

Diagnóstico de Fallas en el Motor de Inducción: Un Enfoque Algebraico Diferencial

F. Silva-Carranza; O. Toledo-Ojeda; C.D. García-Beltrán; A. Rodríguez-Palacios; A. Hernández-Sánchez
Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira Cuernavaca, Morelos, México
{ fsilvac2806e,otoledo07e,cgarcia;arpa; asjovi06e }@cenidet.edu.mx

Resumen—Recientemente se propuso el Enfoque Algebraico Diferencial para el Diagnóstico de Fallas. Consiste en traducir la solución del problema de diagnóstico en términos de la Observabilidad Algebraica de la variable, que modela la presencia de una falla. La solución del problema de diagnóstico se interpreta como la habilidad para deducir una relación algebraica-diferencial con coeficientes en un campo diferencial para cada componente de la variable de falla. Aquí, se consideró el Enfoque Algebraico y se abordó la detección y estimación de Fallas en el modelo del Motor de Inducción con Rotor Devanado (MIRD). Se detectan y localizan fallas en parámetros y sensores. La etapa de reconstrucción de fallas que se diseña, permite estimar el comportamiento de fallas aditivas, multiplicativas y simultáneas.

Palabras clave: fault diagnosis, state reconstructor, algebraic observer, induction motors,

I. INTRODUCCIÓN

Una cuestión importante en los sistemas de control es cómo detectar, localizar y estimar fallas en los procesos. El Diagnóstico de Fallas busca mediante la medición de las variables conocidas (salidas y entradas) reconstruir la dinámica de una entrada desconocida (falla), que afecta el desempeño de un sistema.

La detección de fallas en los procesos permite tomar acciones correctivas y reducir el daño que una falla puede ocasionar al sistema. Debido a esto, en los últimos años el objetivo de la detección y la localización de fallas (FDI) es el estudio de metodologías para localizar, identificar y caracterizar las posibles fallas que se presentan en los procesos.

Existe una rica variedad de enfoques para solucionar el problema de Diagnóstico en los sistemas no lineales: el Enfoque Geométrico Diferencial [Persis e Isidori, 2001], metodologías de Enfoques Computacionales [Patton et. al., 1989], metodologías empleando el marco del Álgebra Diferencial donde el problema de diagnóstico va ligado a un problema de observabilidad algebraica donde las fallas se definen como entradas desconocidas.

En este artículo se considera el Enfoque Algebraico Diferencial (EAD) que introdujo Fliess [Fliess, 1987], y que se aplica en [Martínez-Guerra y Diop, 2004; Fliess y Sira-Ramírez, 2004; Luviano et. al., 2006] para solucionar el problema de FDI.

Dicho enfoque permite definir el concepto de observabilidad algebraica y proporciona una estimación del estado a través del diseño de observadores para sistemas que se representan por ecuaciones algebraicas diferenciales. Desde esta perspectiva, las variables de un

sistema se pueden expresar en términos de las entradas, de las salidas y de un conjunto de sus derivadas de orden finito con respecto al tiempo.

Así, la principal aportación del presente trabajo es una estrategia de Diagnóstico de Fallas desde el Enfoque Algebraico Diferencial, para generar observadores algebraicos no lineales que permitan resolver el problema de la detección y estimación de fallas en el modelo del motor de inducción con rotor devanado.

II. FUNDAMENTO TEÓRICO DEL ENFOQUE ALGEBRAICO DIFERENCIAL

Si en un campo algebraico se puede definir la operación de derivación, a éste se le llama campo diferencial.

Definición 1. *Un campo conmutativo K de característica cero, es un campo diferencial si la operación de derivación está definida en él. Para cualesquiera dos elementos a, b que pertenecen al campo K , se tiene que:*

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{d}{dt}(a + b) &= \dot{a} + \dot{b} \\ 2. \quad \frac{d}{dt}(ab) &= b\dot{a} + \dot{b}a \end{aligned} \quad (1)$$

Un campo puede estar incluido en otro campo más grande; a esto, formalmente, se le denomina extensión de campo.

Definición 2. *Una extensión de campo diferencial, denotada por L/K donde K y L son campos diferenciales satisface las condiciones siguientes:*

- i) K es un subcampo de L , ($K \subseteq L$).
- ii) La diferenciación en K es la restricción de la diferenciación de L en K .

Definición 3. *Una extensión de campos diferenciales L/K está generada finitamente si existe un subconjunto $S \subset L$ tal que $L = K\langle S \rangle$, es decir, L está generado por el campo diferencial K y los elementos de S .*

Si los elementos de un campo arbitrario son raíces de alguna ecuación polinomial, entonces, éstos son algebraicos; en caso contrario se les designa como elementos trascendentes. Para el caso diferencial formalmente se tienen las siguientes definiciones:

Definición 4. *Un elemento $\xi \in L$ es algebraico diferencialmente sobre K si, y sólo si satisface una ecuación algebraica diferencial $P(\xi, \dot{\xi}, \dots, \xi^{(\omega)}) = 0$, donde*

P es un polinomio sobre K en la indeterminada ξ y un número finito de sus derivadas.

Un elemento $a \in L$ es **trascendental diferencialmente** sobre K si, y sólo si éste no es algebraico diferencialmente sobre K . La extensión L/K es **trascendental diferencialmente** si, y sólo si existe por lo menos un elemento de L que es **trascendental diferencialmente** sobre K .

Que un elemento $a \in L$ sea trascendental diferencialmente sobre K significa que no existe sobre K una ecuación algebraica diferencial para la cual a es una de sus raíces.

Estos conceptos de *elemento algebraico* y *elemento trascendente* se utilizan en la siguiente sección, ya que como se mencionó anteriormente es necesario realizar una estimación de los estados con el propósito de diseñar el sistema de diagnóstico de fallas. Pero para que los estados sean observables desde el enfoque algebraico, es necesario que éstos sean raíces de una expresión polinomial, es decir, que el estado sea algebraico sobre un campo dado, así éste será observable algebraicamente con respecto a la extensión generada por el campo de base dado, las entradas y las salidas del sistema al que pertenece. Para conocer más de estos conceptos del EAD ver [Fliess, 1990], [Fliess et al, 2004], [Martínez-Guerra y Diop, 2004] y [Martínez-Guerra et. al., 2007].

