

Dinámica caótica en sistemas mecánicos controlados con técnicas de control discontinuo

Iván Herrera, Joaquín Álvarez
CICESE, Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones
Ensenada, B.C. 22860, México
iherrera@cicese.mx, jqalvar@cicese.mx
Teléfono: 01 (646) 175-05-00 25301

Resumen—Se presenta el estudio de un sistema de segundo orden con una discontinuidad en uno de los estados, modelada mediante la función signo. El objetivo es realizar un estudio analítico, numérico y experimental para descubrir la presencia de bifurcaciones y caos. Se utilizó la teoría de Melnikov, una de las pocas herramientas analíticas para determinar las condiciones del sistema para que éste presente un comportamiento caótico. La dificultad radica en que el método fue desarrollado para sistemas continuos y no se puede aplicar directamente a sistemas discontinuos, por lo que se emplea una aproximación. Resultados numéricos y experimentales ilustran el análisis presentado.

Palabras clave: Teoría de Melnikov, comportamiento caótico, órbita homoclínica.

I. INTRODUCCIÓN

La presencia de ciertas discontinuidades en los sistemas dinámicos pueden producir comportamientos que no son comunes para el caso continuo, como por ejemplo: presentar un intervalo de puntos de equilibrio, presentar variedades deslizantes, ciclos límite, así como bifurcaciones no típicas (colisiones de frontera, bifurcaciones de tipo grazing y/o deslizantes (Di Bernardo, 2008), bifurcaciones discontinuas (Leine, 2000)), además de atractores caóticos. Una discontinuidad se puede presentar de manera natural en un sistema. Los fenómenos físicos tales como fricción seca, impacto y holgura mecánica (backlash por su término en inglés) en los sistemas mecánicos se modelan matemáticamente con alguna clase de discontinuidad. La presencia de fricción seca puede inducir vibraciones que pueden llegar a disminuir el desempeño de un sistema mecánico (Leine, 2000). En ocasiones se introduce intencionalmente un elemento discontinuo en el control de un sistema. El uso de estos elementos trae consigo algunas ventajas, como exhibir una robustez significativa frente a incertidumbres paramétricas en el modelo matemático del sistema a controlar. Los controladores implementados mediante técnicas de control discontinuo son ampliamente utilizados para controlar diferentes tipos de dispositivos en ingeniería, tradicionalmente sistemas mecánicos y electromecánicos, aunque recientemente su estudio se ha expandido a controladores de estructura variable, control supervisorio, métodos discontinuos para sintonización de controladores PID en

procesos industriales y convertidores delta-sigma en procesamiento digital de señales. Se ha demostrado que los sistemas con una discontinuidad o un elemento no lineal en el control, tal como una saturación, pueden exhibir comportamiento caótico (Banerjee, 1999), (Álvarez, 1997). En el presente trabajo se estudia un sistema dinámico discontinuo cuyo modelo matemático es generalizable a una variedad de modelos de sistemas mecánicos. Para este sistema, se discuten las condiciones para que presente caos homoclínico. Se incluyen igualmente resultados tanto numéricos como experimentales. El artículo está organizado como a continuación se indica. Se presenta el sistema a estudiar en la sección II. En la sección III se discuten la existencia y estabilidad de puntos de equilibrios. En la sección IV se presentan los resultados importantes sobre la teoría de Melnikov. Posteriormente, en la sección V se describe la aplicación de los resultados de la sección IV y en la sección VI se ilustran resultados numéricos y experimentales. Finalmente, en la sección VII se dan algunas conclusiones y comentarios finales.

II. PLANTEAMIENTO DEL MODELO.

Un gran número de procesos dinámicos que operan alrededor de un punto de equilibrio, pueden ser modelados por un sistema de segundo orden caracterizado por una frecuencia natural ω_n y un coeficiente de amortiguamiento ζ . En su forma más simple el sistema puede ser descrito por la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

donde s es la variable de Laplace y K es la ganancia en estado permanente. En el presente trabajo se considera que (1) está retroalimentado por un controlador de la forma $u(t) = M \operatorname{sign}(x_1) + v(t)$ y se pretende observar su efecto sobre la dinámica del sistema en lazo cerrado. Este es un caso particular de una clase más general de controladores discontinuos propuestos recientemente para el control de sistemas mecánicos (Álvarez, 2009).

