



Observación de sistemas no lineales mediante métodos de disipatividad y cooperatividad

Jesús D. Avilés, Jaime A. Moreno
Instituto de Ingeniería-UNAM
Coyoacan DF, 04510 México D.F.
{JAvilesV, JmorenoP}@iingen.unam.mx
Teléfono: (52)-55-56233600 ext. 8819 y 8811

Resumen—Los observadores que preservan el orden son aquellos cuyos estimados siempre están por encima o por debajo de la trayectoria del estado. En este trabajo se propone una nueva metodología de diseño de observadores que preservan el orden para una clase de sistemas no lineales, en ausencia y en presencia de perturbaciones. La metodología de diseño combina dos propiedades sistemáticas: la disipatividad y la cooperatividad. La primera es usada para asegurar la convergencia de las dinámicas del error de estimación. La cooperatividad es la propiedad básica de las dinámicas del error de estimación que garantiza la preservación del orden en el observador. El diseño de estos observadores se puede reducir, en muchos casos, a la solución de desigualdades matriciales lineales (LMI).

Palabras clave: Sistemas cooperativos; Sistemas disipativos; observadores cooperativos; observadores intervalo.

I. INTRODUCCIÓN

Los sistemas que preservan el orden han sido estudiados desde hace varias décadas en matemáticas y control (Angeli, D. and Sontag, D., 2003; Hirsch, M.W. and Smith, H.L., 2005). Esta clase de sistemas es conocida como monótonos, de los cuales los sistemas cooperativos constituyen una subclase muy importante. Los sistemas cooperativos son aquellos que sus trayectorias preservan el orden parcial en el estado, en la entrada y en la salida para todo tiempo, cuando las señales de entrada y los estados iniciales son ordenados (parcialmente). En general, los sistemas monótonos han encontrado gran interés en el modelado y control, relativamente pocos trabajos han aparecido para propósitos de observación. La primera aplicación aparecida en (Gouzé, J. L. and Rapaport, A. and Hadj-Sadok, M. Z., 2000), donde los observadores intervalo son introducidos y aplicados a una clase de sistemas no lineales con incertidumbres. Estos sistemas son principalmente aplicados a los sistemas biológicos, con el propósito de estimar parámetros o variables no medibles. La validación experimental ha sido reportada en (Alcaraz-Gonzalez, V. and Harmand, J. and Rapaport, A. and Steyer, J.P. and Gonzalez-Alvarez, V. and Pelayo-Ortiz, C., 2002) para bioreactores altamente inciertos. Una combinación de observadores intervalo y de los así llamados observadores asintóticos (Bastin, G. and Dochain, D., 1990), (Dochain, D. and Perrier, M. and Ydstie, B.E., 1992) (ver también (Bernard, O. and Gouze, J.L., 2004)) es propuesta en (Rapaport, A. and Dochain, D., 2005). En (Veloso, A. and Rocha, I. and Ferreira, E.C., 2007) una solución alternativa para la observación de estado de una densidad de fermentación por lotes de *E. coli* es estudiada. En (Moisan, M. and Bernard, O. and Gouze, J.L., 2009) se expone el diseño de los observadores intervalo para variables no medibles de bioreactores con

incertidumbre. Dicho diseño está compuesto de un conjunto de observadores intervalo en los que el error de estimación está acotado por una cierta ganancia de sintonización. A través de un criterio de optimización se obtiene el mejor estimado, el cual tiene el mejor rango de convergencia y el intervalo generado por los estimados del observador intervalo es más estrecho. El diseño es verificado en la estimación de la biomasa de una planta de tratamiento de aguas residuales

En este trabajo la observación de estado para bioprocesos bajo parámetros de procesos con incertidumbre y/o con entradas de procesos es resuelta, sin requerir el conocimiento de las dinámicas del proceso. El objetivo de este trabajo es dar seguimiento a la línea de investigación iniciada en (Gouzé, J. L. and Rapaport, A. and Hadj-Sadok, M. Z., 2000). La principal idea es asociar la metodología de diseño del observador disipativo, introducida por (Moreno, J. A., 2004) con la idea básica de hacer que el sistema del error de observación sea cooperativo, a fin de que el observador preserve el orden y converja a los valores reales, en el caso libre de perturbaciones o incertidumbres. Para el caso perturbado, la preservación de la cooperatividad será importante y la convergencia será debilitada en lo práctico: el error de observación es Entrada-Estado estable (ISS) con respecto a la señal perturbante. Además, se introduce la clase de observadores cooperativos para sistemas sin perturbaciones. La extensión de estos observadores cooperativos a un ambiente o modelo con incertidumbres conduce en una manera natural al concepto del observador intervalo. Es importante notar que el uso de observadores cooperativos no es restrictivo a la clase de sistemas cooperativos. Estos pueden ser aplicados a una amplia clase de procesos no lineales.