III. CONDICIÓN DE OBSERVABILIDAD ALGEBRAICA

Considere el sistema dinámico polinomial, no lineal de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x, u, f) \\ y(t) = h(x, u) \end{cases} \quad (2)$$

Donde $x(t) = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$ es el vector de estados, $u(t) = (u, f) \in R^{m-\mu} \times R^\mu$ donde u es un vector de entrada (entrada conocida) y $f(t) = (f_1, \dots, f_\mu)$ es un vector de fallas (entrada desconocida), $y(t) = (y_1, \dots, y_p) \in R^p$ es el vector de salidas medibles. A y h son funciones polinomiales, respectivamente.

Las ecuaciones obtenidas mediante diferenciación de las funciones de salida, sólo contienen expresiones polinomiales. Esto permite usar una nueva definición de observabilidad basada en la siguiente idea intuitiva: *la variable de estado x_i , $i = 1, \dots, n$ es **observable algebraicamente** si, y sólo si existe una relación algebraica que asocie a cada x_i , con las entradas, las salidas y un número finito de sus derivadas con respecto al tiempo.* Se está ahora preparado para una definición formal de observabilidad algebraica.

Sea $\{u, y\}$ un subconjunto de G , donde $u = (u_1, \dots, u_m)$ y $y = (y_1, \dots, y_n)$, y con una dinámica $G/K\langle u \rangle$.

Definición 5. Se dice que un estado x es **observable algebraicamente** con respecto a $\{u, y\}$ si, y sólo si x es **algebraico** sobre el campo $K\langle u, y \rangle$.

Definición 6. Se dice que una dinámica $G/K\langle u \rangle$ es **observable algebraicamente** si, y sólo si cualquier estado que pertenece a ésta también lo es.

IV. CONDICIÓN DE DIAGNOSTICABILIDAD

El problema de diagnóstico de un sistema es poder **detectar** inconsistencias entre el comportamiento real y el comportamiento esperado, **localizar** el componente físico que explica el comportamiento anormal y **estimar** el tipo y la magnitud de la falla. Retomando esta idea, se puede decir, que un sistema para el cual este problema tiene solución se dice que es *diagnosticable*.

El sistema (2) es *diagnosticable* si es posible estimar la falla f a partir de las ecuaciones del sistema y de los datos correspondientes a la entrada u y a la salida y . Formalmente, el sistema es *diagnosticable* si f es *observable algebraicamente* con respecto a u y y .

La noción de observabilidad de una falla, que se necesita para el sistema representado en (2) es la siguiente [Martínez-Guerra y Diop, 2004]:

Definición 7. La falla f es **observable** con respecto a u y y , si cada componente de falla f_i es algebraico sobre la extensión de campo diferencial de K generada por los datos de u y de y .

Se considera un nuevo concepto con el fin de definir la *condición de falla observable algebraicamente*.

Definición 8. Un elemento f en G se dice que es **observable algebraicamente** si f satisface una ecuación algebraica diferencial con coeficientes sobre el campo $K\langle u, y \rangle$.

La noción de observabilidad algebraica requiere que cada componente de falla se pueda escribir como una solución de una ecuación polinomial con coeficientes en K , en f_i y en un número finito de derivadas de u y de y con respecto al tiempo. Lo que se expresa como:

$$P_i(f_i, u, y, \dot{u}, \dot{y}, \dots, u^{(n)}, y^{(n_2)}) = 0 \quad (3)$$

Donde, $n_1, n_2 \in R^+, 1 \leq i \leq \mu$.

Esto se conoce como la condición de diagnosticabilidad para las fallas presentes en un sistema.

V. MODELO DEL MOTOR DE INDUCCIÓN

El modelo del motor de inducción que se considera en este análisis tiene la importante característica de mantener explícitos los valores de las resistencias de cada uno de los devanados del motor.

Este modelo se reporta en [Vidal, 2006], su principal ventaja es que permite localizar exactamente la fase en que se produce una falla. Además de la posibilidad de provocar fallas en corto circuito y circuito abierto en cualquiera de las tres fases.

En notación matricial el modelo del motor trifásico (subsistema eléctrico), se expresa por [Vidal et. al., 2005]:

$$\begin{aligned} V_s^{abc} &= R_s^{abc} I_s^{abc} + p \lambda_s^{abc} \\ V_r^{abc} &= R_r^{abc} I_r^{abc} + p \lambda_r^{abc} \end{aligned} \quad (4)$$

Aquí, a, b, c representan cada una de las fases; $\lambda_{as}, \lambda_{bs}, \lambda_{cs}$ son los enlaces de flujo trifásicos en el estator; $\lambda_{ar}, \lambda_{br}, \lambda_{cr}$ son los enlaces de flujo trifásicos en el rotor; I_{as}, I_{bs}, I_{cs} son las corrientes trifásicas de estator; I_{ar}, I_{br}, I_{cr} son las corrientes trifásicas de rotor; R_s y R_r son las resistencias de estator y rotor, respectivamente; V_{as}, V_{bs}, V_{cs} son los voltajes de estator y V_{ar}, V_{br}, V_{cr} son los voltajes de rotor, para este caso son cero.

Por medio de la teoría del marco de referencia se realiza un cambio de variables trifásicas (abc) a bifásicas ($dq0$) por medio del cual es posible encontrar un modelo del motor de inducción más simple y equivalente al modelo trifásico. La transformación se lleva a cabo en el marco de referencia fijo al estator.

