

Controlador de dos grados de libertad para sistemas inestables con retardo usando un enfoque polinomial.

R. J. Vazquez Guerra*, J.F. Marquez Rubio* y B. del Muro Cuéllar*.

*Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad

Culhuacan, Instituto Politécnico Nacional, Santa Ana 1000, Coyoacán,

D.F., 04430, México, rjvvg@yahoo.com.mx, jfcomr23@yahoo.com.mx, bdelmuro@yahoo.com

Resumen—Los procesos con retardo de tiempo significativo en el canal de entrada son comúnmente encontrados en la práctica. El control de estos procesos es un problema desafiante por la dificultad de compensar los efectos inducidos por dichos retardos. En este trabajo, se propone una nueva metodología de control a través de una retroalimentación dinámica de salida para sistemas inestables con retardo de tiempo en el canal de entrada. La estrategia de control comprende sistemas de cualquier orden. Para la sintonización de los controladores se considera un enfoque polinomial y una aproximación de Padé del término retardo. Adicionalmente se considera el rechazo de perturbaciones de tipo escalón y seguimiento de referencia. Se presentan simulaciones numéricas para ilustrar la efectividad de la estrategia propuesta.

Palabras clave: Retardos de tiempo; Aproximación de Padé; Enfoque Polinomial.

I. INTRODUCCIÓN

Los retardos en la entrada de control son frecuentemente encontrados en procesos químicos, de manufactura, metalurgia y biotecnológicos (Kolmanovskii V. B. y A. Myshkis, 1999), (Niculescu S. I., 2001). En comparación con los procesos sin retardo, la presencia de un retardo de tiempo incrementa la dificultad para obtener un controlador (Luyben, W. L., 2001). En la práctica, es bien sabido que el rendimiento alcanzable (i.e., tiempos de operación, sobreimpulsos, etc.) de un controlador puede ser seriamente afectado si el proceso tiene un retardo de tiempo relativamente grande en comparación con la constante de tiempo del sistema (Marshall, J.E., 1979), (Malek-Zavarei M. y Jamshidi M., 1987). En este caso, la compensación del retardo de tiempo puede ser necesaria para mejorar el desempeño de control.

Entre algunas soluciones propuestas para el control de este tipo de sistemas se han utilizado los observadores basados en predictores para mejorar la estabilidad en el lazo de control (Furakawa, T. y Shimemura, E., 1983), con una configuración de autosintonización (Lee, T.H.; Wang, Q.G. y Tan, K.K., 1995). Recientemente, Tan *et al.* (Tan, K.K.; Lee, T.H. y Leu, F.M., 2002) han usado generalizaciones del enfoque del control predictivo para obtener un control óptimo de referencia en términos de especificaciones de

funcionamiento. Por otro lado, un resultado interesante es que cuando se utiliza un modelo general de segundo orden, el controlador primario es reducido a un control de tipo PID. De esta manera, el control tradicional PID puede ser visto como un controlador con una simple estructura de predicción inducida por la parte derivativa. Esta propiedad de compensación derivativa ha sido explotada con el propósito de mejorar las estrategias autosintonización (Tang W. y Shi S., 2002). Luyben (Luyben, W. L., 2001) también ha destacado la ventaja del uso de la compensación derivativa para reducir los diversos efectos de los retardos de tiempo en la entrada de control. Además, ha mostrado a través de simulaciones numéricas, que el control PID puede desempeñar un mejor comportamiento, en comparación con un control PI, con una medición aceptable a la sensibilidad del ruido.

