

# Modelo dinámico de un robot bípedo planar de 9 grados de libertad en fase de vuelo y fases de contacto

José G. Romero Velázquez, Ernesto Olgún Díaz, América Morales Díaz  
Robótica y Manufactura Avanzada, CINVESTAV-Saltillo México.

**Resumen**—En este artículo se presenta una forma novedosa de obtener el modelo dinámico para un robot bípedo planar de 9 grados de libertad en su fase de vuelo. Este acercamiento permite representar la fase de soporte simple o doble con fuerzas de contacto en el/los pie(s) de soporte y permite representar los cambios de una fase a otra. El modelo dinámico está basado en las formulaciones de Kirchhoff y Euler-Lagrange, el primero para el modelo del torso como un cuerpo en movimiento libre y el segundo para las piernas considerando que son manipuladores adheridos al cuerpo móvil. Finalmente se presentan simulaciones realizadas al torso como cuerpo libre y en las piernas cuando hay soporte simple para una longitud de paso dada.

## I. INTRODUCCION

Los robots bípedos tienen la capacidad de moverse en terrenos abruptos e inaccesibles a los robots movidos por ruedas, por ejemplo para subir escaleras y en ambientes con obstáculos. El estudio de los robots bípedos no es un tema simple, de hecho presenta diferentes complicaciones tanto en el modelado y diseño, así como en el control de las juntas actuadas para el establecimiento de patrones de caminata estable. Construir un mecanismo bípedo resulta más barato que un complejo robot humanoide y permite ganar conocimiento de la locomoción humana y a su vez establecer bases de diseño para el desarrollo de prótesis y equipo de rehabilitación en general.

Uno de los enfoques más estudiados ha sido el caminado de robots bípedos en el plano sagital [1], [2], [10] debido a que el análisis resulta ser sencillo comparado con un modelo en tres dimensiones. En lo que se refiere a la marcha algunas técnicas para lograr estabilidad se han basado en el modelo del péndulo invertido [3], así como también en el desarrollo de técnicas de control [12] y en la aplicación del criterio del punto de momento zero [11] ó ZMP por sus siglas en inglés.

Al realizar el modelado de bípedos se considera que el pie en su fase de soporte se encuentra fijo a la superficie [6], [7] y por lo tanto el modelado puede realizarse asemejando un robot manipulador en cadena abierta, donde el sistema inercial se encuentra en el pie fijo, por lo que el modelado cinemático y dinámico resulta sencillo utilizando el formalismo de Lagrange.

### I-A. Contribución

Los robots bípedos que se encuentran en la literatura y que están restringidos al plano sagital están compuestos de torso, fémur, tibia y pie. El número de grados de libertad (GDL)

Este trabajo fue realizado gracias al apoyo del proyecto CONACYT de Ciencia Básica N. 084067.

son 7 en la fase de soporte simple, es decir considerando que se encuentra anclado al piso; sin embargo para asegurar que el pie en contacto cumpla esta consideración y no exista deslizamiento es necesario partir de la fase de vuelo [8] y debido a la poca información reportada en literatura, en este documento se muestra el modelo dinámico con raíz no inercial, de un robot bípedo planar subaccionado, para la fase de vuelo o fases de soporte simple o doble.

### I-B. Organización

Este documento está organizado en cinco partes; en la sección II se presenta el modelado del torso como un cuerpo libre. En la sección III se presenta el modelado de las piernas como manipuladores adheridos al cuerpo en movimiento libre y cómo se acoplan ellos con el torso para generar el modelo en vuelo libre. Las fuerzas de contacto en los pies se muestran al final de esta sección y permiten representar el modelo en las fases de soporte. En la sección IV se presentan simulaciones del cuerpo en movimiento libre y del modelo completo en contacto durante la fase de soporte simple. Finalmente en la sección V se presentan algunas conclusiones y las perspectivas del trabajo.