El modelo del motor de inducción al transformarse en el marco de referencia arbitrario se convierte en:

$$\begin{aligned} v_s^{dq0} &= k_{dq0}(\theta) V_s^{abc} \\ v_s^{dq0} &= k_{dq0}(\theta) R_s^{abc} k_{dq0}^{-1}(\theta) I_s^{dq0} + \omega \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda_s^{dq0} + p \lambda_s^{dq0} \\ v_r^{dq0} &= k_{dq0}(\theta - \theta_r) V_r^{abc} \\ v_r^{dq0} &= k_{dq0}(\theta - \theta_r) R_r^{abc} k_{dq0}^{-1}(\theta - \theta_r) I_r^{dq0} \\ &\quad + (\omega - \omega_r) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda_r^{dq0} + p \lambda_r^{dq0} \end{aligned} \quad (5)$$

Donde, $k_{dq0}(\theta)$ es la matriz de transformación dada por la matriz:

$$k_{dq0}(\theta) = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\theta & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Considerando resistencias desiguales en los devanados de estator y rotor, con el fin de dejar explícitos los valores de éstas en el modelo del motor de inducción, resulta:

$$\begin{aligned} k_{dq0}(\theta) R_s^{abc} k_{dq0}^{-1}(\theta) &= k_{dq0}(\theta) \begin{bmatrix} R_{sa} & 0 & 0 \\ 0 & R_{sb} & 0 \\ 0 & 0 & R_{sc} \end{bmatrix} k_{dq0}^{-1}(\theta) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} R_{sa} + \frac{1}{6} R_{sb} + \frac{1}{6} R_{sc} & \frac{\sqrt{3}}{6} (R_{sb} - R_{sc}) & \frac{2}{3} R_{sa} - \frac{1}{3} R_{sb} - \frac{1}{3} R_{sc} \\ \frac{1}{6} (R_{sb} - R_{sc}) & \frac{1}{2} (R_{sb} + R_{sc}) & \frac{\sqrt{3}}{3} (R_{sb} - R_{sc}) \\ \frac{1}{3} R_{sa} - \frac{1}{6} R_{sb} - \frac{1}{6} R_{sc} & -\frac{\sqrt{3}}{6} (R_{sb} - R_{sc}) & \frac{1}{3} (R_{sa} + R_{sb} + R_{sc}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_{s11} & R_{s12} & R_{s13} \\ R_{s21} & R_{s22} & R_{s23} \\ R_{s31} & R_{s32} & R_{s33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

La matriz de resistencias para el rotor es similar. En notación matricial se tiene:

$$V = (W \cdot L + R) \cdot I + L \cdot pI \quad (8)$$

La expresión para encontrar las corrientes del motor de inducción está dada por:

$$pI = -L^{-1}[L \cdot W + R] \cdot I + L^{-1}V \quad (9)$$

Los estados del sistema y salidas son las corrientes del estator, del rotor y la velocidad del rotor.

La suposición de que los circuitos están balanceados permite descartar la secuencia cero. Así, el modelo del motor de inducción en función de las corrientes en el marco de referencia fijo al estator ($\omega_c = 0$) y considerando resistencias desiguales en los devanados del motor se presenta a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{i}_{qs} &= -\xi(L_r R_{s11}) I_{qs} + (-\xi L_r R_{s12} - \xi M^2 n_p \omega_m) I_{ds} + \xi M R_{r11} I_{qr} \\ &\quad + \xi (R_{s12} - n_p \omega_m L_r) M I_{dr} + \xi L_r v_{qs} \\ \dot{i}_{ds} &= \xi (-L_r R_{s21} + M^2 n_p \omega_m) I_{qs} - \xi L_r R_{s22} I_{ds} \\ &\quad + \xi M (n_p \omega_m L_r + R_{r21}) I_{qr} + \xi M R_{r22} I_{dr} \\ &\quad + \xi L_r v_{ds} \\ \dot{i}_{qr} &= \xi M R_{s11} I_{qs} + \xi (R_{s12} + L_s n_p \omega_m) M I_{ds} - \xi L_s R_{r11} I_{qr} \\ &\quad + \xi L_s (n_p \omega_m L_r - R_{r12}) I_{dr} - \xi M v_{qs} \\ \dot{i}_{dr} &= \xi (R_{s21} - L_s n_p \omega_m) M I_{qs} + \xi M R_{s22} I_{ds} \\ &\quad + \xi L_s (-n_p \omega_m L_r - R_{r21}) I_{qr} - \xi L_s R_{r22} I_{dr} \\ &\quad - \xi M v_{ds} \\ \dot{\omega}_m &= \frac{3}{2} n_p \frac{M}{J} (I_{qs} I_{dr} - I_{qr} I_{ds}) - \frac{B \omega_m}{J} - \frac{T_L}{J} \end{aligned} \quad (10)$$

Donde R_{sij}, R_{rij} son las resistencias de estator y rotor respectivamente para $i, j = 1, \dots, 3$ de acuerdo con la matriz (7); $\xi = 1/(L_s L_r - M^2)$; n_p es el número de pares de polos del motor; T_L es el par de carga; B es el coeficiente de fricción viscosa; J es la inercia total; ω_m es la velocidad mecánica del rotor; $I_{qs}, I_{ds}, I_{qr}, I_{dr}$ son las corrientes de estator y rotor en el marco de referencia; v_{qs}, v_{ds} son los voltajes de alimentación en el marco de referencia.

VI. CONDICIÓN DE OBSERVABILIDAD ALGEBRAICA PARA EL MOTOR DE INDUCCIÓN

Ya se mencionó que un sistema observable algebraicamente se considera como un sistema cuyas variables de estado pueden expresarse en términos de las variables de entrada y de salida y de sus derivadas de orden finito con respecto al tiempo [Anguelova, 2004].

Para el caso del modelo del motor de inducción descrito por el sistema (10), se tiene un sistema observable algebraicamente, ya que los estados $I_{qs}, I_{ds}, I_{qr}, I_{dr}, \omega_m$ satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} P_1(I_{qs}) &= I_{qs} - y_1 = 0 \\ P_2(I_{ds}) &= I_{ds} - y_2 = 0 \\ P_3(I_{qr}) &= I_{qr} - y_3 = 0 \\ P_4(I_{dr}) &= I_{dr} - y_4 = 0 \\ P_5(\omega_m) &= \omega_m - y_5 = 0, y \neq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Por lo tanto, los estados $I_{qs}, I_{ds}, I_{qr}, I_{dr}, \omega_m$ son observables algebraicamente sobre $R\langle u, y \rangle$, y de acuerdo con la Definición 6 el modelo del motor de inducción (10) es observable algebraicamente.