El procedimiento de diseño de estos estimadores cuando no están presentes perturbaciones en los sistemas, consiste en tomar la dinámica del error y descomponerla en un subsistema lineal e invariante en el tiempo con una no linealidad variante en el tiempo conectada en retroalimentación. Si la no linealidad es disipativa con respecto a una función de suministro cuadrática, entonces la parte lineal debe ser diseñada para ser disipativa con respecto a una función de suministro relacionada para garantizar que el lazo cerrado sea exponencialmente estable (Moreno, J. A., 2004). Asimismo, si la dinámica del error de observación es un sistema cooperativo entonces, el ordenamiento de las trayectorias de dicho error es asegurado y por consecuencia, *el estimado del observador acota dinámicamente al estado, ya sea por encima o por debajo*, dependiendo del orden del error inicial. Los observadores que preservan el orden auna-



dos con la convergencia a cero en el error de estimación, se denota en este trabajo como **observadores cooperativos**. Esta metodología se extiende para manejar sistemas no lineales con perturbaciones. Para asegurar la cooperatividad en las dinámicas de los errores de estimación es necesario utilizar un par de observadores. Estos observadores forman un **observador intervalo**. El diseño de estos observadores puede en la mayoría de los casos reducirse a los algoritmos de desigualdades matriciales lineales (LMI), los cuales son muy bien comportados y son una herramienta estandar en la teoría de control.

Una ventaja para ciertas aplicaciones es el hecho que durante el periodo de convergencia no es posible confiar en la estimación dada por el observador. Las decisiones tomadas en base de tal estimación pueden conducir a un mal comportamiento en control. Esta situación incluso es el peor caso cuando las incertidumbres y/o perturbaciones están presentes. Puesto que no es posible construir un observador sin error, una alternativa en muchas aplicaciones sería tener una estimación de una variable del estado que este siempre por arriba o por debajo del valor verdadero. Esto permitiría, por ejemplo, enviar una señal de alarma cuando la temperatura de un reactor nuclear se aproxima a alcanzar su valor máximo antes de que lo alcance realmente, si la temperatura estimada estuviera por arriba de la temperatura real.

II. PRELIMINARES

En este trabajo dos tipos de propiedades serán usadas para el diseño de los observadores que preservan el orden: i) la *cooperatividad* es una propiedad para preservar el orden (Angeli, D. and Sontag, D., 2003; Hirsch, M.W. and Smith, H.L., 2005) y será fundamental para los observadores cooperativos, y ii) la *disipatividad* (Willems, J.C., 1972) (ver también (Hassan K. Khalil, 2002) y (Moreno, J. A., 2004)) será usada para asegurar las propiedades de convergencia del error de estimación. Algunos resultados relevantes de estos tópicos serán mencionados aquí.

II-A. Sistemas Cooperativos

El símbolo \succeq define un *orden parcial* en el espacio de vectores o matrices. Para vectores $x \succeq y \Leftrightarrow x_i - y_i \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, es decir, cada componente de x es mayor o igual a la correspondiente en y . Para matrices $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ y $M \succeq N \Leftrightarrow M_{ij} - N_{ij} \geq 0$, $M, N \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$. Particularmente, representa la *no negatividad* de los vectores y matrices, tal que, $x \succeq 0 \Leftrightarrow x_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ó $M \succeq 0 \Leftrightarrow M_{ij} \geq 0$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, respectivamente. Los sistemas cooperativos, los cuales son una clase especial de los sistemas monótonos (Angeli, D. and Sontag, D., 2003; Hirsch, M.W. and Smith, H.L., 2005) son aquellos que sus trayectorias preservan el orden parcial en el estado, en la entrada y en la salida para todo tiempo, cuando las señales de entrada y los estados iniciales son ordenados (parcialmente).

Definición 1: Sea el sistema no lineal

$$\Sigma_{NL} \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), & x(0) = x_0 \\ y = h(t, x, u) \end{cases} \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $u \in \mathbb{R}^m$ es la entrada, y $y \in \mathbb{R}^p$ es la salida del sistema. El sistema Σ_{NL} (1) es *cooperativo* si dados,

$$x_0^1 \succeq x_0^2, \quad u^1(t) \succeq u^2(t), \quad \forall t \geq 0$$

entonces, las trayectorias del estado

$$x(t, t_0, x_0^1, u^1(t)) \succeq x(t, t_0, x_0^2, u^2(t)), \quad \forall t \geq t_0$$

y las trayectorias de salida

$$h \circ x(t, t_0, x_0^1, u^1(t)) \succeq h \circ x(t, t_0, x_0^2, u^2(t))$$

son ordenadas.

Los sistemas cooperativos pueden ser caracterizados por,

Proposición 1: (Angeli, D. and Sontag, D., 2003). El sistema Σ_{NL} (1) es *cooperativo* si y sólo si las siguientes condiciones son satisfechas:

1. $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}$ es Metzler ($\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \geq 0$, $\forall i \neq j$),
2. $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \end{bmatrix} \succeq 0$,
3. $\begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \end{bmatrix} \succeq 0$. ◇

Los sistemas cooperativos lineales se pueden caracterizar fácilmente:

Proposición 2: (Angeli, D. and Sontag, D., 2003). Considere el sistema lineal invariante (LTI) en tiempo continuo

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, & x(0) = x_0 \\ y = C(t)x, \end{cases} \quad (2)$$

donde $(x, u, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ son los vectores de estado, entrada y salida, respectivamente. El sistema (2) es *cooperativo* si y sólo si,

1. A es Metzler ($a_{ij} \geq 0$, $\forall i \neq j$),
2. $B \succeq 0$,
3. $C \succeq 0$. ◇

En los sistemas lineales, la propiedad de cooperatividad y positividad son equivalentes, si para cualquier $x_0 \succeq 0$ y $u(t) \succeq 0$ entonces $x(t, t_0, x_0, u(t)) \succeq 0$ y $h \circ x(t, t_0, x_0, u(t)) \succeq 0$. Sin embargo, para los sistemas no lineales esto no necesariamente ocurre.