La representación en variables de estado del sistema está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_n^2 x_1 - 2\zeta\omega_n x_2 + K\omega_n^2 (M \text{sign}(x_1) + v(t)) \end{aligned} \quad (2)$$

donde $x_1 = x$ es el estado que representa la posición y $x_2 = \dot{x}$ la velocidad, $v(t)$ es una entrada de perturbación del sistema y $\text{sign}(\cdot)$ es la función signo multi-evaluada, ver (Leine, 2000, pág. 11), definida como

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ [-1, 1] & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (3)$$

III. BIFURCACIONES DE PUNTOS DE EQUILIBRIOS.

Los puntos de equilibrio del sistema (2) se tienen cuando $u(t) = 0$ y satisfacen la expresión (4):

$$\begin{aligned} x_1 &= L \text{sign}(x_1) \\ x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

en donde $L = KM$, se observa que si $L < 0$ se tiene un único punto de equilibrio en el origen y si $L > 0$ se tienen 3 puntos de equilibrio: $\bar{x}_{(1)} = (0, 0)$, $\bar{x}_{(2,3)} = (\pm L, 0)$. Una vez obtenidos los puntos de equilibrio, el siguiente paso es determinar su estabilidad.

Caso $L < 0$. En este caso el sistema (2) tiene un punto de equilibrio en el origen.

Para determinar la estabilidad del punto de equilibrio en el origen se utilizó el método de Lyapunov. Sin embargo, el punto de equilibrio bajo estudio se encuentra sobre la superficie de discontinuidad y se propone emplear una función candidata de Lyapunov no diferenciable, obtenida a partir del análisis de estabilidad de sistemas discontinuos (Cortés, 2008) cuya ecuación está dada por

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{\omega_n^2 x_1^2 + x_2^2}{2} + |K\omega_n^2 \beta x_1| \\ \dot{V}(x) &= \nabla V(x) \cdot f(x) = -2\zeta\omega_n x_2^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

En el sentido de estabilidad de Lyapunov, el origen es un punto de equilibrio estable. La estabilidad del origen de este sistema, ha sido estudiada anteriormente y además se ha demostrado que en presencia de disipación $\zeta \neq 0$, el origen es asintóticamente estable (Cortés, 2008).

Caso $L > 0$. Para este caso el sistema (2) tiene 3 puntos de equilibrios. El espacio de estados puede ser dividido en 2 regiones separados por la superficie de discontinuidad, la cual puede ser definida mediante una función escalar $h(x) = x_1$. En estas regiones el sistema es completamente diferenciable y, por tanto, se puede emplear la teoría de

estabilidad para sistemas diferenciables. Las regiones y la superficie de discontinuidad están definidos como:

$$\begin{aligned} G^- &= \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) < 0\} \\ \Sigma &= \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) = 0\} \\ G^+ &= \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) > 0\} \end{aligned}$$

Y el sistema (2) queda expresado como:

$$\dot{x} = \begin{cases} f^-(x) & h(x) < 0 \\ f^+(x) & h(x) > 0 \end{cases} \quad (6)$$

donde:

$$\begin{aligned} f^-(x) &= \begin{pmatrix} x_2 \\ -\omega_n^2 x_1 - 2\zeta\omega_n x_2 - L\omega_n^2 + u(t) \end{pmatrix} \\ f^+(x) &= \begin{pmatrix} x_2 \\ -\omega_n^2 x_1 - 2\zeta\omega_n x_2 + L\omega_n^2 + u(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Las matrices de estado del sistema son idénticas, por lo tanto los equilibrios $\bar{x}_{(2)} = (-L, 0)$ y $\bar{x}_{(3)} = (L, 0)$ situados en las regiones G^- y G^+ correspondientemente, poseen las mismas propiedades de estabilidad. Fácilmente la estabilidad de ambos puntos de equilibrios puede obtenerse a partir de los valores propios de los subsistemas $f^-(x)$ y $f^+(x)$:

$$\lambda_{1,2}^{\pm} = \omega_n \left(\frac{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2} \right) \quad (7)$$

Dado que el coeficiente de amortiguamiento es positivo para sistemas físicos, los valores propios (7) tienen parte real negativa y por tanto los equilibrios son asintóticamente estables. El tipo de bifurcación de puntos de equilibrios es una bifurcación llamada tipo tridente (Pitchfork, su término en inglés) discontinua, descrita en (Leine, 2000).