VII. ESTIMACIÓN ALGEBRAICA DE DERIVADAS

En esta sección se presenta la derivación general de la ecuación del filtro lineal, variante en el tiempo que se basa en el trabajo de [Reger et. al., 2005], junto con una ecuación de salida, que permiten la estimación de derivadas con respecto al tiempo de una señal analógica.

Una señal temporal, analítica $y(t)$, se puede aproximar después de algunos instantes de tiempo t_i mediante una expansión en una serie de Taylor truncada como sigue

$$\tilde{y}(t) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{(j-1)!} y^{(j-1)}(t_i) (t - t_i)^{j-1} 1(t - t_i) \quad (12)$$

Esta serie de potencias se interpreta como k veces la integración del sistema sin entradas y condiciones iniciales $y^{(j-1)}(t_i)$, con $j = 1, 2, \dots, k$, donde k es el orden de aproximación. Aplicando cálculo operacional y la fórmula de Leibniz es posible obtener un sistema lineal triangular de ecuaciones para calcular los estimados de las derivadas de la señal $y(t)$. (El desarrollo completo se presenta en [Reger et. al., 2005], sección II).

Es posible obtener la siguiente fórmula recursiva para determinar las derivadas $y^{(\delta)}(t)$ de la señal $y(t)$, donde $1 \leq \delta \leq k - 1$ y $m := k - \delta - i$,

$$y^{(\delta)}(t) = \sum_{l=0}^{\delta-1} \underbrace{\binom{k}{\delta-l} \frac{(k-l-1)!}{(k-\delta-1)!} (-1)^{l-\delta+1}}_{:=a(k,\delta,l)} \frac{1}{t^{\delta-l}} \tilde{y}^{(l)}(t) + \sum_{m=1}^{k-\delta} \underbrace{\binom{k}{m+\delta}^2 (-1)^{1-m-\delta} (m+\delta)!}_{:=b(k,\delta,m)} \frac{1}{t^k} \int t^{k-m-\delta} \tilde{y}(t) \quad (13)$$

Este sistema lineal de ecuaciones se interpreta como un filtro lineal variante en el tiempo con entradas variantes en el tiempo, que se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(k, t) &= b(k, i, 1) t^{k-i-1} y(t) + z_{i+1}(k, t), \quad i = 1, \dots, k-2 \\ \dot{z}_{k-1}(k, t) &= b(k, k-1, 1) y(t) \end{aligned} \quad (14)$$

Al introducir los estados del filtro $z_i = (k, t)$ a partir de la ecuación (14) se puede formular una ecuación para calcular las estimaciones de las derivadas

$$\tilde{y}^{(i)}(t) = \frac{(k+i-1)!}{i!(k-i-1)!} \frac{1}{t^i} y(t) + \sum_{j=1}^i \binom{k+i-j-1}{i-j} \frac{(k-j-1)!}{(k-i-1)!} \frac{1}{t^{k+i-j}} z_j(k, t) \quad (15)$$

Donde $i = 1, \dots, d$. Esta última ecuación no está definida sobre el intervalo de tiempo $[0, \varepsilon)$ con ε suficientemente pequeño, así que esta ecuación es válida sólo para $t \geq \varepsilon$.

VIII. DISEÑO DE LOS OBSERVADORES ALGEBRAICOS

En esta sección se presenta el diseño de los observadores algebraicos para la estimación de las

corrientes del motor. El análisis consiste en encontrar una estimación para las corrientes: a) del estator, b) del rotor, y c) de la velocidad dejando a éstas en función de las salidas medibles (corrientes de rotor I_{qr} e I_{dr} , corrientes de estator I_{qs} e I_{ds} , y de la velocidad del rotor ω_m), de las entradas (V_{qs}, V_{ds} , voltajes del estator), y de un número finito de sus derivadas con respecto al tiempo, esto se expresa como:

$$\begin{aligned} I_{qs} &= f(I^{(i)}_{dqr}, V_{dqs}, \omega_m) \\ I_{ds} &= f(I^{(i)}_{dqr}, V_{dqs}, \omega_m) \\ I_{qr} &= f(I^{(i)}_{dqs}, V_{dqs}, \omega_m) \\ I_{dr} &= f(I^{(i)}_{dqs}, V_{dqs}, \omega_m) \\ \omega_m &= f(I^{(i)}_{dqs}, I^{(i)}_{dqr}, V_{dqs}), \quad i = 0, \dots, n \end{aligned}$$

A continuación se presenta el desarrollo de los cálculos para determinar las expresiones para la estimación de cada una de las corrientes de rotor. Se consideran los siguientes coeficientes para simplificar la manipulación de la ecuaciones de acuerdo a (10)

$$\begin{aligned} A_1 &= \xi L_r R_{s11}; A_2 = \xi L_r R_{s12}; A_3 = \xi n_p M^2; A_4 = \xi M R_{r11}; \\ A_5 &= \xi M R_{r12}; A_6 = \xi n_p L_r M; A_7 = \xi L_r; \\ B_1 &= \xi L_r R_{s21}; B_2 = \xi n_p M^2; B_3 = \xi L_r R_{s22}; B_4 = \xi R_{r21} M; \\ B_5 &= \xi n_p L_r M; B_6 = \xi M R_{r22}; B_7 = \xi L_r; \\ C_1 &= \xi M R_{s11}; C_2 = \xi M R_{s12}; C_3 = \xi n_p L_s M; C_4 = \xi L_s R_{r11}; \\ C_5 &= \xi n_p L_r L_s; C_6 = \xi R_{r12} L_s; C_7 = \xi M; \\ D_1 &= \xi M R_{s21}; D_2 = \xi n_p L_s M; D_3 = \xi M R_{s22}; D_4 = \xi n_p L_r L_s; \\ D_5 &= \xi R_{r21} L_s; D_6 = \xi L_s R_{r22}; D_7 = \xi M; \end{aligned}$$