## II. MODELADO CINEMÁTICO Y DINÁMICO DEL TORSO COMO UN CUERPO LIBRE

El modelado se inicia con el torso, el cual se considera como un cuerpo en movimiento libre sobre el cual no se tiene control. Para realizar el modelado de este cuerpo se definen un referencial inercial  $\Sigma_0$  y un referencial no inercial  $\Sigma_v$  sujeto al torso (cuerpo móvil). Los grados de libertad necesarios para el torso en el plano son tres, dos que describen su posición respecto al referencial inercial ( $r_v = x_v, y_v$ ) y uno más para describir su orientación ( $\psi_v$ ). Entonces las coordenadas generalizadas para el torso pueden ser definidas como las posiciones inerciales del referencial  $\Sigma_v$  como:

$$q_t = \begin{pmatrix} r_v \\ \psi_v \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^3 \quad (1)$$

### II-A. Cinemática directa

La cinemática directa para el torso está descrita por su posición respecto al sistema inercial. Para conocer su orientación se hace a través de la matriz de rotación  $R_0^v(\psi_v)$ , la cual permite cambiar un vector de su representación en el referencial  $\Sigma_v$  hacia el referencial inercial  $\Sigma_0$  (ver figura 1)

$$R_0^v(\psi_v) = \begin{bmatrix} \cos \psi_v & -\sin \psi_v \\ \sin \psi_v & \cos \psi_v \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{2 \times 2} \quad (2)$$

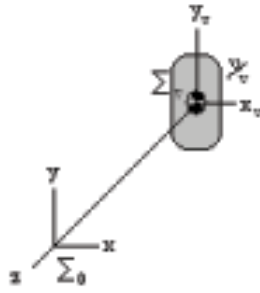


Figura 1. Torso como cuerpo libre

La matriz homogénea para el torso resulta ser:

$$H_0^v(q_t) = \begin{bmatrix} R(\psi_v)_0^v & r_v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{3 \times 3} \quad (3)$$

## II-B. Modelo Dinámico

Las ecuaciones dinámicas que describen el movimiento de un cuerpo libre, en su propio referencial, se obtiene a través de la formulación de Kirchhoff [4], [8], [9] y están definidas como:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial v} + \omega \times \frac{\partial K}{\partial v} = f \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \omega} + \omega \times \frac{\partial K}{\partial \omega} + v \times \frac{\partial K}{\partial v} = n \quad (5)$$

Los vectores  $f$  y  $n$  son las fuerzas y torques exógenos que actúan sobre el cuerpo e incluyen la gravedad y están definidos en el referencial no inercial  $\Sigma_v$ . Las velocidades  $v$  y  $\omega$  representan, respectivamente, la velocidad lineal y angular del cuerpo, ambas expresadas en el referencial  $\Sigma_v$  y  $K$  es la energía cinética. La expresión de  $K$  en el referencial no inercial está dada por:

$$K(\nu) = \frac{1}{2} \nu^T M_v \nu \quad (6)$$

donde  $\nu = (v^T, \omega^T)^T$  es el "twist" del referencial no inercial  $\Sigma_v$ , i.e, las velocidades lineal y angular, y la matriz de inercias  $M_v$  es constante y está definida como:

$$M_v = \begin{bmatrix} m_v I & -m_v [r_{c/v} \times] \\ m_v [r_{c/v} \times] & I_v \end{bmatrix} \quad (7)$$

La distancia  $r_{c/v}$  es posición del centro de masas del cuerpo medida desde el referencial del cuerpo  $\Sigma_v$ . La notación  $[r_{c/v} \times]$  representa la expresión matricial antisimétrica del producto cruz del vector  $r_{c/v}$ . El término  $m_v [r_{c/v} \times]$  es llamado el primer momento de inercia de  $m_v$  respecto a  $\Sigma_v$  y  $I_v = I_{vcm} + m_v [r_{c/v} \times]^T [r_{c/v} \times] \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$  es el tensor de momentos de inercias del cuerpo relativo al origen  $v$  del referencial  $\Sigma_v$ .

La relación entre el twist y las velocidades generalizadas está dada por la siguiente ecuación:

$$\nu = J_v(q_t) \dot{q}_t \quad (8)$$

En el caso planar tal relación resulta muy simple y está dada por el operador:

$$J_v(q_t) = \begin{bmatrix} \cos \psi_v & \sin \psi_v & 0 \\ -\sin \psi_v & \cos \psi_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{3 \times 3} \quad (9)$$

Al sustituir la expresión de la energía cinética (6) en las ecuaciones de Kirchhoff (4)-(5) se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} m_v I & -m_v [r_{c/v}] \\ m_v [r_{c/v}] & I_v \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_v (\omega \times v) + m_v [\omega \times (r_{c/v} \times \omega)] \\ -m_v [(\omega \times v) \times r_{c/v}] + \omega \times I_v \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ n \end{pmatrix} \quad (10)$$

Definiendo  $F$  como el "tirón" de fuerzas externas (fuerzas y momentos externos ejercidos sobre el cuerpo), este vector puede ser expresado como parte del lado derecho de la ecuación (10) como:

$$\begin{pmatrix} f \\ n \end{pmatrix} = F - g_v(q_t) \quad (11)$$

donde  $g_v(q_t)$  es el vector de gravedad y está definido, para el caso planar, como:

$$g_v(q_t) \triangleq -m_v g \begin{pmatrix} R_0^v(\psi_v) \vec{j} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{3 \times 1} \quad (12)$$

con el vector unitario vertical  $\vec{j} = (0, 1)^T$ .