IV. MÉTODO DE MELNIKOV PARA ÓRBITAS HOMOCLÍNICAS.

El método de Melnikov es una técnica global de análisis que da condiciones para la existencia de una bifurcación homoclínica. Este tipo de bifurcaciones, acompañadas de una excitación externa periódica, puede generar importantes cambios en las cuencas de atracción que degeneran en los llamados *enredos homoclínicos*. Se sabe que la intersección de órbitas homoclínicas transversales en sistemas de 2 dimensiones produce dinámica caótica (Wiggins, 1990, págs. 475-483). Una *órbita homoclínica* es aquella que está formada por una trayectoria que une a un punto de equilibrio consigo mismo. La teoría de Melnikov estudia sistemas que poseen la siguiente estructura:

$$\dot{q} = JDH(q) + \varepsilon g(q, t, \varepsilon) \quad (8)$$

donde $q = (x \ y)^T$, $DH = \left(\frac{\partial H}{\partial x} \ \frac{\partial H}{\partial y} \right)^T$, $g = (g_1 \ g_2)^T$ y $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Se asume que (8) es lo suficientemente diferenciable ($C^r, r \geq 2$) en la región de interés. Más importante,

también se asume que la función g es periódica en t y con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Cuando $\varepsilon = 0$ al sistema (8) se le llama sistema no perturbado. Además para aplicar la teoría se deben cumplir dos condiciones sobre la estructura del retrato de fase del sistema no perturbado (Wiggins, 1990).

Condición 1: El sistema no perturbado posee un punto de equilibrio hiperbólico, p_0 , conectado consigo mismo por una órbita homoclínica $q_0 \equiv (x_0(t), y_0(t))$.

Condición 2: Sea $\Gamma_{p_0} = \{q \in \mathbb{R}^2 | q = q_0(t), t \in \mathbb{R}\} \cup \{p_0\} = W^s(p_0) \cap W^u(p_0) \cup \{p_0\}$. El interior de Γ_{p_0} está lleno de una familia continua de órbitas periódicas $q^\lambda(t)$ con periodo $T^\lambda, \lambda \in (-1, 0)$. Se asume que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} q^\lambda(t) = q_0(t)$, y $\lim_{\lambda \rightarrow 0} T^\lambda = \infty$.

Cuando el sistema (8) es perturbado por una excitación periódica externa, es decir $\varepsilon \neq 0$, la órbita homoclínica es destruida; más aún, la perturbación puede provocar que la variedad estable W^s e inestable W^u , que antes formaban la órbita homoclínica, se intersecten en más de un punto. Tales intersecciones pueden ser tangenciales o transversales. El hecho de que las variedades estables e inestables del sistema perturbado se intersecten de manera transversal está relacionado con la presencia de un conjunto invariante caótico (Wiggins, 1990). Detectar éstas intersecciones transversales son de particular interés para la predicción de dinámica caótica. Para ello se cuenta con la función de Melnikov y el teorema de Melnikov-Smale, las cuales se mencionan a continuación. La función de Melnikov está dada por

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} DH(q_0(t)) \cdot g(q_0(t), \omega(t+t_0)) dt \quad (9)$$

El teorema de Melnikov-Smale establece lo siguiente:

Teorema 1: Teorema de Melnikov-Smale (Wiggins, 1990). Suponga que hay un punto $t_0 = \bar{t}_0$ tal que

$$M(\bar{t}_0) = 0 \quad \frac{\partial M(\bar{t}_0)}{\partial t_0} \neq 0 \quad (10)$$

Entonces W^s y W^u se intersectan transversalmente. Más aún, si $M(\bar{t}_0) \neq 0$ para todo $\bar{t}_0 \in \mathbb{R}^1 \times S^1$, entonces $W^s \cap W^u = 0$.

