

# Existencia de una órbita periódica en el convertidor buck con un control PWM

M. Miranda

Facultad de Ingeniería Ensenada-UABC

Ensenada BC 22800, México

mmiranda@uabc.mx

Teléfono: (646)-1744333

J. Alvarez

Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones-CICESE

Ensenada BC 22800, México

jgalvar@cicese.mx

Teléfono: (646)-1750500

**Resumen**—En este trabajo se muestran condiciones para que se presente una única interrupción por ciclo de la señal de modulación en el convertidor buck con un control PWM, sin considerar el flip-flop utilizado en el diseño clásico para limitar la frecuencia de conmutación del interruptor. El análisis presentado considera el modelo discontinuo del convertidor buck, así como la teoría del control por modos deslizantes. La técnica de análisis propuesta puede generalizarse a esquemas de control diferentes al considerado en este trabajo.

**Palabras clave:** buck, pwm, oscilación periódica, modelo discontinuo

## I. INTRODUCCIÓN

Los convertidores conmutados son dispositivos electrónicos ampliamente usados para adecuar los niveles de voltaje necesarios para alimentar equipos electrónicos de diversa índole. La naturaleza discontinua de estos dispositivos les permite mostrar un comportamiento dinámico muy diverso, desde puntos de equilibrio hasta oscilaciones caóticas.

En este trabajo se estudia el tipo más sencillo de estos dispositivos conocido como convertidor reductor (“buck”). Cuando se utiliza como convertidor CD-CD, se desea que el voltaje de salida esté compuesto por una señal periódica más un componente de CD correspondiente al voltaje de salida deseado. En un ambiente libre de perturbaciones se espera que la señal de control  $u$  sea un tren de pulsos de frecuencia y ciclo de trabajo constante, la cual permite al circuito buck exhibir el comportamiento deseado. Sin embargo, en la práctica es común la presencia de incertidumbres, lo que hace necesario el uso de un control retroalimentado para garantizar que el voltaje de salida se mantenga dentro de ciertos límites de diseño.

En el trabajo de (Miranda y Alvarez, 2009) se muestra que con un control simple, como un control proporcional, dada la naturaleza discontinua del circuito buck se presenta el fenómeno dinámico de modos deslizantes, lo cual ocasiona que la frecuencia de conmutación del interruptor sea muy alta, produciendo un gran desgaste en los componentes

del circuito. Una de las formas de limitar la frecuencia de conmutación es utilizar un bloque de adecuación PWM (Pulse Width Modulation). El principio básico de este bloque consiste en comparar la señal del controlador con una señal periódica externa, conocida como “señal de modulación”  $m(t)$ . Si se selecciona adecuadamente la señal de modulación y la ganancia del control para un conjunto de parámetros dados, se tiene el voltaje de salida deseado. Sin embargo, existen pocos estudios que muestren condiciones bajo las cuales el bloque PWM garantiza una frecuencia constante de conmutación en el interruptor, utilizándose en la práctica un flip-flop para limitar la frecuencia del interruptor.

Considerando el trabajo de (Alvarez y Curiel, 1997) es posible estudiar el circuito buck con un control proporcional y un bloque PWM, como un sistema de segundo orden retroalimentado con una función no lineal a la entrada del sistema. Myles y Di Bernardo en (Myles y Di Bernardo, 2000) muestran que el flip-flop genera fenómenos no lineales en la dinámica del convertidor buck. Si no se considera éste, el único elemento no lineal es el interruptor.

En este trabajo se muestran condiciones bajo las cuales en estado estacionario se presenta una frecuencia constante de conmutación del interruptor y el voltaje de salida dentro ciertos parámetros de diseño. Estas condiciones se obtienen utilizando el modelo discontinuo del convertidor, así como la teoría de control por modos deslizantes. Los resultados presentados complementan a los trabajos (Benadero et al., 1999) y (Krein y Bass, 1990), en los cuales se realiza un estudio del circuito buck a través de mapeos discretos.

En la siguiente sección se presenta el modelo matemático utilizado, así como la representación del control y el bloque PWM. En la sección 3 se dan las condiciones bajo las cuales el convertidor presenta una frecuencia constante de conmutación en el interruptor y el voltaje de salida deseado. Se da un ejemplo en la sección 4. Finalmente, en la última sección se dan las conclusiones del trabajo.

