Estabilización de redes complejas fraccionarias de sistemas de Lorenz modificados y sistemas de Chen.

Rafael Martínez-Martínez[a] — *rmartinez@ctrl.cinvestav.mx*
H. Jardón-Kojakhmetov[a] — *hjardon@ctrl.cinvestav.mx*
Jorge A. León[a] — *jleon@ctrl.cinvestav.mx*
G. Fernández-Anaya[b] — *guillermo.fernandez@uia.mx*
(a) CINVESTAV-DCA Av. Instituto Politécnico Nacional No. 2508,
Col San Pedro Zacatenco, C.P. 07360, México D. F. Tel (+5255) 5747 3795 ext. 4223
(b) Departamento de Fisica y Matemáticas. Universidad Iberoamericana,
Prol. Paseo de la Reforma 880, Lomas de Santa Fe, México D. F. 01219, México

***Resumen*— En este trabajo presentamos un criterio para la estabilización de redes complejas fraccionarias, es decir, sistemas dinámicos interconectados en donde el modelo de cada sistema es representado por un operador fraccionario, estos operadores fraccionarios son extenciones de los operadores derivada e integral, comunmente usados para modelar sistemas dinámicos.**

Palabras clave: Cálculo fraccionario, Estabilización, Redes complejas, Sistemas fraccionarios.

I. INTRODUCCIÓN

El cálculo fraccionario es tan antiguo como el cálculo convencional, pero no es tan popular en la ciencia y en la ingeniería como el cálculo convencional. En los últimos tres siglos este objeto fue tratado sólo matemáticamente pero en años recientes se ha utilizado en varios campos de la ingeniería y la ciencia (R. Hilfer, 2000). Quizás esta herramienta nos ayude a modelar de mejor manera la realidad y también quizás sea el cálculo del siglo XXI (Shantanu Das, 2008). El cálculo fraccionario no es el cálculo de fracciones, tampoco la fracción de cualquier cálculo de diferenciación o integración o el cálculo de variaciones. El cálculo fraccionario es el nombre de la *teoría de integración y derivadas de orden arbitrario*.

En 1695 L' Hospital le preguntó a Leibnitz en una carta con fecha 30 de septiembre: *¿Qué ocurre si* $n = 1/2$? en la expresión.

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

Leibnitz le contestó: *De esta paradoja se extraerán, algún día, consecuencias muy útiles*. Se ha desarrollado la teoría del cálculo fraccionario por mas de 300 años.

Las aplicaciones del cálculo fraccionario a la ingeniería son múltiples, ésta herramienta es un fuerte candidato para aplicarse a modelos en los cuales intervienen ecuaciones diferenciales de orden entero, siempre y cuando se dé una justificación lo suficientemente formal ya sea experimental o teórica, simplemente es una manera alternativa de modelar los sistemas.

En (Igor Podlubny, 1999) capítulo 10, (Shantanu Das, 2008) capítulo 9, se hace una recopilación de las aplicaciones del cálculo fraccionario, como lo son:

- **Teoría del Control.**
  - Observadores
  - Controladores Fraccionarios $PI^{\lambda}D^{\mu}$
- *Física de orden fraccionario*

Respecto a los trabajos realizados en redes complejas fraccionarias (sistemas dinámicos interconectados en donde el modelo de cada sistema es representado por un operador fraccionario), en general la discusión se hace sobre interconexiones lineales entre los sistemas (Tianshou Zhou, Changpin Li, 2005; Yang Tang, Zidong Wang, Jian-An Fang, 2009; Yang Tang, Jian-An Fang, 2009), centrando el desarrollo en condiciones sobre la topología, es decir, los acoplamientos se proponen para garantizar condiciones de estabilidad tipo (Denis Matignon, 1996). En principio el esquema planteado en este trabajo se puede aplicar a una interconexión arbitraria, en el sentido que la estabilización recae sobre una acción de control, y de manera indirecta sobre las condiciones topológicas de la red, gracias a el enfoque de estabilidad de (Xiang-Jun Wen, Zheng-Mao Wu, Jun-Guo Lu, 2008), por lo que no es necesario eliminar las partes no lineales de la red, y mucho menos linealizar, pero se tiene la restricción que la estabilidad no es asintótica.

II. OPERADORES FRACCIONARIOS

Ahora definiremos lo que se entiende por integral fraccionaria y derivada fraccionaria.