Las principal conclusión de los resultados discutidos en las líneas anteriores es que, se requieren controladores de orden superior para obtener un buen comportamiento de los sistemas de control (i.e., mayor tasa de convergencia y un rápido rechazo de perturbaciones) cuando los retardos de tiempo están presentes. Por ejemplo, en Luyben (Luyben, W. L., 2001) se muestra que el uso de un control derivativo mejora el rendimiento de control en los aspectos antes mencionados. Nótese que en un sentido estricto, la acción derivativa incrementa el orden de control en una unidad. Subsecuentemente, el PID es un controlador que esta equipado con un control integral para mejorar el desempeño en términos de seguimiento de trayectoria. Como se discutió anteriormente, la retroalimentación derivativa puede ser vista como una aproximación inversa para el operador de retardo (Huang H.-P.; Chen Ch.-L.; Chao Y.-Ch. y Chen P.-L., 1990). Además de esto, existen diferentes métodos para aproximar el término de retardo, $e^{-\tau s}$, de un modo explícito. Entre ellos están, el método de momentos (Papadourakis, A., D. M. D. J., 1989), la expansión en serie de Taylor (Hugo, A. J., T. P. W. J., 1996) y la aproximación de Pade (Malek-Zavarei M. y Jamshidi M., 1987). En este trabajo se utiliza la aproximación de Padé para el diseño del control de los sistemas inestables con retardo.

En este trabajo, se propone una nueva metodología de

control a través de una retroalimentación dinámica de salida para sistemas inestables con retardo de tiempo en el canal de entrada. Note que la estrategia propuesta no esta limitada al caso de retardo a la entrada, también puede utilizarse para sistemas con retardo a la salida. Esto puede comprenderse al tomar en cuenta que la transferencia entrada-salida de los sistemas con retardo es la misma en ambos casos. Para el diseño de control se considera una aproximación de Padé del término retardo para obtener una función de transferencia sin términos trascendentales. Posteriormente, se utiliza el enfoque polinomial para sintonizar los controladores dinámicos. Finalmente, se consideran los problemas de rechazo de perturbación y el seguimiento de referencia. Se utilizan simulaciones numéricas para ilustrar la efectividad de la estrategia de control.

II. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Esta sección presenta la clase de sistemas que envuelven retardos de tiempo en la señal de entrada (o equivalentemente, en la salida). Considere la siguiente clase de (posiblemente inestables) sistemas lineales SISO con retardos de tiempo en la entrada,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t - \tau) \\ y(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada, y $y \in \mathbb{R}$ es la salida, y $\tau \geq 0$ es el retardo de tiempo asociado a la señal de entrada. $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y $\bar{C} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ son matrices y vectores del sistema que se suponen conocidas. La representación entrada-salida del sistema dado por la ecuación (1) puede ser obtenida aplicando la transformada de Laplace a la misma ecuación. Esto conduce a la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} s\bar{X}(s) &= \bar{A}\bar{X}(s) + \bar{B}e^{-\tau s}U(s) \\ Y(s) &= \bar{C}\bar{X}(s). \end{aligned} \quad (2)$$

la cual puede ser reescrita como,

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \bar{C} [sI - \bar{A}]^{-1} \bar{B}e^{-\tau s} \\ &= \frac{N(s)}{D(s)}e^{-\tau s} = G(s)e^{-\tau s} \end{aligned} \quad (2)$$

Donde $N(s)$ y $D(s)$ son polinomios de la variable compleja s . Obsérvese que una estrategia de control simple, por retroalimentación estática de salida,

$$U(s) = [R(s) - Y(s)]F(s),$$

conduce a la siguiente función de transferencia de lazo cerrado,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{F(s)G(s)e^{-\tau s}}{1 + F(s)G(s)e^{-\tau s}}.$$

Donde el término retardo ($e^{-\tau s}$) en el denominador complica el análisis de estabilidad del sistema debido al número infinito de raíces producidas por dicho término. La metodología de control propuesta sugiere reemplazar el término retardo por una aproximación de Padé para el diseño de los dos controladores dinámicos. En la siguiente

sección se proporcionan los detalles acerca de la aproximación de Padé.