## II. MODELO MATEMÁTICO

El convertidor buck se muestra en la figura 1

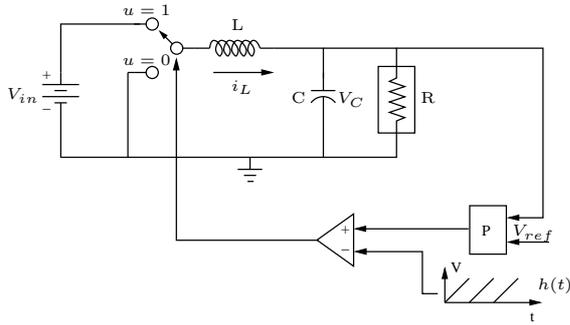


Figura 1. Esquema del convertidor buck

Considerando la corriente del inductor  $i_L$  y el voltaje del capacitor  $v_C$  como  $z_1$  y  $z_2$  respectivamente, la dinámica del convertidor es representada por el modelo

$$\dot{z}_1 = \frac{-z_2 + uV_{in}}{L}, \quad (1)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{z_1 - z_2/R}{C}, \quad (2)$$

donde la señal  $u$  que representa la posición del interruptor puede ser modelada por la función (Sira-Ramirez y Ilic, 1988)

$$u = \frac{1 + \text{sign}(\sigma(z, t))}{2}. \quad (3)$$

La función  $\sigma(z, t)$ , conocida como “estrategia de conmutación”, representa al control, que en el caso del presente trabajo es:

$$\text{constante} \sigma(z, t) = k_p(\bar{z}_2 - z_2) - m(t), \quad (4)$$

donde  $\bar{z}_2$  es una constante que representa el voltaje de salida deseado y la señal de modulación  $m(t)$  se define de la siguiente manera,

$$m(t) = (V_u - V_l) [t/T - \text{int}(t/T)] + V_l, \quad (5)$$

donde  $V_u$  y  $V_l$  son los valores superior e inferior, respectivamente,  $\text{int}(t/T)$  es una función que regresa la parte entera de  $t/T$ , y  $T$  es el periodo de la señal de modulación.

El modelo dado por las expresiones (1)-(2) presenta varios parámetros; una forma de simplificar el estudio del convertidor es normalizar el modelo a través de la transformación

$$x_1 = \frac{\sqrt{L}}{V_{in}\sqrt{C}} z_1, \quad (6)$$

$$x_2 = \frac{1}{V_{in}} z_2, \quad (7)$$

y el escalamiento en tiempo

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{LC}} t. \quad (8)$$

El modelo normalizado del convertidor es dado por la expresión

$$\dot{x}_1 = -x_2 + u, \quad (9)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_2}{R_n} + x_1,$$

donde  $R_n = R\sqrt{C/L}$  es conocido como factor de calidad del circuito  $RLC$ , y  $\dot{x}_i = dx_i/d\tau$ . La estrategia de conmutación en términos del modelo normalizado es dada por la expresión

$$\sigma = V_{in} (k_p (\bar{x}_2 - x_2) - h(t)), \quad (10)$$

donde  $h(t) = m(t)/V_{in}$  y  $\bar{x}_2 = \bar{z}_2/V_{in}$ .

La corriente de rizo en el inductor, considerando el modelo normalizado, es

$$\Delta x_1 = DT \bar{x}_2, \quad (11)$$

y el voltaje de rizo en el capacitor es

$$\Delta x_2 = \frac{(DT)^2}{2} \bar{x}_2, \quad (12)$$

donde  $D$  es el ciclo de trabajo, que se define como

$$D = \frac{\tau_s}{T}. \quad (13)$$

$\tau_s$  es el tiempo que la fuente está conectada al circuito  $RLC$  por ciclo de la señal de modulación  $h(t)$ . Las expresiones (11) y (12) se obtienen considerando la dinámica seccionalmente lineal del convertidor y que se presenta una sola interrupción por periodo.

## III. ÓRBITA PERIÓDICA

El comportamiento deseado en el convertidor buck se muestra en la figura 2.