Definición 1 (Integral fraccionaria de Riemann-Liouville): La integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ de una función f se define como: véase (Keith B. Oldham, Jerome Spanier, 1974; Igor Podlubny, 1999; Shantanu Das, 2008)

$$ {}_aI_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}\, d\tau \tag{1}$$

$\Gamma(\cdot)$ es la función Gama. □

Definición 2 (Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville): La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ de una función f se define como: véase (Keith B. Oldham, Jerome Spanier, 1974; Igor Podlubny, 1999; Shantanu Das, 2008)

$$ {}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{n-\alpha-1}\, d\tau \tag{2}$$

$n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(\cdot)$ es la función Gama. □

II-A. *Derivada fraccionaria de Caputo*

La definición de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville juega un papel importante en el desarrollo de la teoría de derivadas e integrales fraccionarias y para aplicaciones en matemáticas puras.

Desafortunadamente, la propuesta desarrollada por Riemann-Liouville conduce a que las condiciones iniciales, en problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales fraccionarias sean inservibles, en el sentido de que se quiere preservar el significado usual, es decir, en terminos de posición y velocidad, las cuales con la definición antes mencionada no son claras.

Una solución para este conflicto fue propuesta por M. Caputo, es decir, con su definición las condiciones iniciales toman el significado usual. La definición de Caputo puede escribirse como:

Definición 3 (Derivada fraccionaria de Caputo): La derivada fraccionaria de Caputo de orden α de la función f se define como véase (Igor Podlubny, 1999)

$$ {}_a^cD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t f^{(n)}(\tau)(t-\tau)^{n-\alpha-1}\, d\tau, \tag{3}$$

donde: $n-1 \leq \alpha < n$, $f^{(n)}(\tau)$ es la derivada n-ésima de $f(\tau)$ en el sentido usual, $n \in \mathbb{N}$. □

III. Red Compleja Fraccionaria

Una vez que hemos definido los preliminares matemáticos, nos centraremos en estudiar redes complejas fraccionarias, es decir, sistemas dinámicos interconectados mediante una función, en donde la dinámica se modela mediante un operador de orden fraccionario.

El operador fraccionario que se utilizará será el de Caputo, debido a la característica de las condiciones iniciales que se expusieron en el apartado anterior, consideraremos que $0 < \alpha < 1$, definimos

$$x^{(\alpha)}(t) = {}_0^cD_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t x'(\tau)(t-\tau)^{-\alpha}\, d\tau$$

donde $0 < \alpha < 1$.

Si $x(t) \in \mathbb{R}^n$, consideraremos que $x^{(\alpha)}(t)$ es el operador fraccionario de Caputo aplicado a cada entrada.

$$x^{(\alpha)}(t) = \begin{pmatrix} {}_0^cD_t^\alpha x_{i1}(t) \\ \vdots \\ {}_0^cD_t^\alpha x_{in}(t) \end{pmatrix}$$

Consideremos una red compleja genérica de N sistemas dinámicos acoplados de orden fraccionario α, $0 < \alpha < 1$.

$$x_i^{(\alpha)}(t) = f(x_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^{N} c_{ij} h(x_j(t)) \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{4}$$

Una representación gráfica del sistema se muestra en la Figura (1).

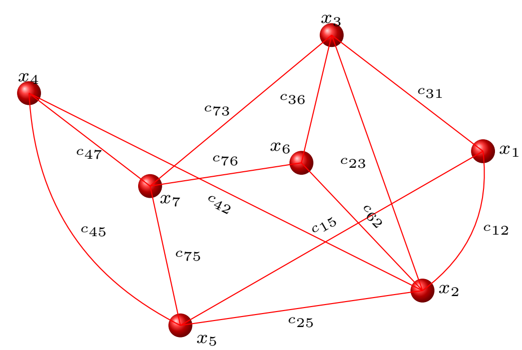

Figura 1. Ejemplo de una posible interconexión entre sistemas cuando $N = 7$

En la ecuación (4) $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ representan la dinámica del $i-esimo$ sistema, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ describe la manera en que están interconectados; todos los sistemas están interconectados de igual manera, σ es la fuerza de acoplamiento, $c_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal, son los elementos que especifican la fuerza y la topología de la interconexión de los sistemas.