Para la estimación de la corriente del rotor de la fase del eje q se tiene

$$I_{qr} = \frac{\left[\frac{I_{qs}^j}{A_4} + \frac{A_1 I_{qs}}{A_4} + \frac{(A_2 + A_3 \omega_m) I_{ds}}{A_4} - \frac{A_5 I_{ds}}{A_4 B_6} - \frac{A_5 (B_1 - B_2 \omega_m) I_{qs}}{A_4 B_6} - \frac{A_5 B_3 I_{ds}}{A_4 B_6} + \frac{A_5 B_7 V_{ds}}{A_4 B_6} + \frac{A_6 \omega_m I_{ds}}{A_4 B_6} + A_6 \omega_m (B_1 - B_2 \omega_m) I_{qs} + \frac{A_6 B_3 \omega_m I_{ds}}{A_4 B_6} - \frac{A_6 \omega_m B_7 V_{ds}}{A_4 B_6} - \frac{A_7 V_{qs}}{A_4} \right]}{\left(1 - \frac{A_5 B_4}{A_4 B_6} - \frac{A_5 B_2 \omega_m}{A_4 B_6} + \frac{A_6 \omega_m B_4}{A_4 B_6} + \frac{A_6 B_5 \omega_m^2}{A_4 B_6} \right)} \quad (16)$$

Para la estimación de la corriente del rotor de la fase del eje d se tiene

$$I_{dr} = \frac{\left[\frac{I_{ds}^j}{B_6} + \frac{(B_1 - B_2 \omega_m) I_{qs}}{B_6} + \frac{B_3 I_{ds}}{B_6} - \frac{B_4 I_{qs}}{A_4 B_6} - \frac{B_4 A_1 I_{qs}}{A_4 B_6} - \frac{B_4 A_2 I_{ds}}{A_4 B_6} - \frac{B_4 A_3 \omega_m I_{ds}}{A_4 B_6} + \frac{A_7 B_4 V_{qs}}{A_4 B_6} - \frac{B_5 \omega_m I_{qs}}{A_4 B_6} - \frac{B_5 \omega_m A_1 I_{qs}}{A_4 B_6} - \frac{B_5 \omega_m A_2 I_{ds}}{A_4 B_6} - \frac{B_5 A_3 \omega_m^2 I_{ds}}{A_4 B_6} + \frac{B_5 A_7 \omega_m V_{qs}}{A_4 B_6} - \frac{B_7 V_{ds}}{B_6} \right]}{\left(1 - \frac{A_5 B_4}{A_4 B_6} - \frac{A_6 B_4 \omega_m}{A_4 B_6} - \frac{B_5 A_5 \omega_m}{A_4 B_6} + \frac{A_6 B_5 \omega_m^2}{A_4 B_6} \right)} \quad (17)$$

Para la estimación de la corriente del estator de la fase del eje q se tiene

$$I_{qs} = \frac{\left[\frac{I_{qr}}{C_1} - \left(\frac{C_2}{C_1 D_3} + \frac{C_3 \omega_m}{C_1 D_3} \right) I_{dr} - \left(\frac{C_2 D_1 \omega_m}{C_1 D_3} + \frac{C_2 D_5}{C_1 D_3} + \frac{C_3 D_4 \omega_m^2}{C_1 D_3} + \frac{C_3 \omega_m D_5}{C_1 D_3} + \frac{C_4}{C_1} \right) I_{qr} - \left(\frac{C_3 D_6}{C_1 D_3} + \frac{C_3 \omega_m D_6}{C_1 D_3} + \frac{C_5 \omega_m}{C_1} - \frac{C_6}{C_1} \right) I_{dr} - \left(\frac{C_3 D_7}{C_1 D_3} + \frac{C_3 \omega_m D_7}{C_1 D_3} \right) V_{ds} + \frac{C_7 V_{qs}}{C_1} \right]}{\left(1 - \frac{C_2 D_1}{C_1 D_3} + \frac{C_2 D_5 \omega_m}{C_1 D_3} - \frac{C_3 \omega_m D_1}{C_1 D_3} + \frac{C_3 D_4 \omega_m^2}{C_1 D_3} \right)} \quad (18)$$

Para la estimación de la corriente del estator de la fase del eje d se tiene

$$I_{ds} = \frac{\left[\begin{aligned} & \frac{I_{dr}}{D_3} - \left(\frac{D_1}{C_1 D_3} - \frac{D_2 \omega_m}{C_1 D_3} \right) i_{qr} - \left(\frac{D_1 C_4}{C_1 D_3} - \frac{D_2 \omega_m C_4}{C_1 D_3} - \frac{D_3 \omega_m}{C_1 D_3} - \frac{D_3}{D_3} \right) I_{qr} + \\ & + \left(\frac{D_1 C_5 \omega_m}{C_1 D_3} - \frac{D_1 C_6}{C_1 D_3} - \frac{D_2 C_6 \omega_m^2}{C_1 D_3} + \frac{D_2 \omega_m C_6}{C_1 D_3} + \frac{D_6}{D_3} \right) I_{dr} - \left(\frac{D_1 C_7}{C_1 D_3} - \frac{D_2 \omega_m C_7}{C_1 D_3} \right) V_{qs} + \frac{D_2 V_{ds}}{D_3} \end{aligned} \right]}{\left(1 - \frac{C_2 D_1}{C_1 D_3} - \frac{D_1 C_3 \omega_m}{C_1 D_3} + \frac{D_2 \omega_m C_2}{C_1 D_3} + \frac{C_2 D_2 \omega_m^2}{C_1 D_3} \right)} \quad (19)$$

Para la estimación de la velocidad se tiene:

$$\omega_m = \frac{(-\dot{I}_{qs} - A_1 I_{qs} - A_2 I_{ds} + A_4 I_{qr} + A_5 I_{dr} + A_7 V_{qs})}{A_3 I_{ds} + A_6 I_{dr}} \quad (20)$$

En las siguientes figuras se muestra el desempeño de los observadores algebraicos al estimar las corrientes del motor.