V. DINÁMICA CAÓTICA.

En esta sección se aplica la teoría de Melnikov para analizar el efecto de una perturbación de la forma $v(t) = A \text{sen}(\omega t)$ al sistema (2). Sin embargo, al ser este sistema discontinuo en $x_1 = 0$, no satisface la condición de diferenciabilidad para aplicar la teoría. Es por esta razón que se propone realizar el estudio reemplazando la función $\text{sign}(x_1)$ por una aproximación. La función propuesta es una función saturación con una alta pendiente de la parte lineal. Esta aproximación se propuso a partir del trabajo (Alvarez, 1997) y se prefirió sobre otras aproximaciones

TABLA I

EQUILIBRIOS DEL SISTEMA AL UTILIZAR UNA FUNCIÓN SATURACIÓN.

Condiciones	Equilibrios
$b < \beta/\alpha$	$\bar{x}_{(1)} = (0, 0), \bar{x}_{(2,3)} = (\pm\beta/\alpha, 0)$
$b = \beta/\alpha$	$\bar{x}_1 \in [-1, 1] \quad \bar{x}_2 = 0$
$b > \beta/\alpha$	$\bar{x} = (0, 0)$

para facilitar los cálculos matemáticos. La ecuación general de la saturación está dada por (11):

$$\text{sat}(b, x_1) = \frac{1}{2b} (|x_1 + b| - |x_1 - b|) \quad (11)$$

El valor del parámetro b define la pendiente de la saturación. Con esta aproximación y de acuerdo a lo discutido en IV, el sistema (2) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_1 + \beta \text{sat}(b, x_1) + \varepsilon \left(-\tilde{\delta} x_2 + \tilde{A} \text{sen}(\omega t) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

donde se sustituye $\alpha = \omega_n^2, \beta = L\omega_n^2, \delta = 2\zeta\omega_n = \varepsilon\tilde{\delta}, \varepsilon\tilde{A} = K\omega_n^2 A$ para simplificar cálculos.

Los puntos de equilibrio del sistema (12) con $v(t) = 0$ satisfacen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\beta}{\alpha} \text{sat}(b, x_1) \\ x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Nótese que $\beta/\alpha = L$. Dependiendo de los parámetros α, β y b , el sistema (12) puede tener 1 equilibrio, un intervalo continuo de equilibrios o 3 puntos de equilibrios. Los resultados se resumen en la tabla I. En el primer caso $\bar{x}_{(1)} = (0, 0)$ es un punto homoclínico y $\bar{x}_{(2,3)}$ son centros. Este caso satisface las condiciones 1 y 2 de la sección IV.

Es necesario encontrar primero una ecuación en función del tiempo para las órbitas homoclínicas que se puede obtener a partir de la ecuación diferencial del Hamiltoniano. El Hamiltoniano del sistema (12) está dado por la expresión (14).

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{1}{2} x_2^2 + V(x_1) \\ V(x_1) &= \begin{cases} \frac{\alpha x_1^2}{2} + \beta \left(x_1 + \frac{b}{2} \right) & x_1 < -b \\ \frac{\alpha x_1^2}{2} - \frac{\beta}{2b} x_1^2 & |x_1| \leq b \\ \frac{\alpha x_1^2}{2} - \beta \left(x_1 - \frac{b}{2} \right) & x_1 > b \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Por ejemplo, para calcular la órbita homoclínica correspondiente al semiplano derecho del espacio de estados se debe resolver la ecuación diferencial $H(x) = 0$.

$$\begin{aligned} x_1^h(t) &= \begin{cases} b e^{k_1(t-t_1)} & t < t_1 \\ \gamma + k_2 \cos(\sqrt{\alpha} t) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ b e^{-k_1(t-t_2)} & t > t_2 \end{cases} \\ x_2^h(t) &= \begin{cases} b k_1 e^{k_1(t-t_1)} & t < t_1 \\ -\sqrt{\alpha} k_2 \text{sen}(\sqrt{\alpha} t) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ b k_1 e^{k_1(t-t_2)} & t > t_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

donde $\gamma = \beta/\alpha$, $k_1 = \sqrt{\beta/b - \alpha}$, $k_2 = \sqrt{\beta(\beta - \alpha b)}/\alpha$, $t_1 = 1/\alpha \arccos((b - \gamma)/k_2)$ y $t_2 = -t_1$.