II-B. Método Disipativo

Considere la función de suministro cuadrática

$$w(y, u) = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ con Q y R simétricas.

Definición 2: El sistema (LTI) Σ_L (2) es *estado estrictamente disipativo* (SSD) con respecto a una función de suministro $w(y, u)$ (3), o en forma corta (Q, S, R) -SSD, si existe una matriz $P = P^T > 0$ y una constante $\epsilon > 0$ tal que se satisface la desigualdad disipativa:

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \epsilon P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T Q C & C^T S \\ S^T C & R \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4)$$

Definición 3: Una *no linealidad estática variante en el tiempo*

$$y = f(t, u) \quad (5)$$

continua a tramos en t y localmente Lipschitz en u , tal que $f(t, 0) = 0$ es *disipativa* con respecto a la función de suministro $w(y, u)$ (3) ó en forma corta (Q, S, R) -D, si para todo $t \geq 0$ y $u \in \mathbb{R}^m$,

$$w(y, u) = w(f(t, u), u) \geq 0. \quad (6)$$



Lema 1: (Moreno, J. A., 2004). Considere la interconexión en retroalimentación

$$\Xi_L : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0 \\ y = C \\ u = -f(t, y) \end{cases} \quad (7)$$

Si existe una (Q, S, R) tales que $f(t, y)$ es (Q, S, R) -D, y el subsistema lineal de Ξ_L es $(-R, S^T, -Q)$ -SSD, entonces el punto de equilibrio $x = 0$ de Ξ_L es global y exponencialmente estable. \diamond

Estos sistemas son bien comportados bajo perturbaciones:

Proposición 3: Sea el sistema

$$\Xi_{NL} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + b, & x(0) = x_0 \\ y = Cx \\ u = -f(t, y) \end{cases} \quad (8)$$

donde b es una señal de entrada. Suponga que las condiciones del Lema anterior son satisfechas. Bajo estas condiciones, el sistema Ξ_{NL} es *entrada estado estable (ISS) con respecto a b* . \diamond .

Prueba. Considere la función definida positiva $V(x) = (x)^T P x$, donde P es una solución de la desigualdad matricial (4). Entonces

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\epsilon V + 2\epsilon P b \\ &\leq -(1-\theta)\epsilon V - \theta\epsilon(x)^T P x + 2\epsilon P b; \theta \in (0, 1) \\ &\leq -(1-\theta)\epsilon V + \lambda_M^+ \|x\|_2 (2\|b\|_2 - \theta\epsilon \|x\|_2) \\ &\leq -(1-\theta)\epsilon V \quad \forall \|x\|_2 \geq \frac{2}{\theta\epsilon} \|b\|_2. \end{aligned}$$

De esta desigualdad, se puede concluir ISS con $\delta(r) = \frac{2}{\theta\epsilon} r$. \square

III. OBSERVADORES QUE PRESERVAN EL ORDEN

En (Moreno, J. A., 2004) un método basado en la teoría de disipatividad para diseñar observadores no lineales es propuesto. Para la misma clase de sistemas se extiende el método para hacer el observador no sólo convergente sino también que preserve el orden. Consideramos el primer caso para sistemas sin perturbaciones y después, una modificación es introducida al observador para asegurar la propiedad de preservar el orden a pesar de la perturbación.

III-A. Sistemas sin perturbaciones: Observador Cooperativo

Considere el sistema no lineal

$$\Pi_S : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Gf(\sigma) + \varphi(t, y, u), \\ \sigma = Hx, & x(0) = x_0 \\ y = Cx \end{cases} \quad (9)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $y \in \mathbb{R}^q$ es la salida medible, $\sigma \in \mathbb{R}^r$ es una función lineal del estado (no necesariamente medible), $u \in \mathbb{R}^p$ es la entrada, $f(\sigma) \in \mathbb{R}^m$ es una función no lineal localmente Lipschitz en σ , y φ es una función no lineal conocida localmente Lipschitz en (u, y) y continua a tramos en t . Se propone un observador de orden completo (Moreno, J. A., 2004) para el sistema Π_S (9) de la forma

$$\Pi_O : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) + Gf(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y)) \\ \quad + \varphi(t, y, u), \\ \hat{\sigma} = H\hat{x}, & \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (10)$$

donde $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ es el estimado de x del HS (9), y $L \in \mathbb{R}^{n \times q}$ y $N \in \mathbb{R}^{r \times q}$ son las matrices de diseño.