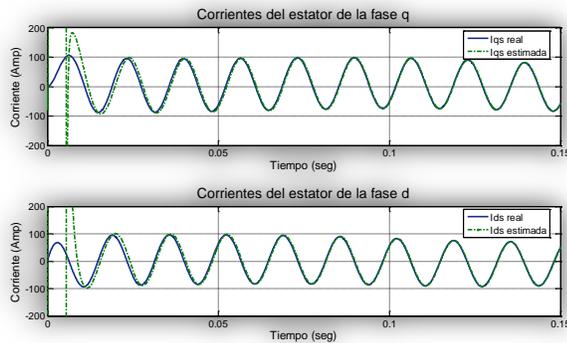


Figura 1. Corrientes del estator fase q y d

IX. ETAPA DE GENERACIÓN DE RESIDUOS

La etapa de generación de residuos para el sistema de diagnóstico de fallas en el motor de inducción se realiza por medio de los observadores algebraicos no lineales cuyo desarrollo se mostró en la sección anterior. La estrategia de diagnóstico de fallas consiste en diseñar un banco de observadores que se basan principalmente en los observadores algebraicos no lineales representados por las expresiones (16), (17), (18), (19) y (20).

Las señales que se obtienen de los observadores se comparan con las salidas reales de la planta a fin de obtener residuos. A partir de un análisis de los residuos se detectan y localizan (por grupos) a las fallas.

El primer escenario que se considera es fallas en parámetros. Se consideran como fallas a las variaciones de los valores nominales de las resistencias de los devanados del estator y rotor, así como, a las variaciones en la inductancia mutua ($\Delta R_{sij}, \Delta R_{rij}$ y ΔM). También se incluyen los efectos de las perturbaciones que se interpretan como variaciones en el par de carga, el coeficiente de fricción viscosa y la inercia total ($\Delta \tau_L, \Delta B$ y ΔJ). La Figura 2 muestra los residuos obtenidos con una falla de corto circuito en R_{s11} al -90% en un tiempo $t = 1$ segundo. La falla se modela mediante una aproximación suave de polinomios de Bézier.

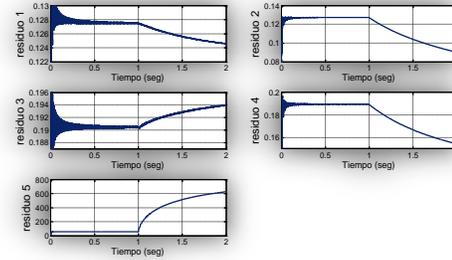


Figura 2. Residuos obtenidos para fallas en parámetros, falla de circuito abierto en la Resistencia del estator R_s .

El segundo escenario considera fallas en los sensores de salida. En este caso se consideran fallas en los sensores de corriente y velocidad, específicamente, los que corresponden al cambio de valor de la señal de salida real debido a la multiplicación por un escalar. La Figura 3 muestra los residuos obtenidos con una falla de $+20\%$ en el sensor I_{qs} en un tiempo $t = 1$ segundo. La falla se modela mediante una aproximación suave de polinomios de Bézier.

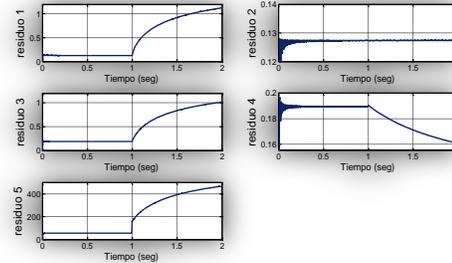


Figura 3. Residuos obtenidos para fallas en sensores, falla en el sensor de salida de la corriente I_{qs} .

La tabla de firmas de fallas se muestra en la Tabla 2. En la Tabla 3 se resumen los resultados que se obtienen de la FDI aplicado al motor de inducción.

Tabla 2. Tabla de Firmas de Fallas.

Obs	R_{s11}	R_{s22}	R_{r11}	R_{r22}	M	TL	B	sensor i_{qs}	sensor i_{ds}	sensor i_{qr}	sensor i_{dr}	sensor ω_r	
1	+8%	-8%	-8%	-8%	-8%	-8%	-8%	+20%	-20%	+20%	-20%	+20%	-20%
2	+1	-1	+1	-1	+1	-1	0	0	+1	+1	+1	+1	+1
3	+1	+1	-1	-1	+1	-1	0	+1	+1	-1	-1	0	0
4	+1	-1	+1	-1	+1	-1	0	-1	+1	+1	+1	0	0
5	+2	+1	+2	0	+1	+1	0	+1	+1	-1	+1	+1	+1

Tabla 3. Resumen de resultados obtenidos.

Resultados obtenidos:

Fallas detectadas:	21
Fallas localizadas:	12
Perturbaciones detectadas:	2
No. Firmas idénticas:	3
No detección:	-

X. CONDICIÓN DE DIAGNOSTICABILIDAD PARA EL MOTOR DE INDUCCIÓN

Con base en lo anterior, si el sistema es diagnosticable se pueden diseñar reconstructores de fallas a partir de los observadores algebraicos cuya variable a estimar será, en este caso, la *falla* del sistema, la que se considera como un *estado* más de éste. Si el sistema es *diagnosticable* de

acuerdo con la **Definición 7**, entonces para toda entrada de control u tal que la salida y sea continuamente diferenciable C^1 , el sistema dinámico:

$$\begin{cases} \dot{f} = \psi(y, \dot{y}, \dots, y^{(v)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(v)}) \\ \hat{y}^{(l)}(t) = \varphi(y, z_l), \end{cases} \quad 1 \leq l \leq v \quad (21)$$

es un reconstructor de falla para el modelo del motor de inducción descrito por el sistema (10), el cual, es *observable algebraicamente* a partir de sus estados.