Si se hace que $b \rightarrow 0$, lo cual corresponde a aproximar la saturación a una función signo, entonces la órbita homoclínica del semiplano derecho se reduce a:

$$\lim_{b \rightarrow 0} x_1^h(t) = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ \gamma + k_2 \cos(\sqrt{\alpha}t) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & t > t_2 \end{cases} \quad (16)$$

$$\lim_{b \rightarrow 0} x_2^h(t) = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ -\sqrt{\alpha}k_2 \text{sen}(\sqrt{\alpha}t) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & t > t_2 \end{cases}$$

Con $t_1 = -\pi/\sqrt{\alpha} = -t_2$.

En la figura 1(a) se observa la órbita homoclínica correspondiente a $b = 1$ y en la figura 1(b) para un valor de $b = 1 \times 10^{-10}$.

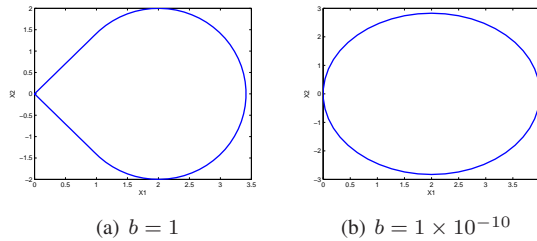


Figura 1. Órbitas homoclínicas para $\alpha = 2$ y $\beta = 4$.

Desarrollando la integral de Melnikov para el sistema (12) se obtiene:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2^h(t) \left(\tilde{A} \text{sen}(\omega(t+t_0)) - \tilde{\delta} x_2^h(t+t_0) \right) dt \quad (17)$$

Esta integral es diferente de cero para $t_1 < t < t_2$ y cero para cualquier otro tiempo cuando $b \rightarrow 0$. Calculando (17) y posteriormente derivando con respecto a t_0 se obtiene:

$$M(t_0) = C_1 \cos(\omega t_0) + C_2$$

$$\frac{\partial M(t_0)}{\partial t_0} = -\omega C_1 \text{sen}(\omega t_0) \quad (18)$$

donde $C_1 = \frac{2\tilde{A}\beta}{\omega^2 - \alpha} \text{sen}\left(\frac{\omega\pi}{\sqrt{\alpha}}\right)$ y $C_2 = -\frac{\delta\beta^2\pi}{(\alpha)^{3/2}}$.

Para que la función de Melnikov tenga ceros se debe satisfacer que $|C_1| > |C_2|$. Ya que las ecuaciones (17) cumplen con el teorema (1), entonces para una perturbación lo suficientemente pequeña ε , la ecuación (19) da condiciones suficientes para que el sistema (12) presente un comportamiento caótico cuando se hace que el parámetro de la saturación $b \rightarrow 0$.

$$|\varsigma| \leq \left| \frac{A\omega_n^2}{M\pi(\omega^2 - \omega_n^2)} \text{sen}\left(\frac{\omega\pi}{\omega_n}\right) \right| \quad (19)$$

La ecuación (19) se puede normalizar de la siguiente forma:

$$1 \leq \frac{|\sigma(\theta)|}{|\varsigma|} \quad (20)$$

en donde

$$\sigma(\theta) = \frac{A\omega_n^2}{M\pi(\omega^2 - \omega_n^2)} \text{sen}\left(\frac{\omega\pi}{\omega_n}\right) \quad (21)$$

y $\theta = (A, \omega, \omega_n, M) \in \mathbb{R}^4$.

Si $\omega = \omega_n$ en la ecuación (21) se obtiene una indeterminación del tipo 0/0. Para este caso, se puede aplicar la regla de l'Hôpital para evaluar el límite

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_n} |\sigma(\theta)| = \left| \frac{A}{2M} \right|$$