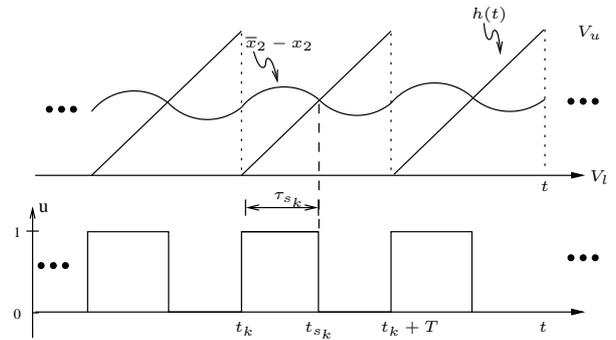


Figura 2. Comportamiento deseado de  $\bar{x}_2 - x_2$ ,  $h(t)$  y  $u$

Si el convertidor presenta el comportamiento descrito en la figura 2, puede ser modelado por la expresión

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax + B_1 u, & \sigma(x, t) > 0; \\ Ax + B_2 u, & \sigma(x, t) \leq 0; \end{cases} \quad (14)$$

donde  $\sigma$  es dado por la expresión (10),

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{R_n} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En el  $k$ -ésimo intervalo, el sistema (14) toma la forma

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax + B_1, & t_k \leq t < t_{s_k}; \\ Ax, & t_{s_k} \leq t < t_k + T; \end{cases} \quad (15)$$

donde  $t_{s_k} = t_k + \tau_{s_k}$ ,  $\tau_{s_k} \in (0, T)$  corresponde al instante de conmutación (véase la figura 2).

El instante de conmutación  $t_{s_k}$  en el sistema (15), es determinado por el control retroalimentado. En el instante de conmutación la estrategia de conmutación es

$$\sigma(x, t_{s_k}) = V_{in}(k_p(\bar{x}_2 - x_2(t_{s_k})) - h(t_{s_k})) = 0. \quad (16)$$

Si el voltaje de salida presenta el comportamiento deseado se tiene que

$$x(t_k) = x(t_k + T). \quad (17)$$

De (15) se tiene que el estado en el instante  $t_{s_k}$  es dado por

$$x(t_{s_k}) = e^{A(t_{s_k} - t_k)} x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{s_k}} e^{A(t_{s_k} - \xi)} B_1 d\xi, \quad (18)$$

y el estado en el instante  $t_k + T$  es dado por

$$x(t_k + T) = e^{A(t_k + T - t_{s_k})} x(t_{s_k}). \quad (19)$$

Considerando (18) en (19), se tiene que el estado en el instante  $t_k + T$  es

$$\begin{aligned} x(t_k + T) &= e^{AT} x(t_k) + e^{A(t_k + T)} \int_{t_k}^{t_{s_k}} e^{-A\xi} d\xi B_1 \\ &= e^{AT} x(t_k) + e^{AT} \int_0^{\tau_{s_k}} e^{-A\phi} d\phi B_1, \end{aligned} \quad (20)$$

donde  $\phi = \xi - t_k$ . Si se considera que  $x(t_k) = x_k$ ,  $x(t_k + T) = x_{k+1}$  y observando que la matriz  $A$  es no singular, el estado en el instante  $t_k + T$  es dado por

$$x_{k+1} = e^{AT} [x_k - (e^{-A\tau_{s_k}} - I) A^{-1} B_1], \quad (21)$$

donde  $I$  es la matriz identidad.

En estado estacionario, sin considerar perturbaciones e incertidumbres paramétricas, si el estado exhibe una órbita periódica con un periodo  $T$  se tiene que  $\tau_{s_k}$  es una constante (denotada como  $\tau_s$ ) y la condición (17) se debe cumplir. Entonces se tiene que el estado en el instante  $t_k$  es

$$x_k = -M(A, T, \tau_s) e^{A(T - \tau_s)} A^{-1} B_1, \quad (22)$$

donde

$$M(A, T, \tau_s) = (I - e^{AT})^{-1} (I - e^{A\tau_s}). \quad (23)$$

Dada alguna matriz constante  $A$ , y los parámetros  $T$ ,  $\tau_s$ , la expresión (22) da los valores en estado estacionario, en el instante  $t_k$ , del estado del convertidor buck en lazo abierto cuando presenta una órbita periódica con un periodo  $T$ . Al ser el comportamiento en lazo abierto y estado estacionario, se tiene que  $x_2(t_k) \in (0, 1)$ .

El controlador PWM conmuta la posición del interruptor en el instante  $\tau_k$ , cuando la condición (16) es satisfecha.