III. NOCIONES BÁSICAS

La aproximación de Pade para el termino $e^{-\tau s}$, esta dada por una expansión fraccionaria de la forma,

$$e^{-\tau s} \approx \frac{N_n(s)}{D_n(s)}, \quad (3)$$

donde,

$$\begin{aligned} N_n(s) &= \sum_{k=0}^n \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!} (-s\tau)^k, \\ D_n(s) &= \sum_{k=0}^n \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!} (s\tau)^k. \end{aligned}$$

En la expresión anterior, n representa el orden de la aproximación de Padé y la constante k toma los valores de $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Desarrollando la serie del denominador y del numerador, el término $e^{-\tau s}$ puede ser escrito como una función de transferencia general de orden n , dada por,

$$e^{-\tau s} = \frac{\sum_{k=0}^n a_{n-k}(-s\tau)^k}{\sum_{k=0}^n a_{n-k}(s\tau)^k}. \quad (4)$$

Los coeficientes del polinomio del numerador y del denominador pueden ser expresados como,

$$a_{n-k} = \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!} \tau^{n-k}. \quad (5)$$

Con la finalidad de obtener una función de transferencia polinomial del término retardo, considere un sistema en el cual la salida esta dada como $Y(s) = e^{-\tau s}W(s)$ y una aproximación de Padé para el término retardo. Note que si el orden de la aproximación de Pade es un valor par, la función de transferencia en la variable compleja s , puede ser expresada por,

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{s^n - a_1s^{n-1} + \dots - a_{n-1}s + a_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \approx e^{-\tau s}, \quad (6)$$

donde el coeficiente a_0 tiene un valor unitario. Por otro lado, si el orden de la Aproximación de Pade es impar, la función de transferencia es,

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{-s^n + a_1s^{n-1} - \dots - a_{n-1}s + a_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \approx e^{-\tau s}. \quad (7)$$

IV. RESULTADOS PRINCIPALES

En esta sección se presenta la metodología propuesta para el diseño de control para sistemas con retardo de tiempo.

Considere el sistema con retardo de tiempo dado por la ecuación (2). Sea $y_c(t)$ la referencia del sistema. El problema de control consiste en diseñar un controlador por retroalimentación dinámica tal que $y(t) \rightarrow y_c(t)$ asintotica-

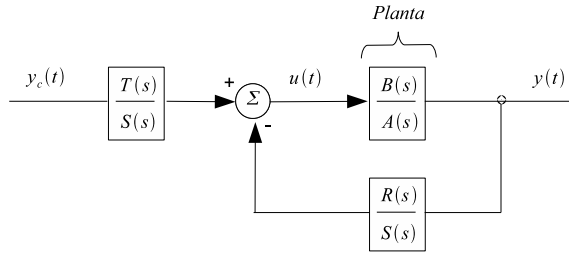


Figura 1. Controlador con dos grados de libertad

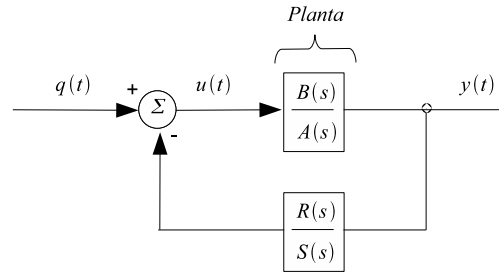


Figura 2. Sistema con perturbación a la entrada

mente. Debido a que el término retardo complica el análisis de estabilidad, el diseño de control propuesto esta basado en reemplazar el término retardo por una aproximación de Pade (dada por la ecuación (6) o (7)), en la ecuación (2). Así, se obtiene una función de transferencia polinomial del proceso,

$$G_r(s) = \left(\frac{N(s)}{D(s)} \right) \left(\frac{Y(s)}{W(s)} \right) = \frac{B(s)}{A(s)},$$

la cual incluye el proceso libre de retardo y la aproximación de Padé del término retardo.

Note que el proceso $G_r(s)$ proporciona polos y ceros (reales e imaginarios) debido al orden de la aproximación. De esta manera, la aproximación del operador retardo incrementa el grado relativo del proceso. Así, mientras el orden de la aproximación se incrementa, el orden del proceso $G_r(s)$ también será de orden superior.