Nótese que trataremos con redes que están compuestas por sistemas idénticos, esto es, f en la ecuación (4) es la misma para todos los nodos. Introducimos la siguiente notación:

$$x_i(t) = \begin{pmatrix} x_{i1}(t) \\ \vdots \\ x_{in}(t) \end{pmatrix} \quad f(x_i(t)) = \begin{pmatrix} f_1(x_i(t)) \\ \vdots \\ f_n(x_i(t)) \end{pmatrix}$$

$$h(x_j(t)) = \begin{pmatrix} h_{i1}(x_j(t)) \\ \vdots \\ h_{in}(x_j(t)) \end{pmatrix}$$

con $x_{ik} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h_{ik} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\forall\, k \in \{1, \ldots, n\}$ y $\forall\, i \in \{1, \ldots, N\}$ también definimos

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix} \quad F(X(t)) = \begin{pmatrix} f(x_1(t)) \\ \vdots \\ f(x_N(t)) \end{pmatrix}$$

$$H(X(t)) = \begin{pmatrix} h(x_1(t)) \\ \vdots \\ h(x_N(t)) \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{N1} & \ldots & c_{NN} \end{pmatrix}$$

Así nuestro sistema (4) lo podemos escribir como

$$X^{(\alpha)}(t) = F(X(t)) + \sigma C H(X(t)) \tag{5}$$

Es decir la red compleja (4) se puede reescribir como un sistema dinámico de orden fraccionario α con $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{Nn}$, $F : \mathbb{R}^{Nn} \to \mathbb{R}^{Nn}$, $C : \mathbb{R}^{Nn} \to \mathbb{R}^{Nn}$ lineal y $H : \mathbb{R}^{Nn} \to \mathbb{R}^{Nn}$.

IV. Estabilización de un sistema Fraccionario

En primer lugar estudiamos la establización de un sistema fraccionario de la forma:

$$x^{(\alpha)} = Ax + g(x) \tag{6}$$

Donde $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal, y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ no lineal, para esto nos auxiliamos de (Xiang-Jun Wen, Zheng-Mao Wu, Jun-Guo Lu, 2008) en el cual se presenta el siguiente resultado.

Teorema 1: Consideramos el siguiente sistema dinámico n-dimensional de orden fraccionario

$$x^{(\alpha)} = Ax + g(x) \tag{7}$$

Con una matriz lineal regular A y una función no lineal g de x y $0 < \alpha < 1$ si

1. La solución $x(t) = 0$ de $x^{(\alpha)} = Ax$ es asintóticamente estable[1] , y $\alpha\rho(A) > 1$[2]
2. $g(0) = 0$ y $\lim\limits_{\|x\| \to 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0$

Entonces $x(t) = 0$ para $0 \leq t_0 \leq t$, es una solución estable de (7) ■

[1]los valores propios de la matriz A deben de satisfacer que el valor absoluto de su argumento sea mayor que $0.5\pi\alpha$ (Denis Matignon, 1996)
[2]$\rho(A) \equiv$ radio espectral de la matriz A

V. Aplicación a redes complejas

Consideramos el sistema de Lorenz de orden fraccionario que podemos escribir como

$$x^{(\alpha)} = Ax + g(x) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ b & -c & 0 \\ 0 & 0 & -d \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

con $x = [x_1, x_2, x_3]^T$, $a = 10$, $b = 28$, $c = -8$, $d = 8/3$ y $\alpha = 0.8$

Supongamos que tenemos N sistemas de Lorenz acoplados, definimos

$$l = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ b & -c & 0 \\ 0 & 0 & -d \end{pmatrix} \quad g(x_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_{i1} x_{i3} \\ x_{i1} x_{i2} \end{pmatrix}$$

con lo cual $f(x_i)$ de la ecuación (4) se escribe como

$$f(x_i)^{3} = l x_i + g(x_i)$$

Para este caso analizamos la siguiente interconexión de los sistemas $h(x_i) = x_i \ \forall\ i$. Así la red compleja (5) se puede escribir como

$$X^{(\alpha)} = F(X) + \sigma C X$$

con

$$F(X) = LX + G(X)$$

$$L = \begin{pmatrix} l & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & l & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & l \end{pmatrix}; \quad G(X) = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix}$$

Obtenemos una condición para estabilizar una red compleja compuesta por sistemas de Lorenz, como una consecuencia de los resultados antes mencionados.