Se tiene que usando las ecuaciones (8) y (10) el modelo dinámico utilizando la formulación de Kirchhoff puede ser escrito de la siguiente forma:

$$M_v \dot{\nu} + C_v(\nu) \nu + g_v(q_t) = F \quad (13)$$

$$\nu = J_v(q_t) \dot{q}_t \quad (14)$$

La ecuación (13) es llamada la ecuación dinámica y la ecuación (14) la ecuación cinemática. Es importante recalcar que la matriz de Coriolis  $C_v(\nu)$  no tiene una representación única pero cualquiera de sus distintas formas es una matrix antisimétrica:

$$C_v(\nu) + C_v(\nu)^T = 0 \quad (15)$$

Ya que la matriz de inercia  $M_v$  es constante la propiedad de antisimetría de los sistemas Lagrangianos  $\frac{1}{2} \dot{M}_v - C_v = Q$ , donde  $Q$  es una matrix antisimétrica, se cumple.

Con el modelo dinámico descrito por la formulación de Kirchhoff (13)-(14) es posible conocer la posición del cuerpo respecto al referencial inercial y sus velocidades lineales y angulares respecto a su propio referencial. Sin embargo estas velocidades pueden ser mapeadas al referencial inercial para obtener un modelo dinámico en coordenadas generalizadas, lo cual resulta de mayor utilidad. El modelo dinámico equivalente a la formulación Euler-Lagrange se obtiene al sustituir la ecuación cinemática (14) y su primera derivada en la ecuación dinámica (13) y pre-multiplicando el resultado por el operador cinemático transpuesto  $J_v^T$  para garantizar una matrix de inercia Lagrangiana simétrica:

$$M_q(q_t) \ddot{q}_t + C_q(q_t, \dot{q}_t) \dot{q}_t + g_q(q_t) = \tau_q \quad (16)$$

Con las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} M_q(q_t) &= J_v^T(q_t)M_v J_v(q_t) \\ C_q(q_t, \dot{q}_t) &= J_v^T(q_t)M_v \dot{J}_v(q_t, \dot{q}_t) \\ &\quad + J_v^T(q_t)C_v(J_v(q_t)\dot{q}_t)J_v(q_t) \\ g_q(q_t) &= J_v^T(q_t)g_v(q_t) \\ \tau_q &= J_v^T(q_t)F \end{aligned}$$

Con las equivalencias anteriores y la propiedad (15) es posible demostrar que para esta representación, la propiedad de antisimetría de sistemas Lagrangianos se sigue cumpliendo:

$$\frac{1}{2}\dot{M}_q - C_q = Q, \quad Q + Q^T = 0 \quad (17)$$

### III. MODELADO CINEMÁTICO Y DINÁMICO DE LAS PIERNAS

La posición cartesiana y la ecuación de movimiento de las piernas se obtuvieron a partir del referencial no inercial y después fueron mapeadas al referencial inercial.

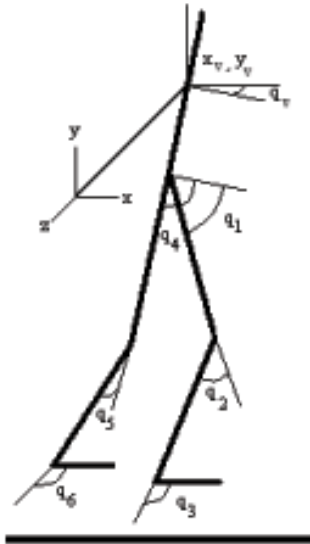


Figura 2. Bípodo de 9 DOF

#### III-A. Cinemática directa

Para conocer la cinemática directa de las piernas se utiliza el algoritmo de Denavit-Hartenberg y da como resultado matrices homogéneas a través de las cuales es posible conocer la posición cartesiana y la orientación total del cuerpo. Si el algoritmo es aplicado a partir del referencial no inercial ( $\Sigma_v$ ), se obtiene la cinemática directa de base fija:

$$r_{i/v}^{(v)} = f(q_{m_j}) \quad (18)$$

Para obtener la cinemática inercial es necesario tomar en cuenta la posición de la base móvil. En la figura 2 se muestra la configuración total del robot bípodo, el cual está conformado de 9 GDL, 3 para el torso dados por  $q_t = (x_v, y_v, \psi_v)^T$ , 3 para una pierna  $q_{m_1} = (q_1, q_2, q_3)^T$  y 3 más para la segunda pierna