En el límite $\omega \rightarrow \omega_n$, la condición para caos se reduce a

$$1 \leq \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \frac{|\sigma(\theta)|}{|\varsigma|} \quad (22)$$

$$1 \leq \left| \frac{A}{2M\varsigma} \right|$$

VI. RESULTADOS

En esta sección se ilustra la aplicación de los resultados de la sección anterior al sistema rectilíneo de la compañía ECP, modelo 210. Se trata un sistema masa-resorte-amortiguador con k , la constante del resorte, m la masa y c la constante de amortiguamiento. Si x denota la posición de la masa y la fuerza aplicada, entonces su función de transferencia es:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1/m}{s^2 + \delta s + \alpha} \quad (23)$$

donde se ha sustituido $\alpha = k/m$, $\delta = c/m$. Supóngase que al sistema se aplica un control dado por $u(t) = M \text{sign}(x_1) + v(t)$ y $v(t)$ es una entrada de perturbación periódica de la forma $A \text{sen}(\omega t)$. La representación en variables de estado del sistema (23) está dada por

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha x_1 - \delta x_2 + \frac{1}{m} (\beta \text{sign}(x_1) + A \text{sen}(\omega t)) \quad (24)$$

Para estimar el coeficiente c , se empleó el método de respuesta a la frecuencia. En la figura 2 se ilustran la respuesta frecuencial real (FT), la función de análisis de coherencia (FAC) y la respuesta frecuencial analítica (G). La frecuencia de resonancia del sistema físico es igual a $f_r = 2,4$ Hz.

La función de transferencia propuesta es:

$$G_a(s) = \frac{0,4848}{s^2 + 2,25s + 193,95} \quad (25)$$

en donde $c = 4,6404 \text{ kg/s}$ o bien $\delta = 2,25$. En este ejemplo se utilizó un resorte con constante $k = 400 \text{ N/m}$. Una vez obtenida una estimación aproximada del amortiguamiento, se toman los valores $c = 4,6404 \text{ kg/s}$, $A = 0,55 \text{ N}$, $f = 3 \text{ Hz}$, $M = 1$ y se deja la constante $100 < k < 900$ debido

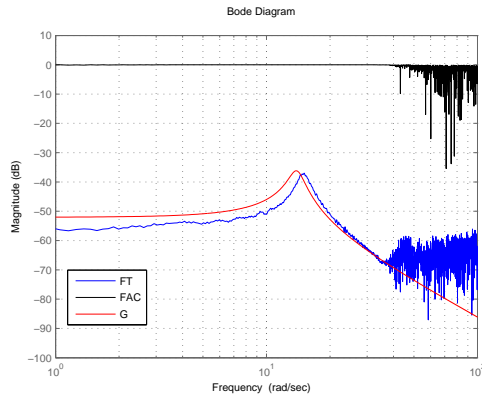


Figura 2. Función de transferencia del sistema físico en lazo abierto.

a que se tiene incertidumbre en los valores nominales de los resortes¹. Estos valores se sustituyeron en la ecuación (20) para obtener la figura (3), en donde se muestran las condiciones analíticas que ofrecen el criterio para caos homoclínico (20).

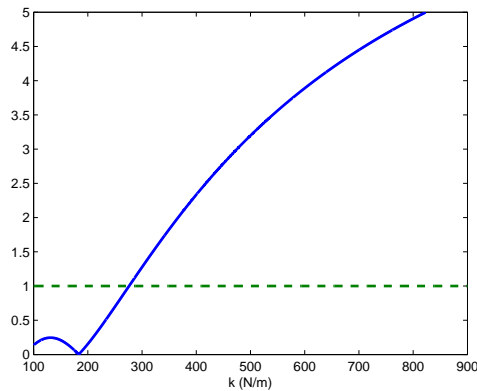


Figura 3. Condiciones analíticas ($f = 3$ Hz).

La condición (20) se cumple para un valor $k > 276,1N/m$; es decir, que es posible encontrar comportamiento caótico para cualquier valor de la constante $k > 276,1N/m$. Sin embargo, la condición (20) sólo es suficiente para garantizar la existencia de un conjunto invariante caótico pero no da condiciones sobre su estabilidad. Es claro entonces que un conjunto invariante caótico que no sea atractor, no podrá visualizarse experimentalmente aún cuando se satisfaga la ecuación (20). Si la condición (20) no se cumple, entonces se puede asegurar con certeza que el sistema no exhibirá caos homoclínico. En la figura 4 se muestra un diagrama de bifurcación numérico obtenido a partir de muestrear el estado x_1 en intervalos de $T =$

¹Para los experimentos en el laboratorio, solo se contaba con resortes cuyos valores nominales son de 200, 400 y 800 N/m. Se estableció el rango de valores para una variación de 100 N/m. en los valores extremos.

