejados de la base del COBOT.
- $\sqrt{x_f^2 + y_f^2 + (z_f - a_1)^2} - \sum_{i=2}^4 a_i < 0$  para alcanzar todos los puntos de la trayectoria.
- $x_3^2 + (z_3 - a_1)^2 - (a_3 + a_2)^2 < 0$  para respetar la ley del coseno en el triángulo ABC de la figura 4.
- $\sqrt{x_3^2 + z_3^2} - a_3 - a_2 < 0$ ,  $-\sqrt{x_3^2 + z_3^2} + a_3 - a_2 < 0$ ,  $-\sqrt{x_3^2 + z_3^2} - a_3 + a_2 < 0$  para que ABC sea un triángulo.

Los valores mínimos se presentan en la tabla II. Se usarán baleros cuyo diámetro exterior es de 35 mm por lo tanto para todos los eslabones se tiene  $f_i = 35$ mm. Se limita la profundidad a 50mm para cuestiones de peso. Ninguna otra variable tiene límite máximo.

## IX. RESULTADOS

La tabla II muestra las soluciones del problema de diseño y de optimización. Los superíndices definen si el número correspondiente es óptimo o mínimo. El programa de optimización grafica el vector propio 1 del elipsoide de fuerza como el gradiente de la trayectoria en 10 puntos de la curva deseada. Se puede observar la configuración de los eslabones a lo largo de la trayectoria en la figura 6. El programa entrega soluciones que cumplen las restricciones

TABLA II

PARÁMETROS MÍNIMOS Y ÓPTIMOS DE LOS ES LABONES

$a_i^{min}$	$w_i^{min}$	$l_i^{min}$	$e_i^{min}$	$g_i^{min}$	$f_i$
50	40	15	10	10	35
$a_1^{opt}$	$a_2^{opt}$	$a_3^{opt}$	$a_4^{opt}$	$w_1^{opt}$	$w_2^{opt}$
425,459	405,459	270,9161	165	55	55
$w_3^{opt}$	$w_4^{opt}$	$l_1^{opt}$	$l_2^{opt}$	$l_3^{opt}$	$l_4^{opt}$
55	55	15	15	15	8
$e_1^{opt}$	$e_2^{opt}$	$e_3^{opt}$	$e_4^{opt}$	$g_1^{opt}$	$g_2^{opt}$
335,459	315,459	180,9161	75	35	35
$g_3^{opt}$	$g_4^{opt}$	$f_i$			
35	35	35			

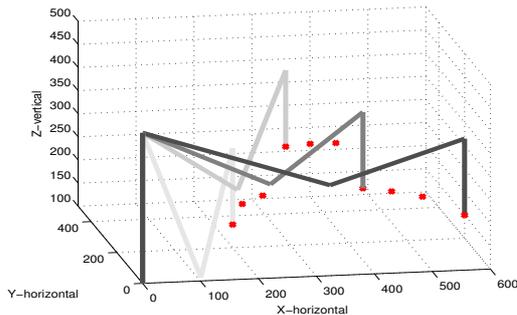


Figura 6. Configuraciones en cuatro puntos de la trayectoria

minimizando la función objetivo. Los resultados presentados son válidos por las siguientes razones:

- Se respeta la cinemática inversa y la orientación deseada.
- Los eslabones tienen una forma coherente, por ejemplo, la longitud del hueco es menor que la longitud del eslabón.
- Durante la ejecución del programa cada nuevo valor de las dimensiones tiende a hacer disminuir la función objetivo. En cada iteración del algoritmo la función objetivo decrece.
- Igualmente los gradientes de la función objetivo decrecen y alcanzan un valor cercano a cero.
- Después de varias ejecuciones del algoritmo en las mismas condiciones se obtienen las mismas longitudes de los eslabones y el mismo valor óptimo de la función objetivo.

La figura 6 simboliza el robot en cuatro puntos de la trayectoria (curva punteada). Las líneas grises encarnan los cuatro eslabones. El primer eslabón, cuya base se ubica en el punto (0,0,0), parece fijo en todos los casos porque gira alrededor del eje vertical. El primer punto es el más cercano al primer eslabón. Se nota que en todos los puntos se respeta la orientación deseada. El último eslabón siempre apunta verticalmente hacia abajo.

El dato interesante en la figura 7 es el ángulo entre el vector negro, representando la tangente a la trayectoria en el punto considerado, y el gris, primer vector propio de la matriz  $(J.K)^T.J.K$ . El objetivo es de orientar el vector

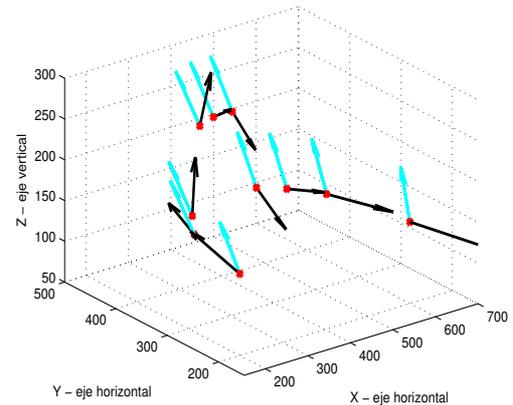


Figura 7. Vectores propios, trayectoria y sus gradientes

gris hacia el negro a lo largo de la trayectoria. No se empalman, pero las longitudes óptimas que definen al vector gris proporcionan la función objetivo mínima.

## X. CONCLUSIONES

Este artículo describe un método de diseño en un solo paso, sin necesidad de tener experiencia como diseñador. Se emplea únicamente las expresiones matemáticas de los diferentes criterios de diseño. Además, el diseño mecánico es óptimo para una trayectoria y una tarea específica. Ésto permite ahorrar material y tiempo. El uso de CVTs basadas en engranajes planetarios simplifican el diseño. Los esfuerzos normales, la orientación del elipsoide de fuerza y el volumen de los eslabones, son los criterios de diseño utilizados en el programa de optimización que proporciona las gráficas presentadas en este artículo. El trabajo por realizar es la construcción de los eslabones. Luego se ensamblará el robot y se producirá el algoritmo de control.

## XI. AGRADECIMIENTOS

En el proceso de la investigación se obtuvo apoyo del departamento de Ingeniería Eléctrica y los talleres del CINVESTAV. Se agradece también el apoyo económico del CONACyT mediante una beca de maestría para el primer autor (número de registro 210045) y mediante los proyectos de investigación 084060 y 61838.

## REFERENCIAS

- Lung-Wen Tsai. *Robot Analysis, The mechanics of serial and parallel Manipulator*. Wiley Interscience. New York.
- O. Schneider, J. Troccaz, O. Chavanon, D. Blin (2000). *PADyC : a Synergistic Robot for Cardiac Puncturing*.
- Michael A. Peshkin, J. Edward Colgate, Carl A. Moore, R. Brent Gillespie (2001). *Cobot Architecture*
- Yuhong Dong, Lixun Zhang, Dunmin Lu (2004). *A Novel Cobot and Control*
- J. Alfonso Pámanes G., David González Flores, David González Campos, J. de Jesús Pámanes G. (2006). *Analysis and Optimization of Links of a Direct-Drive 3 dof Robotic Manipulator*
- J. Krüger, R. Bernhardt, D. Surdilovic (2006). *Intelligent Assist Systems for Flexible Assembly*