$q_{m_2} = (q_4, q_5, q_6)^T$ . Así, el vector de coordenadas generalizadas está definido por

$$q = (q_t, q_{m_1}, q_{m_2})^T \in \mathbb{R}^9 \quad (19)$$

La posición cartesiana de un punto  $i$  de cualquiera de las piernas respecto al referencial inercial es descrita por la siguiente ecuación:

$$d_{i_j}^{(0)} = r_v + R_0^v r_{i/v}^{(v)} \quad (20)$$

donde  $r_{i/v}^{(v)}(q_{m_j})$  es la posición del punto  $i$  de la pierna  $j$  con respecto al referencial raíz  $\Sigma_v$ .

Es evidente que hay dos cadenas cinemáticas independientes, una para cada pierna. De esta manera se necesario definir coordenadas generalizadas para estas cadenas. Así, quedan definidos los siguientes vectores:

$$q_{p_j} = \begin{pmatrix} q_t \\ q_{m_j} \end{pmatrix} \quad j = 1, 2 \quad (21)$$

Dado que  $r_v$  y  $R_0^v$  expresan las coordenadas generalizadas de la base móvil  $q_t$ , la posición de los puntos  $i$  puede estar definida por:

$$d_{i_j}^{(0)} = f(q_t, q_{m_j}) = f(q_{p_j}) \quad (22)$$

#### III-B. Jacobiano del Manipulador Móvil

El jacobiano de un manipulador es el operador que mapea la velocidad generalizada y las velocidades del efector final. Éste es calculado normalmente considerando que la raíz de la cadena cinemática es un referencial inercial. En el caso de las piernas, podemos considerarlas como manipuladores atados al torso, pero la raíz de estos manipuladores no es inercial sino móvil.

El jacobiano obtenido con respecto al referencial raíz, el de la base móvil, lo llamamos Jacobiano de Base Fija ( $J_{fb}$ ) y cumple con la siguiente relación

$$\begin{pmatrix} \dot{r}_{i/v}^{(v)} \\ \omega_{i/v}^{(v)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_{v_i}(q_{m_j}) \\ J_{\omega_i}(q_{m_j}) \end{bmatrix} \dot{q}_{m_j} = J_{fb_j}(q_{m_j}) \dot{q}_{m_j} \quad (23)$$

El jacobiano de base inercial es obtenido a partir de la formulación del "Mobile Manipulator Jacobian"  $mmJ$  [4], [5]. Este  $mmJ$  mapea la velocidad de las coordenadas de la cadena cinemática móvil, incluyendo las de la base, a velocidades lineales y angulares inerciales:

$$\begin{pmatrix} v_i^{(0)} \\ \omega_i^{(0)} \end{pmatrix} = mmJ(\bar{q}) \dot{\bar{q}} \quad (24)$$

donde las coordenadas

$$\bar{q} = (q_v, q_m)^T \quad (25)$$

son el conjunto de las coordenadas  $q_v$  de la base móvil de manipulador y las coordenadas  $q_m$  del manipulador.

El  $mmJ$  es particionado en dos jacobianos  $J_v(\bar{q})$  y  $J_m(\bar{q})$  que representan la influencia de las velocidades de la base móvil y del manipulador respectivamente:

$$mmJ(\bar{q}) = [J_v(\bar{q}) \mid J_m(\bar{q})]$$

Así mismo, a través de esta formulación se pueden conocer los jacobianos de velocidad lineal  $mmJ_{v_i}$  y angular  $mmJ_{\omega_i}$  de cualquier punto  $i$  en los eslabones del manipulador, respecto al referencial inercial.

$$mmJ(\bar{q}) = \begin{bmatrix} mmJ_{v_i}(\bar{q}) \\ mmJ_{\omega_i}(\bar{q}) \end{bmatrix}$$

Partiendo de la derivada en el tiempo de la ecuación (20) que describe la posición de cualquier punto en la cadena cinemática de base móvil, y tomando en cuenta las propiedades del producto cruz expresado como matriz antisimétrica (ver [9]), el  $mmJ_{v_i}$  queda definido como:

$$mmJ_{v_i}(\bar{q}) = \left[ I \quad -[R_0^v(q_v)r_{x/v}^{(v)}(q_m)\times] \mid R_0^v(q_v)J_{v_i}(q_m) \right] \quad (26)$$