El error de estimación del estado se puede definir por $e \triangleq \hat{x} - x$, el error de estimación de la salida como $\tilde{y} \triangleq \hat{y} - y$, y el error de estimación funcional como $\tilde{\sigma} \triangleq \hat{\sigma} - \sigma$. Por lo tanto, la dinámicas del error de observación están dadas por

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (A + LC)e + G[f(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y)) - f(\sigma)] \\ \tilde{y} &= Ce \\ \tilde{\sigma} &= He \end{aligned} \quad (11)$$

con $e(0) = e_0 = \hat{x}_0 - x_0$. Note que en la dinámica (11), $\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y) = Hx + He + NCe = \sigma + (H + NC)e$. Se define a $z \triangleq (H + NC)e = \tilde{\sigma} + N\tilde{y}$ como una función del error de estimación e , y a una nueva no linealidad

$$\phi(z, \sigma) \triangleq f(\sigma) - f(\sigma + z) \quad (12)$$

Las dinámicas de (11) pueden reescribirse como

$$\Pi_E : \begin{cases} \dot{e} = A_L e + Gv, & e(0) = e_0 \\ z = H_N e \\ v = -\phi(\sigma, z) \end{cases} \quad (13)$$

donde $A_L \triangleq A + LC$ y $H_N \triangleq H + NC$.

Definición 4: El observador es *cooperativo* si las siguientes dos propiedades son satisfechas:

1. Es convergente, es decir, para toda condición inicial \hat{x}_0 , las trayectorias de la planta del error de estimación convergen asintóticamente a cero.
2. El sistema de error Π_E (13) es cooperativo. Esta condición implica que

$$\begin{aligned} \text{si } \hat{x}_0 \succeq x_0 &\implies \hat{x}(t) \succeq x(t), \quad \forall t \geq 0 \\ \text{si } x_0 \succeq \hat{x}_0 &\implies x(t) \succeq \hat{x}(t), \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Es decir, en el observador que preserve el orden, la estimación siempre está por encima o por debajo de las trayectorias verdaderas de la planta.

Ahora bien, desarrollando analíticamente los dos puntos de la definición anterior se tiene,

- Convergencia del observador:** Para asegurar que el error de observación es convergente, el siguiente teorema proporciona las condiciones suficientes para la estabilidad asintótica del origen de las dinámicas del error, haciendo uso de la teoría de disipatividad:

Teorema 1: (Moreno, J. A., 2004). Suponga que la no linealidad ϕ (12) es (Q, S, R) -D, es decir,

$$w(\phi, z) = \phi^T Q \phi + 2\phi^T S z + z^T R z \geq 0, \quad (14)$$

Suponga que existen las matrices L y N , tal que Π_E (13) es $(-R, S^T, -Q)$ -SSD, es decir, existen las soluciones $P = P^T > 0$, $\epsilon > 0$, L , N tales que se satisface:

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \epsilon P + H_N^T R H_N & PG - H_N^T S^T \\ G^T P - S H_N & Q \end{bmatrix} \leq 0 \quad \diamond \quad (15)$$

Bajo estas condiciones el *observador (10)* es *global y exponencialmente estable* para Π_S (9), lo cual implica que existan las constantes $k > 0$ y $\rho > 0$ tales que para toda condición inicial e_0 se satisface:

$$\|e(t)\| \leq k \|e_0\| \exp(-\rho t) \quad (16)$$

- Cooperatividad del error de observación:** El observador (10) diseñado de acuerdo con el Teorema 1



es convergente, pero no tiene las propiedades que preservan el orden. Para asegurar la cooperatividad, el sistema de error Π_E (13) tiene que ser un sistema cooperativo. Conforme a la caracterización dada en la Proposición 1, una condición necesaria y suficiente para satisfacer esta propiedad es que la matriz Jacobiana

$$M(z) \triangleq A_L + G \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) H_N, \forall z \in \mathbb{R}^r \quad (17)$$

tiene que ser Metzler, es decir, que todos los elementos fuera de la diagonal son no negativos.

Combinando los puntos anteriores, el siguiente algoritmo proporciona las condiciones suficientes para el diseño de un observador cooperativo:

Teorema 2 (Observador Cooperativo): Considere el sistema Π_S (9), el observador Π_0 (10) y la dinámica del error de estimación Π_E (13). Suponga que la no linealidad ϕ (12) es (Q, S, R) -D, es decir, satisface a (6). Si se satisface que

1. Las matrices $P = P^T > 0$, L , N y una constante $\epsilon > 0$ existen, tal que se cumple (15), y
2. $M(z)$ es Metzler $\forall z \in \mathbb{R}^r$.

Entonces, Π_0 (10) es un *observador cooperativo, global y exponencialmente estable*. \diamond

Nota 1: Obsérvese que para obtener simultáneamente un estimado por encima y otro por debajo de la trayectoria del estado, se requiere construir dos observadores cooperativos e inicializarlos adecuadamente. Pero se tiene la ventaja que con un sólo diseño se pueden desarrollar los dos observadores cooperativos, lo cual se debe a la propiedad de simetría que tiene este estimador.

Nota 2: Note que el diseño del observador cooperativo impone una condición adicional con respecto a un observador disipativo convergente. Por lo que, se espera que: i) la clase de sistemas para los cuales un observador cooperativo puede ser diseñado es un subconjunto de la del observador convergente, y ii) las propiedades dinámicas de un observador cooperativo son más restrictivas que para un simple observador convergente. El estudio de estos temas es un importante tópico para la investigación a futuro.