Proposición 1: Supongammos que tenemos una red compleja de la forma

$$X^{(\alpha)} = F(X) + \sigma C X \tag{8}$$

con sus elementos descritos anteriormente, si

1. La solución $X(t) = 0$ del sistema $X^{(\alpha)} = (L + \sigma C + BK)X$ es asintóticamente estable.
2. $\alpha\rho(L + \sigma C + BK) > 1$.

Entonces el control $U = BKX$ con $B \in \mathbb{R}^{nN \times p}$ y $K \in \mathbb{R}^{p \times nN}$, estabiliza al sistema (8), es decir, el sistema

$$X^{(\alpha)} = F(X) + \sigma C X + U \tag{9}$$

[3]En este caso no definimos las funciones por componentes.

es estable.

Prueba:

Tomamos el sistema (9) y sustituimos las funciones correspondientes

$$\begin{aligned} X^{(\alpha)} &= F(X) + \sigma CX + U \\ &= LX + G(X) + \sigma CX + BKX \\ &= (L + \sigma C + BK)X + G(X) \end{aligned} \tag{10}$$

Por hipótesis la solución $X(t) = 0$ del sistema $X^{(\alpha)} = (L + \sigma C + BK)X$ es asintóticamente estable y $\alpha\rho(L + \sigma C + BK) > 1$. Ahora

$$g(x_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_{i1}x_{i3} \\ x_{i1}x_{i2} \end{pmatrix}, \text{ asi } g(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall i$$

entonces $G(0) = 0$, además si $X \neq 0$

$$0 \leq \frac{\|G(X)\|}{\|X\|} \tag{11}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{\|G(X)\|}{\|X\|} &= \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{N}[(-x_{i1}x_{i3})^2+(x_{i1}x_{i2})^2]}{\sum_{j=0}^{N}(x_{j1}^2+x_{j2}^2+x_{j3}^2)}} \\ &\leq \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{N}(x_{i1}x_{i3})^2+\sum_{i=0}^{N}(x_{i1}x_{i2})^2}{\sum_{j=0}^{N}x_{j1}^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(x_{11}x_{13})^2}{\sum_{j=0}^{N}x_{j1}^2} + \ldots + \frac{(x_{N1}x_{N2})^2}{\sum_{j=0}^{N}x_{j1}^2}} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=0}^{N}(x_{i3}^2 + x_{i2}^2)} \end{aligned} \tag{12}$$

de (11) y (12) tenemos

$$\lim_{\|X\|\to 0} \frac{\|G(X)\|}{\|X\|} = 0$$

Aplicando el teorema (1), tenemos el resultado buscado.■

V-A. Red compleja de Lorenz con acoplamiento bidireccional

Tomamos una red compleja fraccionaria de Lorenz compuesta por tres sistemas, tomamos el acoplamiento bidireccional propuesto en (Yongguang Yu, Han-Xiong Li, Yan Su, 2007).

$$\begin{aligned} x_{11}^{(\alpha)} &= a(x_{12} - x_{11}) + d_{11}(x_{31} + x_{21} - 2x_{11}) \\ x_{12}^{(\alpha)} &= bx_{11} - cx_{11}x_{13} - cx_{12} + d_{12}(x_{32} + x_{22} - 2x_{12}) \\ x_{13}^{(\alpha)} &= x_{11}x_{12} - dx_{13} + d_{13}(x_{33} + x_{23} - 2x_{13}) \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} x_{21}^{(\alpha)} &= a(x_{22} - x_{21}) + d_{21}(x_{11} + x_{31} - 2x_{21}) \\ x_{22}^{(\alpha)} &= bx_{21} - cx_{21}x_{23} - cx_{22} + d_{22}(x_{12} + x_{32} - 2x_{22}) \\ x_{23}^{(\alpha)} &= x_{21}x_{22} - dx_{23} + d_{23}(x_{13} + x_{33} - 2x_{23}) \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} x_{31}^{(\alpha)} &= a(x_{32} - x_{31}) + d_{31}(x_{11} + x_{21} - 2x_{31}) \\ x_{32}^{(\alpha)} &= bx_{31} - cx_{31}x_{33} - cx_{32} + d_{32}(x_{12} + x_{22} - 2x_{32}) \\ x_{33}^{(\alpha)} &= x_{31}x_{32} - dx_{33} + d_{33}(x_{13} + x_{23} - 2x_{33}) \end{aligned} \tag{15}$$

Recordamos que $a = 10$, $b = 28$, $c = -8$, $d = 8/3$, $\alpha = 0.8$, con $\sigma = 1$ y $d_{11} = 1$, $d_{12} = 2$, $d_{13} = -3$, $d_{21} = 4$, $d_{22} = 2$, $d_{23} = -3$, $d_{31} = 100/29$, $d_{32} = -1$, $d_{33} = 17/48$.