La parte del jacobiano correspondiente a las velocidad angular  $mmJ_{\omega_i}$  se obtiene a partir de la expresión de la velocidad angular inercial del referencial asociado al eslabón donde se encuentre el punto  $i$ :

$$\omega_i^{(0)} = \omega_v^{(0)} + R_0^v \omega_{i/v}^{(v)} \quad (27)$$

Quedando finalmente la definición del  $mmJ_{\omega_i}$  como:

$$mmJ_{\omega_i}(\bar{q}) = \left[ 0 \quad I \mid R_0^v(q_v)J_{\omega_i}(q_m) \right] \quad (28)$$

Por último, de las ecuaciones (26) y (28) se deducen los Jacobianos del vehículo y del manipulador del  $mmJ_i$  de un punto cualesquiera  $i$ :

$$J_{v_i} = \begin{bmatrix} I & -[R_0^v(q_v)r_{i/v}^{(v)}(q_m)\times] \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$J_{m_i} = \begin{bmatrix} R_0^v(q_v) & 0 \\ 0 & R_0^v(q_v) \end{bmatrix} J_{fb_i}(q_m) \quad (30)$$

Para el caso planar, donde todos los cuerpos se mueven en el plano sagital (que es el caso del robot planar de 9 GDL), las componentes del  $mmJ$  quedan como sigue:

$$J_{v_i}(q_t, q_{m_j}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & J_x(q_t, q_{m_j}) \\ 0 & 1 & J_y(q_t, q_{m_j}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$J_{m_i}(q_t, q_m) = \begin{bmatrix} R_0^v(\psi_v) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} J_{fb_j}(q_{m_j}) \quad (32)$$

$$mmJ_{v_i} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & J_x \\ 0 & 1 & J_y \end{bmatrix} & R_0^v(\psi_v)J_{fb_{v_i}} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$mmJ_{\omega_i} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & J_{fb_{\omega_i}} \end{bmatrix} \quad (34)$$

donde

$$J_x = -(y_{i/v}^v \cos \psi_v + x_{i/v}^v \sin \psi_v)$$

$$J_y = x_{i/v}^v \cos \psi_v - y_{i/v}^v \sin \psi_v$$

y  $x_{i/v}^v, y_{i/v}^v$  son las componentes cartesianas de la posición absoluta  $r_{i/v}^v$ .

### III-C. Modelado Dinamico

Se sabe que la energía cinética para un cuerpo esta gobernada por la ecuación:

$$K_i = \frac{1}{2} [m_i v_i^T v_i + \omega_i^T I_i \omega_i] \quad (35)$$

Donde  $m_i$  es la masa del cuerpo,  $v_i$  es la velocidad del centro de masas (medida en cualquier referencial indistintamente),  $\omega_i$  es la velocidad angular medida en el referencial del cuerpo e  $I_i$  es el momento de inercias respecto al centro de masas. Usando las matrices a bloques (26) y (28) del  $mmJ$  de los centros de masas de cada eslabón, la energía cinética de la pierna 1 puede reescribirse de la siguiente manera:

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}_{p1}^T N_p(q_{p1}) \dot{q}_{p1} \quad (36)$$

donde  $N_p$  es la matriz de inercias y está definida por:

$$N_p(q_{p1}) = \sum_{i=1}^n \left[ m_i (mmJ_{v_i}^T mmJ_{v_i}) + mmJ_{\omega_i}^T R_0^i I_i R_0^i mmJ_{\omega_i} \right] \quad (37)$$

Usando los bloques (26) y (28) del  $mmJ$  la matriz de inercia  $N_p$  de cada pierna puede ser reescrita a bloques de la siguiente manera:

$$N_p(q_{p_i}) = \begin{bmatrix} H_v(q_{p_i}) & H_A(q_{p_i}) \\ H_A^T(q_{p_i}) & H_{fb}(q_{m_i}) \end{bmatrix} > 0 \quad (38)$$

**Nota.** El bloque  $H_{fb}(q_{m_i})$  representa la matriz de inercia de la cadena cinemática a base fija, como si la base fuese estática y sólo depende de las coordenadas de la cadena, no de las coordenadas de la base.

Partiendo de la hipótesis que ambas piernas tienen los mismos parámetros dinámicos y cinemáticos se puede concluir que  $N_p(q_{p1}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  representa la matriz de inercias de la primera pierna, mientras que  $N_p(q_{p2}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  representa el caso para la segunda pierna.