Entonces, si consideramos (16), (18) y (22) se llega a la expresión

$$\begin{bmatrix} x_1(kT + \tau_s) \\ \bar{x}_2 - (h(kT + \tau_s)/k_p) \end{bmatrix} = -M(A, T, \tau_s) A^{-1} B_1. \quad (24)$$

En general,  $M(A, T, \tau_s)$  es una matriz que contiene términos no lineales dependientes de  $T$  y  $\tau_s$ . Sin embargo, dada una matriz constante  $A$  y un periodo  $T$  entonces (24) se vuelve un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,  $\tau_s$  y  $x_1(\tau_s)$ . Encontrando la solución de (24) se obtienen los valores de  $\tau_s$  y  $x_1(\tau_s)$ , y utilizando estos valores en (16) se obtiene el valor de  $x_2(\tau_s)$ . Reemplazando los valores obtenidos de  $\tau_s$ ,  $x_1(\tau_s)$  y  $x_2(\tau_s)$  en (22) se obtienen los valores de  $x_1(t_k)$  y  $x_2(t_k)$  que corresponden al estado estacionario del convertidor buck cuando exhibe una órbita 1-periódica con periodo  $T$ , cumpliéndose la condición (16).

Es importante notar que la expresión (22) es una ecuación trascendental, por lo que no existe una solución analítica. Sin embargo, es posible encontrar un conjunto de parámetros  $R_n$ ,  $V_{in}$ , un voltaje de salida deseado  $\bar{x}_2 \in (0, 1)$ , una señal de modulación  $h(t)$  con algunos valores  $V_i$  y  $V_u$  obtenidos por diseño, y  $T$ , tal que es posible calcular una solución numérica para (22) y encontrar un  $\tau_s \in (0, T)$ , que satisfagan la condición (16), y que el voltaje de rizo  $\Delta x_2 < \delta$ , y  $x_1(t) > 0$ . Sin embargo, lo anterior es posible cuando se considera el sistema (15), el cual no está bajo la acción del control PWM. En otras palabras, que se cumpla la condición (16) no permite garantizar la existencia de una órbita 1-periódica en el circuito buck con un control PWM.

El conjunto de parámetros que se obtengan con el procedimiento descrito anteriormente sólo permite garantizar que, bajo la acción de un control ideal en estado estacionario, la estrategia de conmutación tiene el comportamiento

$$\sigma \begin{cases} > 0, & t_k < t < t_k + \tau_s; \\ = 0, & t = \tau_s; \\ < 0, & t_k + \tau_s < t < t_k + T. \end{cases} \quad (25)$$

Considérese nuevamente que el circuito está en estado estacionario, y que se está analizando únicamente el intervalo  $t \in (t_k, t_k + T)$ . Se tiene que, para que exista una sola conmutación en el interruptor, la estrategia de conmutación debe representar a una superficie discontinua de conmutación; es decir, que una vez que la órbita del sistema llega a la superficie de discontinuidad, debe atravesar ésta.

La condición necesaria para que la estrategia de conmutación atraviese la superficie discontinua de conmutación solamente una vez en un periodo es:

$$\sigma \dot{\sigma} \begin{cases} < 0, & t_k < t < t_k + \tau_s; \\ > 0, & t_k + \tau_s < t < t_k + T. \end{cases} \quad (26)$$

Considerando la condición (25), se tiene que la expresión (26) es válida sólo si

$$\dot{\sigma} < 0, \quad t_k < t < t_k + T. \quad (27)$$

En el caso de la estrategia de conmutación (10), la condición anterior se satisface cuando

$$\dot{x}_2 > -\frac{\dot{h}(t)}{k_p}. \quad (28)$$

Como el análisis sólo se realiza en el intervalo  $(t_k, t_k + T)$ , se tiene que

$$\dot{h}(t) = \frac{V_u - V_l}{V_{in}T}, \quad \forall t \in (t_k, t_k + T). \quad (29)$$

Sustituyendo (29) en (28)

$$\dot{x}_2 > -\frac{V_u - V_l}{V_{in}k_pT}, \quad (30)$$

considerando la expresión (7) se tiene que

$$\min(\dot{x}_2) = \min\left(\left(-1 + \frac{DT}{R_n}\right) \frac{\Delta x_1}{2}\right) < -\frac{\Delta x_1}{2}, \quad (31)$$

sustituyendo (31) en (30)

$$\frac{\Delta x_1}{2} < \frac{V_u - V_l}{V_{in}k_pT}, \quad (32)$$

sustituyendo la corriente de rizo dada por la expresión (11) en la expresión (32) se tiene la siguiente desigualdad

$$0 < \frac{2(V_u - V_l)}{V_{in}k_pT} + \tau_s - T. \quad (33)$$

Si un conjunto de parámetros cumple con las condiciones (24) y (33), entonces el convertidor presentará una órbita periódica con periodo  $T$  en los estados, así como una frecuencia de conmutación en el interruptor igual a la frecuencia de la señal de modulación  $h(t)$ .