$2\pi/\omega$ seg. El parámetro de bifurcación es la constante del resorte k . Se aplicó una excitación senoidal al sistema igual a $v(t) = 0,55sen(2\pi(3)t)$ y se tomaron los mismos parámetros utilizados para obtener la figura (3). Para la realización de las simulaciones numéricas se utilizó MATLAB y se empleó una función saturación (11) con $b = 1 \times 10^{-10}$. Para el diagrama de bifurcación se ejecutaron 4000 ciclos con un tiempo de simulación de 500 seg. por cada ciclo y se tomaron los últimos 250 seg. para realizar el muestreo y descartar las respuestas transitorias. El diagrama se obtuvo para estimar el rango de valores de la constante del resorte en el que el sistema presenta una dinámica compleja. En el diagrama de la figura (4) se observa que alrededor de $k = 800$, la cual es la zona de interés práctica, ocurre este tipo de dinámica, y que para $k < 276,1$ se tiene una órbita periódica de periodo 1 ($T = 2\pi/\omega$).

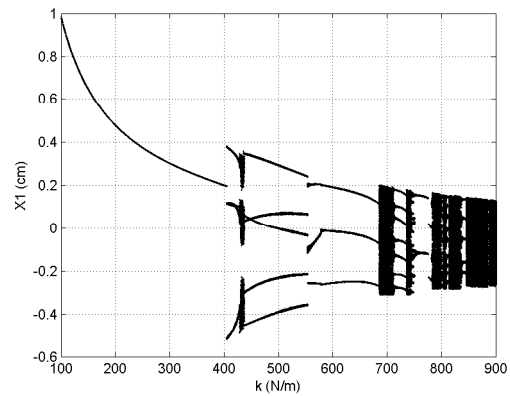


Figura 4. Diagrama de bifurcación numérico ($f = 3$ Hz).

En la figura (5) se muestran las series de tiempo experimentales de los estados x_1 y x_2 para $u(t) = 0,55sen(2\pi(3)t)$ y $M = 1$. Los parámetros de la planta son: $k = 800N/m$, $c = 1,0909kg/s$, $m = 2,06238Kg$.

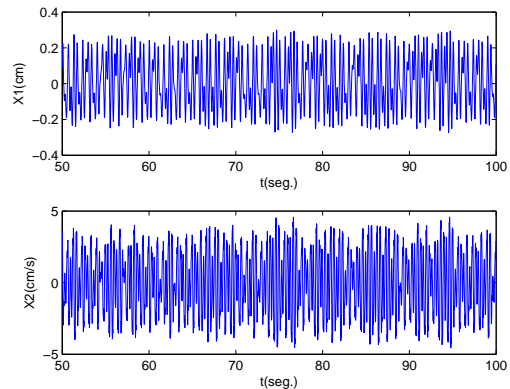


Figura 5. Estados x_1 (posición de la masa) y x_2 (velocidad de la masa)

En la figura (6) se muestra el retrato de fase experimental para los valores paramétricos mencionados con anterioridad.

La duración del experimento fue de 100 seg. y para el retrato de fase se graficaron los últimos 50 seg. para descartar la respuesta transitoria.

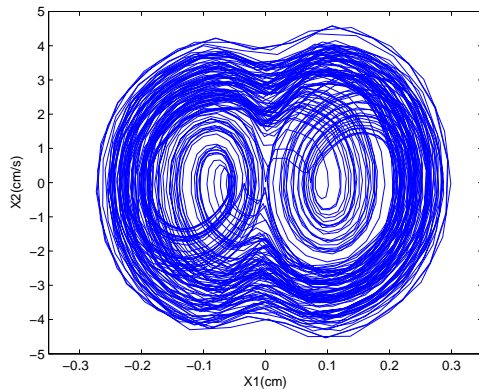


Figura 6. Retrato de fase experimental

En la figura (7) se ilustra el espectro de magnitud del estado x_1 para la misma entrada $v(t)$.