Escribimos a este sistema como en la ecuación (8) con los siguientes parámetros

$$L = \begin{pmatrix} -a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d \end{pmatrix}$$

$$G(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_{11}x_{13} \\ x_{11}x_{12} \\ 0 \\ -x_{21}x_{23} \\ x_{21}x_{22} \\ 0 \\ -x_{31}x_{33} \\ x_{31}x_{32} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2d_{11} & 0 & 0 & d_{11} & 0 & 0 & d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -2d_{12} & 0 & 0 & d_{12} & 0 & 0 & d_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -2d_{12} & 0 & 0 & d_{13} & 0 & 0 & d_{13} \\ d_{21} & 0 & 0 & -2d_{21} & 0 & 0 & d_{21} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 & -2d_{22} & 0 & 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{23} & 0 & 0 & -2d_{23} & 0 & 0 & d_{23} \\ d_{31} & 0 & 0 & d_{31} & 0 & 0 & -2d_{31} & 0 & 0 \\ 0 & d_{32} & 0 & 0 & d_{32} & 0 & 0 & -2d_{32} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 & 0 & d_{33} & 0 & 0 & -2d_{33} \end{pmatrix}$$

Simulamos la ecuación (8), Figura (2) para estos parámetros, utilizando la aproximación de (Tom. T. Hartley, Carl F. Lorenzo, Helen Killory Qammer, 1995) para el operador fraccionario

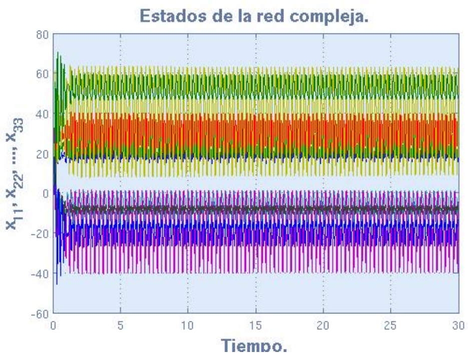

Figura 2. Estados de la red compleja (8).

Aplicamos la ley de control $u = BKX$ con

$$BK = -20 I_{9\times 9}{}^{4}$$

Entonces tenemos que la solución $X(t) = 0$ del sistema $X^{(\alpha)} = (L + \sigma C + BK)X$ es asintoticamente estable pues $|arg(L + C + BK)| > 0.5\pi\alpha$ (Denis Matignon, 1996) dado que $\lambda_1 = -47.5713$, $\lambda_2 = -40.0000$, $\lambda_3 = -38.5223$, $\lambda_4 = -1.4940$ $\lambda_5 = -2.0000$, $\lambda_6 = -8.4123$, $\lambda_7 = -16.2304$, $\lambda_2 = -29.8848 + 4.2207i$, $\lambda_9 = -29.8848 - 4.2207i$; por lo cual $\alpha\rho(L + \sigma C + BK) > 1$. entonces el sistema (9) para nuestro ejemplo es estable, ver Figura (3), .

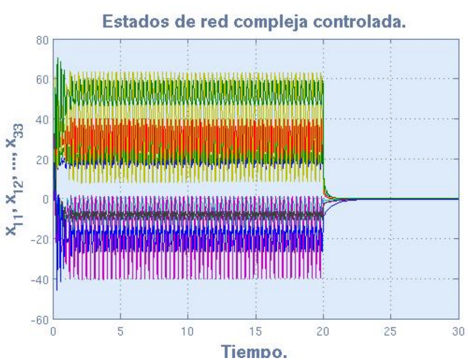

Figura 3. Estados del sistema (9), aplicamos el control en $t = 20s$

En el trabajo de (Yongguang Yu, Han-Xiong Li, Yan Su, 2007) dan condiciones suficientes para la estabilidad asintotica de $E_1 = x_1 - x_2$ y $E_2 = x_2 - x_3$ de los tres sistemas de Lorenz, bajo una interconexión muy especifica y condiciones aritmeticas sobre las d_{ij}, en su trabajo establecen que si se cumplen estas condiciones se alcanza la estabilidad, por medio de la interconexión; nuestro resultado nos dice que en principio la interconexión no necesita ser especifica, basta con que $(L + \sigma C, B)$ sea estabilizable en el sentido de que la parte no controlable de $(L + \sigma C, B)$ sea asintoticamente estable en el sentido de (Denis Matignon, 1996).