XI. RECONSTRUCTOR DE FALLAS

La metodología que se propone consiste en definir una función $f(t)$ (la falla) como un estado extra del sistema. Esta función se escribe en términos de los estados, de las salidas y de las entradas conocidas $u(t)$ del sistema. El sistema original se convierte en un sistema extendido en donde la dinámica del estado extra se desconoce. El problema original es entonces un problema de observación, donde el objetivo es observar este estado extra del sistema. Para ilustrar el procedimiento de la reconstrucción de fallas, se considera falla en el parámetro R_{s11} .

Si se produce una falla en R_{s11} , ésta afecta a todo el coeficiente $A_1 = -\xi(L_r R_{s11})$, el cual se convierte en: $-\xi L_r (R_{s11} + f_1)$. Por lo tanto, también afecta al coeficiente $C_1 = -\xi(M R_{s11})$, el cual se transforma en $-\xi M (R_{s11} + f_1)$.

$$\begin{aligned} \dot{i}_{qs} &= -\xi L_r (R_{s11} + f_1) i_{qs} + (-\xi L_r R_{s12} - \xi M^2 n_p \omega_m) i_{ds} + \xi M R_{r11} i_{qr} \\ &\quad + \xi (R_{s12} - n_p \omega_m L_r) M i_{dr} + \xi L_r v_{qs} \\ \dot{i}_{ds} &= \xi (-L_r R_{s21} + M^2 n_p \omega_m) i_{qs} - \xi L_r R_{s22} i_{ds} + \xi M (n_p \omega_m L_r + R_{r21}) i_{qr} \\ &\quad + \xi M R_{r22} i_{dr} + \xi L_r v_{ds} \\ \dot{i}_{qr} &= \xi M (R_{s11} + f_1) i_{qs} + \xi (R_{s12} + L_s n_p \omega_m) M i_{ds} - \xi L_s R_{r11} i_{qr} \\ &\quad + \xi L_s (n_p \omega_m L_r - R_{r12}) i_{dr} - \xi M v_{qs} \\ \dot{i}_{dr} &= \xi (R_{s21} - L_s n_p \omega_m) M i_{qs} + \xi M R_{s22} i_{ds} + \xi L_s (-n_p \omega_m L_r - R_{r21}) i_{qr} \\ &\quad - \xi L_s R_{r22} i_{dr} - \xi M v_{ds} \\ \dot{\omega}_m &= \frac{3}{2} n_p \frac{M}{J} (i_{qs} i_{dr} - i_{qr} i_{ds}) - \frac{B \omega_m}{J} - \frac{T_L}{J} \end{aligned} \quad (22)$$

Ahora, es necesario buscar una expresión racional polinomial (ver **Definición 7**) que verifique la condición de diagnosticabilidad, la expresión racional polinomial correspondiente se muestra a continuación:

$$P(f_1) = f_1 - \left(\frac{\dot{y}_1 - (A_2 - A_3 \omega_m) y_2 + A_4 y_3 + (A_5 - A_6 \omega_m) y_4 + A_7 u_1 - R_{s11}}{\xi L_r i_{qs}} \right) = 0 \quad (23)$$

donde: $y_1 = i_{qs}$; $y_2 = i_{ds}$; $y_3 = i_{qr}$; $y_4 = i_{dr}$; $y_5 = \omega_m$. Por lo tanto, la falla f_1 puede reconstruirse.

Como se puede observar, el motor de inducción con rotor devanado es diagnosticable racionalmente, de acuerdo con la siguiente definición:

Definición 16. Se dice que un sistema observable, algebraicamente diferencialmente es **diagnosticable racionalmente** si, y sólo si es diagnosticable y su extensión de campo diferencial $k\langle u, f, x, y \rangle$ que es estable,

es igual a la extensión de campo diferencial $k\langle u, y \rangle$ de su comportamiento externo. Esto significa, que si el sistema es diagnosticable racionalmente, entonces para cada componente de falla f_1 la condición de diagnosticabilidad dada por la Definición 7, se reduce a expresar la falla como:

$$f_1 = \frac{h_i(u, y)}{q_i(u, y)} \quad (24)$$

donde h_i y q_i son polinomios diferenciales en $k\langle u, y \rangle$.

Las siguientes figuras muestran las gráficas de reconstrucción de fallas para fallas en parámetros y para fallas en sensores.

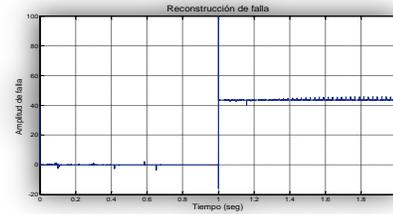


Figura 4. Reconstrucción de falla escalón en el parámetro Rs.

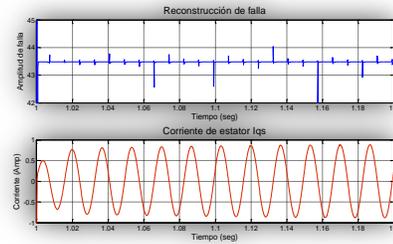


Figura 5. Singularidades para la diagnosticabilidad del sistema



Figura 6. Reconstrucción de falla abrupta presente en sensor de salida.

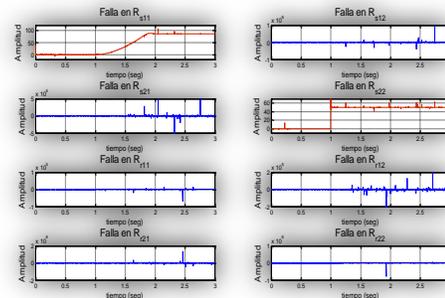
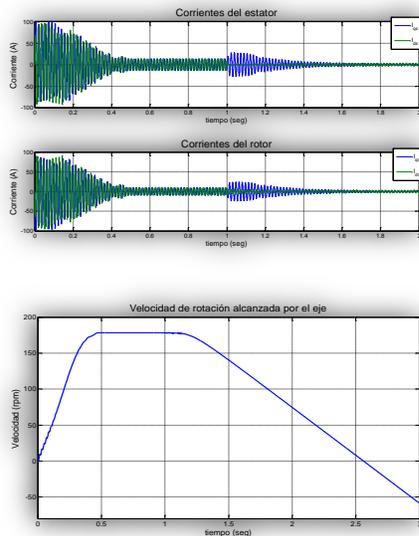


Figura 7. Sistema de reconstrucción presencia de fallas simultáneas.