**III-C1. Dinámica acoplada:** El modelo dinámico acoplado puede ser obtenido a partir de la energía total del sistema es decir la suma de la energía de torso como cuerpo libre más la de cada una de las dos piernas. Esta expresión, usando la definición de coordenadas generalizadas (19), queda como:

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T H_T(q) \dot{q} \quad (39)$$

donde

$$H_T(q) = \begin{bmatrix} M_q(q_t) + H_v(q_{p1}) + H_v(q_{p2}) & H_A(q_{p1}) & H_A(q_{p2}) \\ H_A^T(q_{p1}) & H_{fb}(q_{m1}) & 0 \\ H_A^T(q_{p2}) & 0 & H_{fb}(q_{m2}) \end{bmatrix} > 0 \quad (40)$$

Finalmente el modelo lagrangiano del un robot bípedo de 9 GDL en su fase de vuelo, es derivado usando la ecuación de Lagrange como se muestra a continuación.

$$H_T(q)\ddot{q} + C_T(q, \dot{q})\dot{q} + g_T(q) = \tau + \tau_{contacto} \quad (41)$$

donde  $C_T = \dot{H}_T(q, \dot{q}) - \frac{\partial K(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}}$  es la matrix de Coriolis total y cumple con la propiedad de antisimetría:  $C_T - \frac{1}{2}\dot{H}_T = Q$ ,  $Q + Q^T = 0$ .

El vector de gravedad es calculado como

$$g_T(q) = - \left[ \sum m_i \bar{J}_{v_{cm_i}}(q)^T \right] \vec{g}$$

donde  $\bar{J}_{v_{cm_i}}(q)$  es una versión extendida de  $mmJ_{v_i}$  (el jacobiano del manipulador móvil para velocidades lineales), con el vector de coordenadas generalizadas completo, definido como sigue:

$$\bar{J}_{v_{cm_i}}(q) = \begin{cases} \begin{bmatrix} J_{v_{cm_i}} & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{para el torso} \\ \begin{bmatrix} J_{v_{cm_i}} & J_{m_{v_{cm_i}}} & 0 \end{bmatrix} & \text{para la pierna 1} \\ \begin{bmatrix} J_{v_{cm_i}} & 0 & J_{m_{v_{cm_i}}} \end{bmatrix} & \text{para la pierna 2} \end{cases} \quad (42)$$

Por lo tanto, este vector de gravedad puede ser dividido en tres bloques de la siguiente forma:

$$g_T = \begin{pmatrix} g_t(q_t, q_{m_1}, q_{m_2}), \\ g_{m_1}(q_t, q_{m_1}), \\ g_{m_2}(q_t, q_{m_2}) \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^9 \quad (43)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación dinámica (41) representa las fuerzas aplicadas a las coordenadas generalizadas por los actuadores. Debido a que el robot bípedo sólo está accionado en las articulaciones de las piernas, éste queda definido como:

$$\tau = (0, \tau_{m_1}, \tau_{m_2})^T \in \mathfrak{R}^9 \quad (44)$$

quedando este modelo como un sistema subaccionado.

El segundo término del lado derecho  $\tau_{contacto}$  representa las fuerzas generalizadas exógenas debidas al contacto de cualquier parte del robot con el medio. Esta fuerza es nula mientras el robot se encuentre en fase de vuelo, pero no lo es durante las fases de soporte simple o doble soporte en el que estas fuerzas son el mapeo de las fuerzas y momentos de contacto a las coordenadas generalizadas.

### III-D. Contacto en los pies

Sea al tirón de contacto  $F_{c_j}$  un vector de fuerzas y momentos en el punto de contacto de la pierna  $j$ , expresados en el referencial inercial, como:

$$F_{c_j} = \begin{pmatrix} f_{c_j} \\ n_{c_j} \end{pmatrix} \quad (45)$$

Si se define un vector de fuerzas y momentos de contacto de ambas piernas como

$$F_c = \begin{pmatrix} F_{c_1} \\ F_{c_2} \end{pmatrix} \quad (46)$$

Este puede ser usado tanto para la fase de doble soporte ( $F_{c_1} \neq 0, F_{c_2} \neq 0$ ), para la fase de vuelo ( $F_{c_1} = 0, F_{c_2} = 0$ ), la fase de soporte simple sobre la pierna 1 ( $F_{c_1} \neq 0, F_{c_2} = 0$ ) o fase de soporte simple sobre la pierna 2 ( $F_{c_1} = 0, F_{c_2} \neq 0$ ).