[4] con $I_{9\times 9}$ la matriz identidad de 9×9.

V-B. *Red compleja de Chen con acoplamiento bidireccional*

Consideramos el sistema de Chen de orden fraccionario que podemos escribir como

$$x^{(\alpha)} = Ax + g(x) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c-a & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}$$

con $x = [x_1, x_2, x_3]^T$, $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$, y $\alpha = 0.8$

Supongamos que tenemos N sistemas de Chen acoplados, definimos

$$l = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c-a & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad g(x_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}$$

con lo cual $f(x_i)$ de la ecuación (4) se escribe como

$$f(x_i)^{5} = lx_i + g(x_i)$$

Para este caso analizamos la siguiente interconexión de los sistemas $h(x_i) = x_i \ \forall \ i$. Así la red compleja (5) se puede escribir como

$$X^{(\alpha)} = F(X) + \sigma CX$$

con

$$F(X) = LX + G(X)$$

$$L = \begin{pmatrix} l & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & l \end{pmatrix}; \quad G(X) = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix}$$

Obtenemos una condición para estabilizar una red compleja compuesta por sistemas de Chen, como una consecuencia de los resultados antes mencionados.

Proposición 2: Supongammos que tenemos una red compleja de la forma

$$X^{(\alpha)} = F(X) + \sigma CX \qquad (16)$$

con sus elementos descritos anteriormente, si

1. La solución $X(t) = 0$ del sistema $X^{(\alpha)} = (L + \sigma C + BK)X$ es asintóticamente estable.
2. $\alpha\rho(L + \sigma C + BK) > 1$[6]

Entonces el control $U = BKX$ con $B \in \mathbb{R}^{nN\times p}$ y $K \in \mathbb{R}^{p\times nN}$, estabiliza al sistema (16), es decir, el sistema

$$X^{(\alpha)} = F(X) + \sigma CX + U \qquad (17)$$

[5] En este caso no definimos las funciones por componentes.
[6] ρ es el radio espectral.

es estable.

Prueba: Análoga a la proposición anterior. ■.

Tomamos una red compleja fraccionaria de Chen compuesta por tres sistemas, tomamos el acoplamiento bidireccional propuesto en (Yongguang Yu, Han-Xiong Li, Yan Su, 2007) pero en este caso aplicado a sistemas de Chen.

Procedemos como en los sistemas acoplados de Lorenz. Simulamos la red compleja de sistemas de Chen, Figura (4), utilizando la aproximación de (Tom. T. Hartley, Carl F. Lorenzo, Helen Killory Qammer, 1995) para el operador fraccionario.

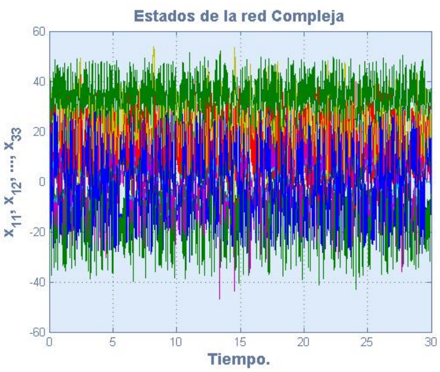

Figura 4. Estados de la red compleja (16).

Aplicamos la ley de control $u = BKX$ con

$$BK = -30I_{9\times 9}$$ [7]

Entonces tenemos que la solución $X(t) = 0$ del sistema $X^{(\alpha)} = (L + \sigma C + BK)X$ es asintoticamente estable ver Figura (5), .