En la Figura 8 se presenta el desempeño del motor de inducción cuando se presentan fallas múltiples. Se puede observar que el modelo (10) exhibe un comportamiento más cercano al de un motor de inducción real, debido a

que existe una correspondencia física entre las resistencias de los devanados del modelo matemático y las fases físicas del motor, lo que no obtiene con el modelo bifásico común.



(a)

(b)

Figura 8. a) Comportamiento de las Corrientes al momento de ocurrir las fallas, b) velocidad del motor cuando ocurren las fallas

Los valores de los parámetros del motor de inducción que se emplearon para la simulación se tomaron de [Krause, 2002]: potencia nominal de 3 hp, el voltaje de entrada rms línea a línea 220 V; el número de polos $n_p = 4$, la frecuencia nominal de alimentación del estator $f_s = 60 \text{ Hz}$, la velocidad nominal del rotor es de 1710 rpm; las resistencias de estator y rotor, $R_s = 0.435 \Omega$ y $R_r = 0.816 \Omega$; las impedancias de las inductancias de dispersión $X_{ls} = 0.754 \Omega$ y $X_{lr} = 0.754 \Omega$; la impedancia de la inductancia mutua $X_M = 26.13 \Omega$; el coeficiente de fricción viscosa $\beta = 0 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{seg}/\text{rad}$; par de carga $T_L = 11.9 \text{ N} \cdot \text{m}$; finalmente, el momento de inercia $J = 0.089 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$.

XII. CONCLUSIONES

Se verificó que es posible la detección de fallas a partir del enfoque algebraico diferencial utilizando observadores algebraicos, los cuales poseen una metodología de diseño más sencilla; de igual manera es posible la localización de fallas, sin embargo, esta etapa sólo se pudo realizar por grupos debido al diseño y limitaciones del enfoque (residuos no estructurados, ya que no existe como tal un desacoplamiento a perturbaciones,); específicamente en este sistema (MIRD). Una de las principales ventajas que posee esta metodología de diseño del sistema de diagnóstico, es que los observadores algebraicos son más sencillos de diseñar que los usuales observadores de perturbación desacoplada, sin embargo, debido a esto tiene como desventaja que la localización de las fallas es más difícil de cumplir para cada tipo de falla que se presente en el sistema.

XIII. REFERENCIAS

- [Anguelova, 2004] Anguelova, M. (2004). Nonlinear observability and identifiability: General Theory and a case study of a kinetic model. PhD Thesis. Department of Mathematics, School of Mathematical Sciences Chalmers, University of Technology and Göteborg University.
- [Fliess, 1987] Fliess, M. (1987). "Quelques definitions de la théorie des systèmes à la lumière de corps différentiels". C.R. Acad. Sc. Paris. Vol. 304, Serie I, No. 3, pp. 91-93.
- [Fliess, 1990] Fliess, M., (1990). "Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No. 9, pp. 994-1001.
- [Fliess et. al., 2004] Fliess, M., Join, C., Sira-Ramírez, H. (2004). "Robust residual generation for linear fault diagnosis: an algebraic setting with examples". *International Journal Control*, vol. 77, No. 14, pp. 1223-1242.
- [Fliess y Sira-Ramírez, 2004] Fliess, M., Sira-Ramírez, H. (2004). "Control via state estimations of some nonlinear systems". *IFAC Symposium on nonlinear control systems*, Stuttgart, Germany.
- [Krause, 2002] Krause, Paul C. (2002). Analysis of Electric Machinery and Drive Systems. Wiley-Interscience, 2da. Ed.
- [Luviano et. al., 2006] Luviano, A., Martínez-Guerra, R. (2006). "Reconstrucción de fallas empleando observadores algebraicos", *Congreso Nacional de Control Automático 2006*, UNAM, México, D.F. pp. 183-187.
- [Martínez-Guerra y Diop, 2004] Martínez-Guerra, R., Diop, S. (2004). "Diagnosis of nonlinear systems using an unknown-input observer: an algebraic and differential approach", *IEEE Proc.-Control Theory Appl.*, Vol. 151, No. 1, pp. 130 – 135.
- [Martínez-Guerra et. al., 2007] Martínez-Guerra, R., Luviano-Juárez, A., Rincón-Pasaye, J. (2007). "Fault estimation using algebraic observers", *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, New York, USA, pp. 438-442.
- [Patton et. al., 1989] Patton, R.J., Frank, P.M., and Clark, R.N., editors (1989). *Fault diagnosis in dynamic systems*, Theory and application, Control Engineering series. Prentice Hall, London.
- [Persis e Isidori, 2001] De Persis, C., Isidori, A. (2001). "A geometric approach to nonlinear a fault detection and isolation", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 46, No. 6, pp 853 - 865.
- [Reger et. al., 2005] Reger, J., Sira-Ramírez, H., Fliess, M. (2005). "On non-asymptotic observation of nonlinear systems", *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference 2005*, Seville, Spain, pp. 4219-4224.
- [Vidal et. al., 2005] Vidal Rosas E. E., Guerrero Ramírez V. G., Astorga Zaragoza C. M., (2005) "Diagnóstico de fallas en el motor de inducción utilizando observadores no lineales de entrada desconocida", *Congreso AMCA'05*, Cuernavaca, Morelos, México, Octubre 19-21.
- [Vidal, 2006] Vidal, E. (2006). Diagnóstico y reconfiguración de fallas en un motor de inducción utilizando observadores no lineales; Tesis de maestría, Cenidet.