Usando el principio de trabajo virtual [9], las fuerzas generalizadas exógenas debidas al contacto están dadas por:

$$\tau_{contacto} = J_c^T F_c \quad (47)$$

donde  $J_c$  es un operador compuesto por bloques de los jacobianos de manipulador móvil de los puntos de contacto  $mmJ'_c$ s de cada pierna. Este operador está definido como

$$J_c(q) = \begin{bmatrix} J_{v_{c_1}}(q_{p_1}) & J_{m_{c_1}}(q_{p_1}) & 0 \\ J_{v_{c_2}}(q_{p_2}) & 0 & J_{m_{c_2}}(q_{p_2}) \end{bmatrix} \quad (48)$$

donde las matrices  $J_{v_{c_i}}$  y  $J_{m_{c_i}}$  están dadas por las expresiones (29) y (30) respectivamente.

Finalmente, la ecuación dinámica completa quedan como:

$$H_T(q)\ddot{q} + C_T(q, \dot{q})\dot{q} + g_T(q) = \tau + J_c^T F_c \quad (49)$$

## IV. RESULTADOS

### IV-A. Simulaciones del torso-cuerpo libre

#### IV-A1. Simulaciones del modelo dinámico de Kirchhoff:

A continuación se presentaran únicamente las simulaciones realizadas al torso (cuerpo libre) con el modelo de Kirchhoff y el modelo equivalente de Lagrange; con la finalidad de conocer si el modelo equivalente es funcional para el desarrollo del modelo completo. Para realizar las simulaciones se utilizaron los siguientes parámetros:

Cuadro I  
PARÁMETROS DEL TORSO

Masa	Momento de Inercia (Iz)
58Kg	4,20Kgm <sup>2</sup>

Las condiciones iniciales de posición y velocidad fueron:  $q_0 = [20m, 20m, 45^0]$ ,  $\nu_0 = [0, 2m/s, 2m/s, 0, 001rad/s]$  y  $F = 0$ .

En las siguientes gráficas se aprecia el comportamiento del cuerpo respecto al sistema inercial.

En las gráfica 3-derecha se observa el desplazamiento descendente del cuerpo. Esto se debe a que no existe control alguno y por lo tanto el cuerpo tiende a descender de manera infinita. En la gráfica 3-abajo se aprecia que el cuerpo gira mientras desciende. Esto se debe a la condición de velocidad angular inicial.

IV-A2. Simulaciones del modelo dinámico equivalente de Lagrange: Para poder simular este modelo se tiene que trabajar con las mismas condiciones iniciales que en el caso de la formulación de Kirchhoff; por lo que es necesario realizar el mapeo de las velocidades iniciales respecto al sistema no inercial ( $\nu_0$ ) hacia el sistema inercial para obtener ( $\dot{q}_0$ ). Esto se realiza con la ecuación cinemática (14) a través

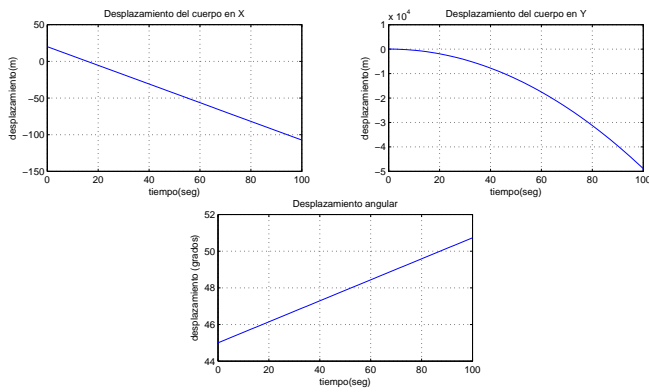


Figura 3. Desplazamiento del cuerpo formulación de Kirchoff

del operador  $J_v^{-1}(q)$ . Las condiciones iniciales fueron:  $\dot{q}_0 = [-1,2727\text{m/s}; 1,555\text{m/s}; 0,001\text{rad/s}]$ ,  $q_0 = [20\text{m}, 20\text{m}, 45^\circ]$  y  $\tau_q = 0$ .

Las siguientes figuras muestran el comportamiento del cuerpo respecto al sistema inercial utilizando el modelo equivalente.