III-B. Sistemas con perturbaciones: Observador Intervalo

Considere siguiente sistema no lineal

$$\Psi_S : \begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Gf(\sigma) + \pi(t, x) + \varphi(t, y, u), \\ \sigma = Hx(t), \quad x(0) = x_0 \\ y = Cx(t) \end{cases} \quad (18)$$

donde $\pi(t, x) \in \mathbb{R}$ es una perturbación que representa las variables exógenas y/o las incertidumbres del sistema. Adicionalmente, se asume que las cotas de la perturbación son conocidas, tales que $\pi(t, x)$ satisface $\forall t \geq 0, \forall x, y$

$$\pi^+(t, y) \succeq \pi(t, x) \succeq \pi^-(t, y), \forall t \geq 0, \forall x, y \quad (19)$$

Si el observador Π_0 (10) es usado para la planta, entonces las dinámicas del error de estimación resultantes

$$\Pi_E^p : \begin{cases} \dot{e} = A_L e + Gv, \quad e(0) = e_0 \\ z = H_N e \\ v = -\phi(\sigma, z) \end{cases} \quad (20)$$

no convergerán a cero, si la perturbación no es desvaneciente. Además, puesto que en general $\pi(t, x)$

no es una señal entrada ordenada, las dinámicas del error no serán cooperativas.

Para solventar estos problemas, los *observadores intervalo* son propuestos. Estos difieren de los observadores cooperativos por el hecho que su convergencia es práctica, y son considerados cooperativos. Esto significa que con un sólo observador se puede asegurar una estimación por arriba o por abajo del estado. Los observadores intervalo son similares a los introducidos en (Gouzé, J. L. and Rapaport, A. and Hadj-Sadok, M. Z, 2000), excepto que la propiedad de la convergencia práctica es introducida aquí. Un *observador intervalo* consiste de dos sistemas dinámicos

$$\Psi_{O^+} \begin{cases} \dot{\hat{x}}^+ = A\hat{x}^+ + Gf(\hat{\sigma}^+ + N^+(\hat{y}^+ - y)) \\ \quad + L^+(\hat{y}^+ - y) + \pi^+(t, y) + \varphi(t, y, u) \\ \hat{\sigma} = H\hat{x}^+, \quad \hat{x}^+(0) = \hat{x}_0^+ \\ \hat{y} = C\hat{x}^+ \end{cases} \quad (21)$$

$$\Psi_{O^-} \begin{cases} \dot{\hat{x}}^- = A\hat{x}^- + Gf(\hat{\sigma}^- + N^-(\hat{y}^- - y)) \\ \quad + L^-(\hat{y}^- - y) + \pi^-(t, y) + \varphi(t, y, u) \\ \hat{\sigma} = H\hat{x}^-, \quad \hat{x}^-(0) = \hat{x}_0^- \\ \hat{y} = C\hat{x}^- \end{cases} \quad (22)$$

donde x^+ y \hat{x}^- son los estimados superior e inferior de x . Las matrices de diseño de ambos observadores son $L^+ \in R^{n \times q}$, $N^+ \in R^{r \times q}$ y $L^- \in R^{n \times q}$, $N^- \in R^{r \times q}$.

Note que en Ψ_{O^+} la cota superior, y en Ψ_{O^-} la cota inferior de la perturbación (19) son introducidas. Esto permite asegurar las propiedades de cooperatividad de las dinámicas del error. Cuando $e^+ \triangleq \hat{x}^+ - x$ y $e^- \triangleq x - \hat{x}^-$ (y las otras variables son definidas similarmente), las dinámicas del error de observación están dadas por

$$\Psi_{E^+} \begin{cases} \dot{e}^+ = A_L^+ e^+ + Gv^+ + b^+ \\ z^+ = H_N^+ e^+, \quad e^+(0) = e_0^+ \succeq 0 \\ v^+ = -\phi^+(z^+, \sigma) \end{cases} \quad (23)$$

$$\Psi_{E^-} \begin{cases} \dot{e}^- = A_L^- e^- + Gv^- + b^- \\ z^- = H_N^- e^-, \quad e^-(0) = e_0^- \succeq 0 \\ v^- = -\phi^-(z^-, \sigma) \end{cases} \quad (24)$$

donde $A_L^+ \triangleq A + L^+C$, $H_N^+ \triangleq H + N^+C$, $A_L^- \triangleq A + L^-C$, $H_N^- \triangleq H + N^-C$ y las no linealidades $\phi^+(z^+, \sigma)$ y $\phi^-(z^-, \sigma)$ están definidas en una forma similar a (12). Los errores de incertidumbre

$$b^+ \triangleq \pi^+(t, y) - \pi(t, x) \quad (25)$$

$$b^- \triangleq \pi(t, x) - \pi^-(t, y) \quad (26)$$

actúan como entradas de los sistemas (23) y (24).

El siguiente Teorema establece la condición suficiente para el diseño de un observador intervalo. Puede ser considerado como una generalización del Teorema 2 de los observadores cooperativos, en el caso cuando las perturbaciones no están presentes.