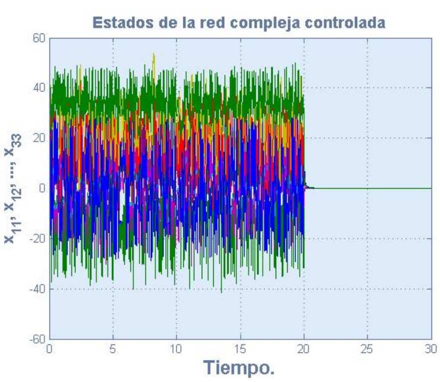

Figura 5. Estados del sistema (17), aplicamos el control en $t = 20s$

VI. Conclusiones

Presentamos la estabilización de redes complejas fraccionarias de sistemas de Lorenz modificados y sistemas de Chen, basados en el resultado del trabajo desarrollado por (Xiang-Jun Wen, Zheng-Mao Wu, Jun-Guo Lu, 2008), la estabilización se lleva a cabo mediante una retroalimentación de estados, así podemos utilizar teoría conocida de estabilización para los sistemas de orden entero, en nuestra simulación no cumplimos las hipótesis aritméticas sobre d_{ij} que establecen (Yongguang Yu, Han-Xiong Li, Yan Su, 2007), lo cual implica que la interconexión no hace que se alcance la estabilidad, pero con una retroalimentación de estado esta puede realizarse.

Con este enfoque, se ataca el problema de estabilización de redes complejas desde un punto de vista del control automático, pues en este caso el problema de buscar condiciones sobre la topología de las iterconexiones, es sustituido por la elección de un control proporcional, que desde luego afecta de una manera indirecta a la topología de interconexión, pero no es necesario conocer a priori una topología especifica de estabilización.

[7] con $I_{9\times 9}$ la matriz identidad de 9×9.

Referencias

R. Hilfer (2000), Aplications of fractional Calculus in Physics, *World Scientific, River Edge, New Jersey*

Shantanu Das (2008),Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls, *Springer Berlin Heidelberg New York*

Igor Podlubny (1999), Fractional Differential Equations, *Academic Press*

R. L. Bagley, R. A. Calico (1999), Fractional order state equations for the control of viscoelasticaly damped structures,*J. Guid. Control Dyn.*,**14**, 304–311.

M. Ichise, Y. Nagayanagi, T. Kojima (1971), An analog simulation of noninteger order transfer functions for analysis of electrode process, *J. Electroanal. Chem.*, **33**, 253–265.

Ilia Grigorenko, Elena Grigorenko (2003), Chaotic Dynamics of the Fractional Lorenz System, *Physical Review Letters*, **91** faltan paginas

Tom. T. Hartley, Carl F. Lorenzo, Helen Killory Qammer (1995), Chaos in a fractional Order Chua's System, *IEEE Transactions on circuits and systems-I: Fundamental theory and applications*,**42**, 485–490.

Jianping Yan, Changpin Li (2005), On chaos synchronization of fractional differential equations, *Chaos Solutions & Fractals* falt volúmen y páginas.

Denis Matignon (1996), Stability results for fractional differential equations with applications to control processing, *in Proc. IMACS, IEEE-SMC*, 963–968.

Yongguang Yu, Han-Xiong Li, Yan Su (2007), The Synchronization of Three Chaotic Fractional-order Lorenz Systems with Bidirectional Coupling, *Journal of Physics: Conference Series*

Shaher Momani, Samir Hadid (2003), Lyapunov stability solutions of fractional integrodifferential equations, *IJMMS*, 2503–2507.

Xiang-Jun Wen, Zheng-Mao Wu, Jun-Guo Lu (2008), Stability Analysis of a Class of Nonlinear Fractional-Order Systems, *IEEE Transsactions on circuits ans systems-II: Express briefs.*, **55**, 1178–1182.

IFAC (2008). *http://fda08.cankaya.edu.tr/tentative_program.php*.

N. Laskin (2000), Fractional market dynamics, *Phys. A*, **287**, 482–492.

Keith B. Oldham, Jerome Spanier (1974), The fractional Calculus theory and applications of Differentation and integration to arbitrary order, *Academic Press, Inc.*.

Tianshou Zhou, Changpin Li (2005), Synchronization in fractional-order differential systems, *Physica D.*, **212**, 111–125.

Yang Tang, Zidong Wang, Jian-An Fang (2009), Pinning control of fractional-order weighted complex networks, *Chaos.*, **19**.

Yang Tang, Jian-An Fang (2009), Synchronization of N-coupled fractional-order chaotic systems with ring connection, *Commun Nolinear Sci Numer Simulat.*.