#### IV. EJEMPLO

Para ilustrar los resultados de la sección anterior, se diseñó un convertidor con una frecuencia de operación normalizada de 1189/3363 (de 20KHz en el sistema sin normalizar), un voltaje de rizo de 10% del voltaje de salida,  $\bar{x}_2 = 1/2$ ,  $k_p = 1$  y  $V_{in} = 20V$ . Con los parámetros anteriores, se tiene que el valor del factor de calidad necesario para cumplir las reglas de diseño clásicas es  $R_n = 0,707106781$  (Mohan, N. et al., 2000). Los valores los valores  $V_u = 0,4$  y  $V_l = -0,4$ , y utilizando la expresión (18) para calcular  $\tau_s$ , y evaluando la condición (32) se obtiene

$$0 < 0,2757$$

lo cual es válido, por lo que el sistema presenta una órbita 1-periódica. En la figura 3, se muestra la evolución en tiempo de  $x_1$  y  $x_2$ .

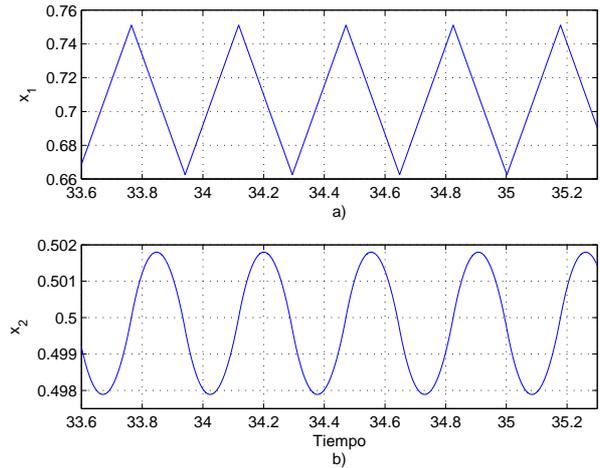


Figura 3. Evolución en tiempo exhibiendo una órbita periódica en: a)  $x_1$ , b)  $x_2$

#### V. CONCLUSIONES

Las condiciones presentadas en la sección 3 permiten garantizar que el convertidor buck presente el comportamiento deseado, sin necesidad de utilizar un flip-flop para limitar la frecuencia de conmutación del interruptor. En caso que se esperen variaciones paramétricas que no permitan cumplir la condición (33) se justificará el uso del flip-flop.

Una condición similar a la (33) se puede desarrollar para diferentes esquemas de control, a partir de la técnica de análisis propuesta en la sección 3.

Las condiciones mostradas en este trabajo son sólo suficientes, por lo que el convertidor buck puede presentar una órbita periódica sin cumplir dichas condiciones.

#### REFERENCIAS

- Miranda, M. y Alvarez, J. (2009). Bifurcations and chaos produced by the modulation signal in a PWM buck converter. *Chaos, Solitons & Fractals*, doi:10.1016/j.chaos.2009.03.133
- Benadero, L., El Aroudi, A., Toribio, E., Olivar, G. y Martinez-Salamero, L. (1999). Characteristic curves to analyze limit cycles behavior of DC-DC converters, *Electron. Lett.* **35**, 687-789.
- Krein, P. T. y Bass, R. M., Types of instability encountered in simple power electronics circuits: Unboundedness, chattering, and chaos, *Applied Power Electronics Conf., APEC'90*, 191-194.
- Alvarez, J. y Curiel, L. E. (1997). Bifurcations and Chaos in a Linear Control System with Saturated Input. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **7**(8), 1811-1822.
- Myles, S. y Di Bernardo, M. (2000). Preventing Multiples Switchings in Power Electronic Circuits: Effects of the Latch on the Nonlinear Dynamics of the DC-DC Buck Converter. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **10**(2), 431-442.
- Sira-Ramirez, H. y Ilic, M. (1988). A Geometric Approach to the Feedback Control of Switch Mode DC-to-DC Power Supplies. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Application*. **10**(10), 1291-1297.
- Mohan, N., Undeland, T. M. y Robbins, W. P. (2002). *Power Electronics: Converters, Applications, and Design*, Wiley.