Teorema 3: Considere el sistema perturbado Ψ_S (18), el observador Ψ_{O^+} (21). Se asume que la $\pi(t, x)$ está acotada por (19). Suponga además, que la no linealidad $\phi^+(z^+, \sigma)$ es (Q, S, R) -D, es decir, (6) se cumple. Si se satisface que:

1. Existen las matrices $P^+ = (P^+)^T > 0$, L^+ , N^+ y una constante $\epsilon > 0$ tales que se cumpla (15), y
2. $M(z)$ (17) es Metzler $\forall z \in \mathbb{R}^r$.

$$\|e^+(t)\| \leq k \|e^+(0)\| \exp(-\rho t) + \delta \sup(\|b^+\|) \quad (27)$$

con $k > 0$ y $\rho > 0$. Además, Ψ_{E^+} es un sistema cooperativo, es decir,

$$e^+(0) \succeq 0 \implies e^+(t) \succeq 0, \forall t \geq 0$$

$$e^+(0) \preceq 0 \not\Rightarrow e^+(t) \preceq 0, \forall t \geq 0.$$

Por lo tanto, las trayectorias de Ψ_{O^+} (21) están siempre por encima de las trayectorias reales de la planta, es decir,

$$\hat{x}_0^+ \succeq x_0 \implies \hat{x}^+(t) \succeq x(t), \forall t \geq 0$$

a pesar de las perturbaciones. \diamond

Si el Teorema anterior es satisfecho y Ψ_{E^-} (24) también cumple con las condiciones, entonces Ψ_{O^+} (21) y Ψ_{O^-} (22) forman un *observador intervalo* para el sistema Ψ_S porque se cumple:

$$\hat{x}_0^+ \succeq x_0 \succeq \hat{x}_0^- \implies \hat{x}^+(t) \succeq x(t) \succeq \hat{x}^-(t) \quad (28)$$

Note que el diseño de las matrices L^+ , N^+ y L^- , N^- no depende de la perturbación, por lo que el diseño puede ser realizado como en el caso cooperativo.

IV. DISEÑO COMPUTACIONAL

El diseño de los observadores cooperativos o intervalo es reducido a la solución de dos desigualdades de matrices (ver Teorema 2): i) Para la convergencia, se deben de encontrar las matrices L , N , $P = P^T > 0$ y la constante $\epsilon > 0$, tal que (15) es satisfecha, y ii) para la cooperatividad, las matrices L , N deben ser halladas con la finalidad que la condición $M(z)$ (17) es Metzler sea también satisfecha. La desigualdad matricial (15) ha sido estudiada en (Moreno, J. A., 2004), y también puede reducirse, en muchos casos, a una LMI. También es fácil ver que la condición $M(z)$ (17) es Metzler puede reducirse a una LMI en las variables L , N . Por ejemplo, cuando $f(z)$ es una función escalar, la condición que M es Metzler puede ser representada como un conjunto de desigualdades lineales en las variables L , N ,

$$M_{ij} = A_{ij} + L_i C_j + \frac{\partial f(z)}{\partial z} G_i [H_j + N C_j] \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^r \quad \forall i \neq j, \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (29)$$

Al resolver esta última expresión existe el inconveniente que M está en función de la variable z , lo que ocasiona que se tengan que resolver infinitas LMI's. Particularmente, se ha estudiado el caso en que $f(z)$ es un escalar, y el resultado es que únicamente un par de LMI's deben ser resueltas (una LMI reemplazando $K_1 = \max \frac{\partial f(z)}{\partial z}$ by $\frac{\partial f(z)}{\partial z}$ y otra LMI reemplazando $K_2 = \min \frac{\partial f(z)}{\partial z}$ by $\frac{\partial f(z)}{\partial z}$) para asegurar la preservación del orden en los estimados del observador (cooperativo o intervalo). Sin embargo, falta por completar este estudio para el caso más general con el objeto de hacer un práctico diseño de los observadores que preservan el orden.

V. EJEMPLO

El sistema clásico de tres tanques es usado como una aplicación de los observadores que preservan el orden (ver Fig. 1), para ilustrar su comportamiento y propiedades. Este sistema puede ser visto como un prototipo de muchas aplicaciones de procesos industriales.

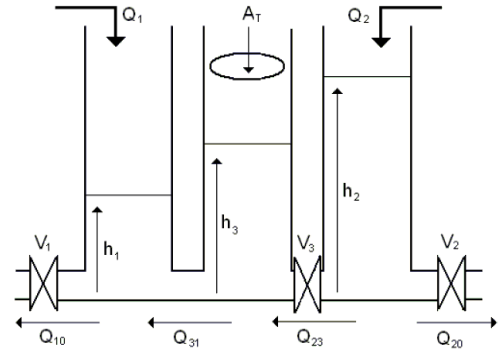


Figura 1. Sistema de tres tanques

V-A. Diseño del observador cooperativo

Para este diseño Π_S , Π_0 , Π_{E^+} and Π_{E^-} son considerados. $x_{10} = 0.147$ m, $x_{20} = 0.276$ m y $x_{30} = 0.8$ m son las condiciones iniciales. Los flujos de entrada son $Q_1^0 = 4.75 \times 10^{-5} \frac{m^3}{s}$ y $Q_2^0 = 7.365 \times 10^{-5} \frac{m^3}{s}$. El área de cada tanque es $A_T = 0.01539$ m². Los flujos Q_{10} , Q_{23} y Q_{20} están determinados por las válvulas V_1 , V_2 y V_3 , respectivamente. Estas válvulas están representadas por, $V_1 : \rho(x_1) \triangleq K_1 |x_1| \tanh(x_1)$, $V_2 : \rho(x_2) \triangleq K_2 |x_2| \tanh(x_2)$, y $V_3 : f(\sigma) \triangleq K_{23} |\sigma| \tanh(\sigma)$.