Además, supongase que solo la salida $y(t)$ y la entrada $u(t)$ son medibles. Una vez que la función de transferencia $G_r(s) = B(s)/A(s)$ ha sido calculada, el diseño de control por retroalimentación dinámica de salida esta basado en un enfoque polinomial el cual será descrito a continuación.

Considere el siguiente modelo del proceso,

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}U(s), \quad (8)$$

donde $B(s)$ y $A(s)$ son polinomios de la variable compleja "s". $U(s)$ y $Y(s)$ son entradas y salidas respectivamente. Note que, $B(s)/A(s)$ incluyen los términos del sistema libre de retardo y los términos de la aproximación de Pade del término retardo. Se considera que $B(s)/A(s)$ es estrictamente propia, controlable y observable. El controlador polinomial puede ser representado como sigue,

$$U(s) = -\frac{R(s)}{S(s)}Y(s) + \frac{T(s)}{S(s)}Y_c(s), \quad (9)$$

donde $Y_c(s)$ es la variable de entrada y $Y(s)$ es la señal de salida. La Figura 1, muestra el esquema de control polinomial expresado en la ecuación (9). La función de transferencia de los controladores T/S y R/S son considerados estrictamente propios. Sustituyendo la ley de control dada por la ecuación (9) en la ecuación (8), se obtiene,

$$Y(s) = \frac{BT}{AS+BR}Y_c(s). \quad (10)$$

El polinomio característico inducido por el controlador es,

$$AS + BR = 0. \quad (11)$$

Obsérvese que en la ecuación (11) se tiene plena libertad de diseñar el controlador $S(s)$ y $R(s)$, de tal manera que los polos del sistema puedan ser reubicados libremente. Para este fin, se iguala la ecuación (11) con un polinomio característico deseado $D(s)$ del mismo orden (normalmente estable).

$$D = AS + BR, \quad (12)$$

Note que $D(s)$ es una parte importante para el diseño del controlador, ya que de él depende la estabilidad del sistema. Los parámetros del vector de control S y R pueden ser calculados resolviendo un conjunto de ecuaciones algebraicas obtenidas al igualar los coeficientes de los polinomios del lado izquierdo y del lado derecho de la ec. (12). Más adelante se proporcionan los detalles de la solución de las ecuaciones.

Ahora, para analizar el problema del rechazo de perturbación, considérese,

$$U(s) = -\frac{R(s)}{S(s)}Y(s) + Q(s), \quad (13)$$

la cual incluye la perturbación $Q(s)$. Sustituyendo la ecuación (13) en (8), se obtiene,

$$\frac{Y(s)}{Q(s)} = \frac{SB}{AS+BR}. \quad (14)$$

Aplicando el teorema del valor final a la función de transferencia salida-perturbación dada por (14) se tiene,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{SB}{AS+BR} \right) Q(s), \quad (15)$$

Es claro que la función de transferencia salida-perturbación es nula en estado permanente si se propone una acción $S(0) = 0$ lo que significa que $S(s)$ se debe factorizar de la siguiente forma,

$$S = sS', \quad (16)$$

donde s es un operador de integración en el sistema de lazo cerrado y S' es un nuevo polinomio con grado $\deg(S) - 1$.

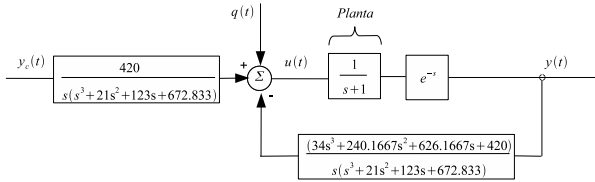


Figura 3. Controlador con dos grados de libertad para el Ejemplo 1.