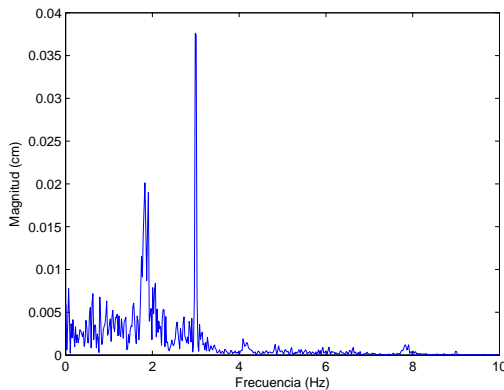


Figura 7. Espectro de Fourier del estado x_1

Ahora bien, si se dejan los parámetros empleados para obtener la figura (3) pero cambiando únicamente la frecuencia de la excitación de perturbación $f = 6Hz.$, se obtienen las condiciones analíticas de la figura (8).

De la figura (8) se concluye que para cualquier valor $100 < k < 900$, el sistema no presentará un comportamiento caótico. En la figura (8) se muestra el diagrama de bifurcación para este caso, en donde se observa que para todo el rango de valores el sistema presenta una oscilación periódica de periodo $T = 2\pi/\omega$.

VII. CONCLUSIONES.

En este trabajo se presentó el análisis de la dinámica de un sistema de segundo orden, seccionalmente lineal. Se discutió acerca de bifurcaciones locales de puntos de equilibrio, más no así de bifurcaciones de órbitas periódicas.

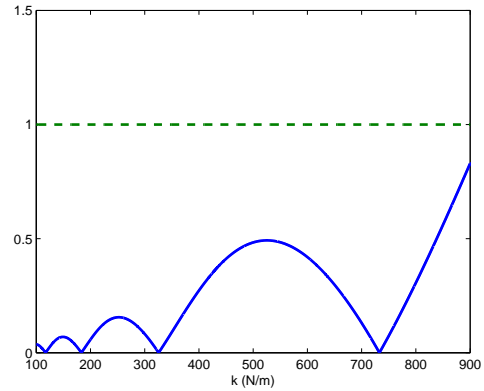


Figura 8. Condiciones analíticas ($f = 6 Hz$).

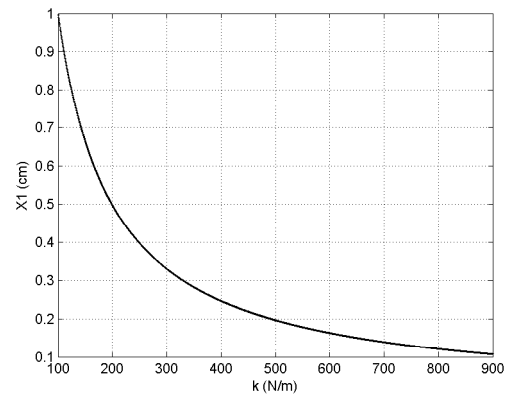


Figura 9. Diagrama de bifurcación ($f = 6 Hz$).

Utilizando la teoría de Melnikov y el teorema de Smale, se buscaron condiciones suficientes para la existencia de un conjunto invariante caótico. Algunos resultados numéricos y experimentales son mostrados para ilustrar el análisis presentado.

REFERENCIAS

- Álvarez, J., Curiel, Luis E. (1999). *Bifurcations and Chaos in a linear control system with saturated input*. International Journal of Bifurcation and Chaos VOL.7 NO.8 (1811-1822)
- Álvarez, J., Rosas, D., Peña, J. (2009) *Analog Implementation of a Robust Control Strategy for Mechanical Systems*. Aceptado en IEEE Transactions on Industrial Electronics.
- Banerjee, S., Grebogi, C. (1999). *Border collision bifurcations in two-dimensional piecewise smooth maps*. PHYSICAL REVIEW E. VOL.59 NO.4 (4052-4061)
- Cortés, Jorge (2008). *Discontinuous Dynamical Systems: A tutorial on solutions, nonsmooth analysis and stability*. IEEE Control Systems Magazine (36-73)
- di Bernardo, M., Budd, C.J., Champneys, A.R., Kowalczyk, P. 2008. *Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. Springer-Verlag. London.
- Leine, Remco I. (2000). *Bifurcations in Discontinuous Mechanical Systems of Filippov-type*. Eindhoven. Technische Universiteit Eindhoven.
- Wiggins, S. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag. New York.