Además, Q_{31} es gobernada por $\rho(x_3 - x_1) = K_{31} (x_3 - x_1)$. Por lo tanto, las matrices de Π_S , Π_0 , Π_{E^+} and Π_{E^-} están dadas por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-K_{31}}{A_T} & 0 & \frac{K_{31}}{A_T} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_{31}}{A_T} & 0 & \frac{-K_{31}}{A_T} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{A_T} \\ \frac{1}{A_T} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_T} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}^T$$

Adicionalmente, $\varphi = -\frac{1}{A_T} [\rho(x_1) \quad \rho(x_2)]$. Donde $K_1 = 1.8165 \times 10^{-4}$, $K_{31} = 1.055 \times 10^{-4}$, $K_2 = 9.804 \times 10^{-5}$ y $K_{23} = 7.8047 \times 10^{-5}$. $\phi^+(\sigma, z^+) = K_{23} [|\sigma| \tanh(\sigma) - |\sigma + z^+| \tanh(\sigma + z^+)]$ es (Q, S, R) -D = $(-1, 4.683 \times 10^{-5}, 0)$ -D, es decir, $\phi^+ \in [0, 9.356 \times 10^{-5}]$ (lo mismo para ϕ^-). Las soluciones del observador cooperativo son obtenidas a través del toolbox LMI de Matlab. Por lo que, las matrices de diseño son:

$$L = \begin{bmatrix} -50 & 6 \\ 6 & -60 \\ 0.0068 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad N = [0 \quad 1]$$

tal que las desigualdades de disipatividad (15) y cooperatividad (17) son satisfechas.

En la Figura 2, el observador cooperativo es comparado con un estimador no cooperativo. En dicha Figura se muestra que las trayectorias de los estimados del observador cooperativo respetan el orden, es decir, acotan por encima o por debajo a las variables de estado y además convergen a dichas variables. En cambio el observador no cooperativo no lo hace y sus estimados cruzan a las trayectorias del estado, aunque converjan a las variables de estado.

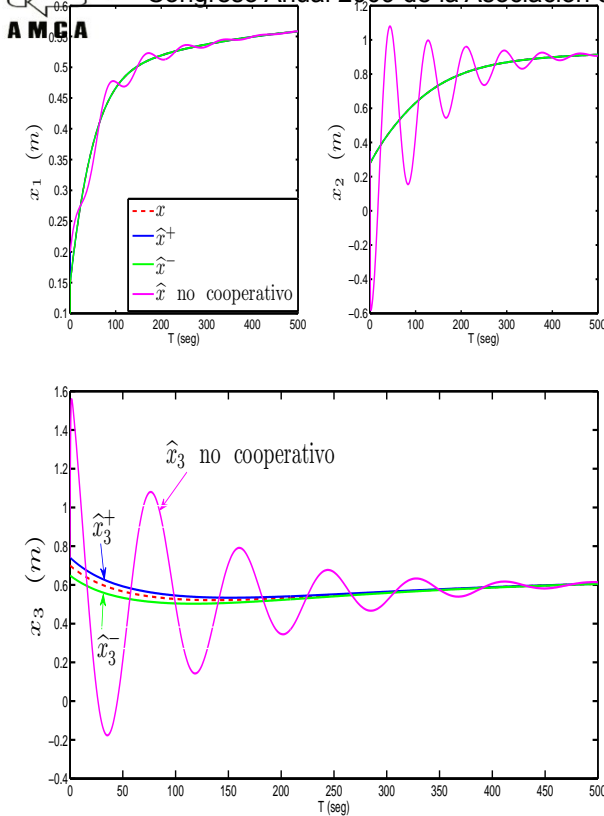


Figura 2. Comportamiento del Observador Cooperativo

V-B. Diseño del observador intervalo

Para este diseño Ψ_S , Ψ_0 , Ψ_{E^+} y Ψ_{E^-} son considerados. Los flujos de entrada son $Q_1^0 = 7 \times 10^{-5} \frac{m^3}{s}$ y $Q_2^0 = 4.5 \times 10^{-5} \frac{m^3}{s}$. Las matrices A , G , C , H , y las no linealidades $f(\sigma)$, $\rho(x_1)$ y $\rho(x_2)$ están en el ejemplo anterior. Para este observador, las soluciones también son obtenidas del diseño de arriba, es decir, $L = L^+ = L^-$, $N = N^+ = N^-$, $P = P^+ = P^-$ y $\epsilon = \epsilon^+ = \epsilon^-$. Entonces (15) y (17) se satisfacen. Adicionalmente, un flujo de entrada en el tercer tanque es considerado (de $\pi(t, x) \in \mathbb{R}^3$ de (18); $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = 0$ y sólo es tomado en cuenta π_3). Tal flujo no es mayor que $\pi_3^+ = 0.0022$ y menor que $\pi_3^- = 0.0010$. Por lo que, se satisface (19).