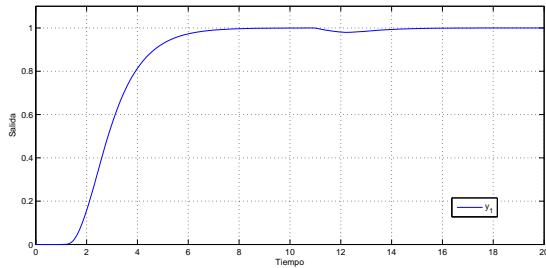


Figura 4. Respuesta de la salida para el Ejemplo 1.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 7 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 18 & 7 & 1 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 18 & 7 & 12 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 18 & 0 & 12 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad y \quad h = \begin{bmatrix} 1 \\ 28 \\ 322 \\ 1960 \\ 6769 \\ 13132 \\ 13068 \\ 5040 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, al resolver la ecuación (20) para este sistema se obtienen los coeficientes de los controladores polinomiales $R(s)$, $S(s)$ y $T(s)$,

$$\begin{aligned} R &= 34s^3 + 240.1667s^2 + 626.1667s + 420 \\ S &= s(s^3 + 21s^2 + 123s + 672.833) \\ T &= 420 \end{aligned}.$$

La Figura 4 muestra el desempeño de la metodología de control sujeta a una perturbación tipo escalón $q(t)$ que actúa en el tiempo $t = 10$ segundos con una magnitud de 0.03 unidades.

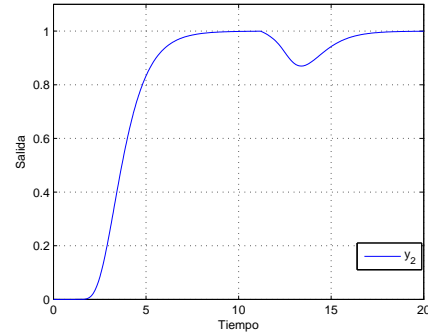


Figura 5. Respuesta de la salida para el Ejemplo 2.

Ejemplo 2. Ahora, considere un sistema de primer orden, inestable y con retardo $\tau = 1.2$, cuya función de transferencia es,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s-1} e^{-1.2s}.$$

Para este caso se utiliza una aproximación de Padé de sexto orden del término retardo. Los grados de los polinomios son,

$$\begin{aligned} D &= 2 \deg(A) + 1 = 15 \text{ deg} \\ R &= \deg(A) = 7 \text{ deg} \\ S &= \deg(A) + 1 = 8 \text{ deg} \end{aligned}.$$

Los polos son reubicados en $\{-1, -2, \dots, -14, -15\}$ y finalmente se resuelve la ecuación (20) para este ejemplo. En la Figura 5 se presenta el desempeño de la metodología de control sujeta a una perturbación tipo escalón $q(t)$ que actúa en el tiempo $t = 10$ segundos con una magnitud de 0.03 unidades.

En Del Muro (Del Muro C.B., Márquez R.J.F. et al., 2008), se ha mostrado que no es posible estabilizar sistemas con retardo relativamente grande a través de una simple retroalimentación estática de salida, con lo cual se confirma nuevamente la necesidad de una retroalimentación dinámica, como la que se propuso en este trabajo.

Ejemplo 3. Considérese un sistema de segundo orden, fuertemente inestable y con retardo de tiempo $\tau = 1$, expresado como,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s-1)(s-2)} e^{-s}.$$

Para este sistema se considera una aproximación de séptimo orden del término retardo. Entonces, los grados de los polinomios son,

$$\begin{aligned} D &= 2 \deg(A) + 1 = 19 \text{ deg} \\ R &= \deg(A) = 9 \text{ deg} \\ S &= \deg(A) + 1 = 10 \text{ deg} \end{aligned}.$$

Las raíces de la ecuación característica son localizados en $\{-1, -2, \dots, -18, -19\}$. Por último, la ecuación (20) para este ejemplo se resuelve. En la Figura 6, es posible apreciar

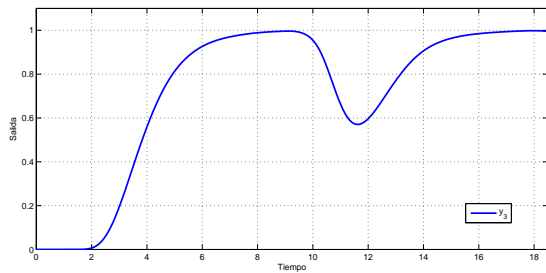


Figura 6. Respuesta de la salida para el ejemplo 3.

la salida del sistema ante un escalón unitario y la presencia de una perturbación tipo escalón $q(t)$ que actúa en el tiempo $t = 8$ segundos con una magnitud de 0.03 unidades.

Como se aprecia en las simulaciones, se ha obtenido una metodología de control que proporciona buenos resultados en términos de estabilidad y además rechaza perturbaciones y sigue referencias tipo escalón para sistemas con retardo de tiempo.

VI. CONCLUSIONES

- Se ha propuesto una nueva metodología de control, basada en la aproximación de Padé y en un enfoque polinomial. Con esta metodología de control se estabilizan sistemas inestables con retardo.
- Por medio del control polinomial se resuelve el rechazo de perturbación y el seguimiento de la referencia.
- Se presentan simulaciones digitales de la estrategia de control propuesta, donde se verifican los resultados obtenidos en términos de estabilidad, rechazo de perturbación y seguimiento de referencia, estas dos últimas de tipo escalón.

VII. AGRADECIMIENTO

Este trabajo fue apoyado en parte por CONACyT-México Proyecto: 82944 y 61713. Y por el Programa Institucional de Formación de Investigadores (PIFI) del IPN, Proyecto: 20081289 y 20081280

REFERENCIAS

- Del Muro C.B., Márquez R.J.F. et al. (2008). Stabilization and control of unstable first order linear delay systems. *International Conference on Modelling, Identification and Control. Shanghai, China*
- Furakawa, T. y Shimemura, E. (1983). Predictive control for systems with time delay. *Int. J. Control* **37**, 399-411.
- Huang H.-P.; Chen Ch.-L.; Chao Y.-Ch. y Chen P.-L. (1990). A modified Smith predictor with an approximate inverse of dead time. *AIChE J.* **36**, 1025-1031.
- Hugo, A. J., T. P. W. J. (1996). Approximate dynamic models for recycle systems. *Ind. Eng. Chem. Res.* **35**, 485-487.
- Kolmanovskii V. B. y A. Myshkis (1999). Introduction to the theory and applications of functional differential equations. *Dordrecht: Kluwer Academy.*
- Lee, T.H.; Wang, Q.G. y Tan, K.K. (1995). Automatic tuning of the Smith predictor controller. *J. Syst. Eng.* **5**, 102-114.
- Luyben, W. L. (2001). Effect of derivative algorithm and tuning selection on the pid control of dead-time processes. *Ind. Eng. Chem. Res.* **40**, 3605-3611.

- Malek-Zavarei M. y Jamshidi M. (1987). Time-delay System Analysis, Optimization and Applications. *North-Holland Systems & Control Series* New York.
- Marshall, J.E. (1979). Control of Delay Systems. *Stevenage Peter Peregrinus Ltd.*: London, U.K.
- Niculescu S. I. (2001). Delay effects on stability: a robust control approach. *Lecture notes in control and information sciences* **269**. Berlin: Springer.
- Papadourakis, A., D. M. D. J. (1989). Approximate dynamic models for chemical process systems. *Ind. Eng. Chem. Res.* **28**, 546-552.
- Tan, K.K.; Lee, T.H. y Leu, F.M. (2002). Optimal Smith predictor design based on GPC approach. *Ind. Eng. Chem. Res.* **41**, 1242-1248.
- Tang W. y Shi S. (2002). Autotuning PID control for large time-delay processes and its application to paper basis weight control. *Ind. Eng. Chem. Res.* **41**, 4318-4327.