La Figura 3 muestra el comportamiento del tercer estimado del observador intervalo y de un observador no cooperativo. Los estimados del observador intervalo acotan por encima y por debajo a las variables del estado, a pesar de las perturbaciones o incertidumbres en el sistema (π_3). Asimismo, el tercer estimado de Π_{O^+} (observador intervalo) indica cuando el tercer tanque está a punto de derramarse, alertando al esquema de control del sistema de estos eventos para que este pueda realizar las correcciones necesarias para evitar daños en dicho sistema. Por otro lado, en la misma Figura se muestra que el estimado del observador no cooperativo puede producir una señal de alarma de que el tercer tanque está a punto de derramarse, sin ser cierto, y sólo produce señales de alerta falsas.

VI. CONCLUSIONES

Una metodología nueva de diseño de los observadores que preservan el orden para una clase de sistemas no lin-

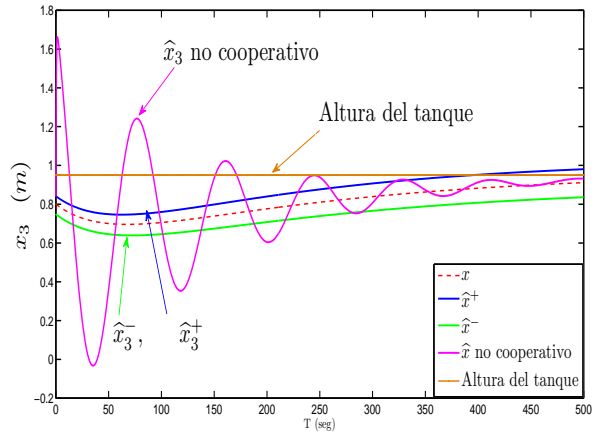


Figura 3. Comportamiento del Observador Intervalo

eales con o sin perturbaciones es propuesta. La metodología de diseño se basa en la conjunción del método de disipatividad con la propiedad de cooperatividad; ambas propiedades son aplicadas a la dinámica del error de estimación. El diseño es computacionalmente simple en muchos casos, puesto que esto se reduce a la solución de un problema LMI, para lo cual existen métodos numéricos altamente eficientes.

VII. AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. Jaime A. Moreno por el apoyo brindado para la realización de este proyecto. Este trabajo fue apoyado en parte por DGAPA-UNAM, el proyecto PAPIIT IN112207, y CONACyT, proyecto 51244.

REFERENCIAS

- Angeli, D. and Sontag, D. (2003). Monotone Control Systems. *IEEE Transactions Automatic*, Vol. 48, no. 10, pp. 1684-1698.
- Alcaraz-Gonzalez, V. and Harmand, J. and Rapaport, A. and Steyer, J.P. and Gonzalez-Alvarez, V. and Pelayo-Ortiz, C. (2002). Software sensors for highly uncertain WWTPS: a new approach based on interval observers. *Water Res.* no. 36, pp. 2215.
- Bastin, G. and Dochain, D. (1990). On-Line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors. *Elsevier, Amsterdam*.
- Bernard, O. and Gouze, J.L. (2004). Closed loop observers bundle for uncertain biotechnological models. *Journal of Process Control*. Vol. 14 (3), pp. 765-774
- Dochain, D. and Perrier, M. and Ydstie, B.E. (1992). Asymptotic observers for stirred tank reactors. *Chem. Eng. Sci.* Vol. 47, pp. 4167.
- Gouzé, J. L. and Rapaport, A. and Hadj-Sadok, M. Z. (2000). Interval observers for uncertain biological systems, *Ecol Modelling*. Vol. 133, no. 1-2, pp. 45-56.
- Hirsch, M.W. and Smith, H.L. (2005). *Monotone Dynamical Systems*. Handbook of differential equations: ordinary differential equations. Vol. II, Elsevier B. V., Amsterdam pp. 239-357, 2005.
- Moisan, M. and Bernard, O. and Gouze, J.L. (2009). Near optimal interval observers bundle for uncertain bioreactors. *Automatica* 45, pp. 291-295.
- Moreno, J. A. (2004b). Observer design for nonlinear systems: A dissipative approach. *Proceedings of the 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control SSSC2004*.
- Hassan K. Khalil. (2002). Nonlinear Systems. New York, USA. Prentice Hall, Third edition, 2002.
- Rapaport, A. and Dochain, D. (2005). Interval observers for biochemical processes with uncertain kinetics and inputs. *Mathematical Biosciences*. no. 1922, pp. 235-253.
- Rapaport, A. and Gouzé, J.L. (2003). Parallelotopic and practical observers for non-linear uncertain systems. *International Journal of Control*. Vol. 76, no. 3, pp. 237-251.
- Veloso, A. and Rocha, I. and Ferreira, E.C. (2007). Estimation of biomass concentration using interval observers in an *E. coli* fed-batch fermentation. *10th International IFAC Symposium on Computer Applications in Biotechnology*. 1 Cancún, México.
- Willems, J.C. (1972). Dissipative dynamical systems, part I: General theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 45. pp. 321-351.