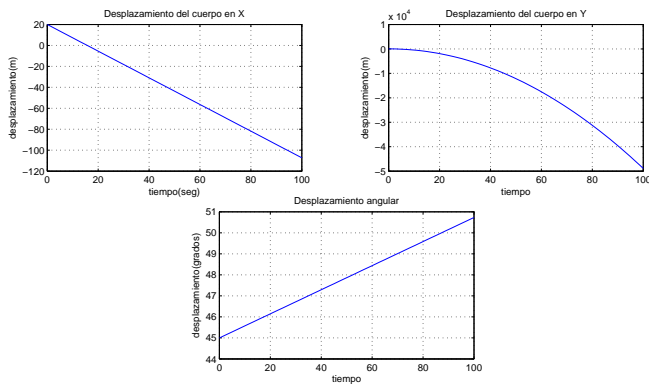


Figura 4. Desplazamiento del cuerpo modelación de Euler-Lagrange

**IV-A3. Error en posición generado por ambos modelos:**

Al obtener la posición del cuerpo respecto al sistema inercial en el modelo de Kirchoff y en el modelo equivalente de Lagrange es posible realizar una comparación,

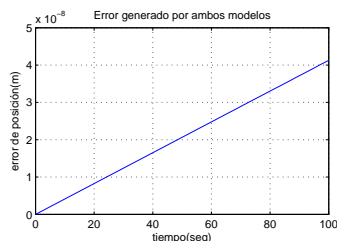


Figura 5. Error entre modelo (13)-(14) y el equivalente (16)

Para conocer el error generado por ambos modelos se definirá el vector de posición del cuerpo como  $P_1$  en el modelo de Kirchoff y como  $P_2$  en el modelo de Lagrange. Con esto utilizamos la norma  $L_2$  de cada vector  $P_i, \forall i = 1, 2$ .

$$\|P_1\|_2 = \left\| \sqrt{P_1^T P_1} \right\| \quad \|P_2\|_2 = \left\| \sqrt{P_2^T P_2} \right\|$$

Finalmente el error de posición generado por ambos modelos será  $e_p = |P_1 - P_2|$ .

En la figura 5 se observa que el error de posición generado por ambos modelos es del orden del error numérico usado por el método numérico.

**IV-B. Simulaciones del modelo en contacto**

La validación del modelo en contacto (49) se realizó con una fase de soporte simple durante un paso de marcha. Se usó una ley de control de tipo Dinámica Inversa basada en el modelo reducido, completamente actuado de las dos piernas durante el contacto, donde cada pierna está compuesta por tres articulaciones. Las trayectorias articulares se obtuvieron con la cinemática inversa de las piernas a partir de trayectorias cartesianas en cadera y del tobillo del pie flotante (ver figura 6). El tamaño de paso simulado tiene una longitud de 50 cm.

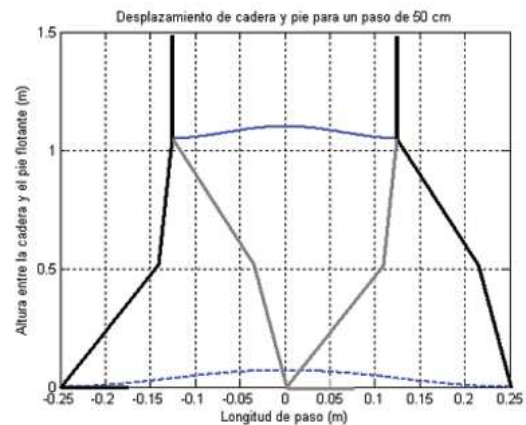


Figura 6. Trayectorias cartesianas de la cadera y del tobillo

Los parámetros utilizados asemejantan la complejión de una persona y se muestran en el cuadro II.

Cuadro II  
PARÁMETROS DEL ROBOT BÍPEDO

Eslabón	longitud(m)	masa(Kg)	M.Inercia( $Kg\ m^2$ )
$L_h$	0.42	53	3.7541
$L_1$	0.58	9.5	0.29196
$L_2$	0.58	7.5	0.2225
$L_3$	0.3	1.5	0.01186
$L_4$	0.58	9.5	0.29196
$L_5$	0.58	7.5	0.2225
$L_6$	0.3	1.5	0.01186

En la figura 7 se aprecian las trayectorias articulares correspondientes y en la figura 8 aparecen las fuerzas y momentos generados en la punta del pie (considerado como el punto de contacto). Éstas son calculadas usando la ecuación dinámica (49) y la ecuación de la restricción holonómica del piso:  $J_c(q)\dot{q} = 0$ . Como puede observarse, la fuerza vertical es siempre positiva y de un valor promedio de 900N, equivalente

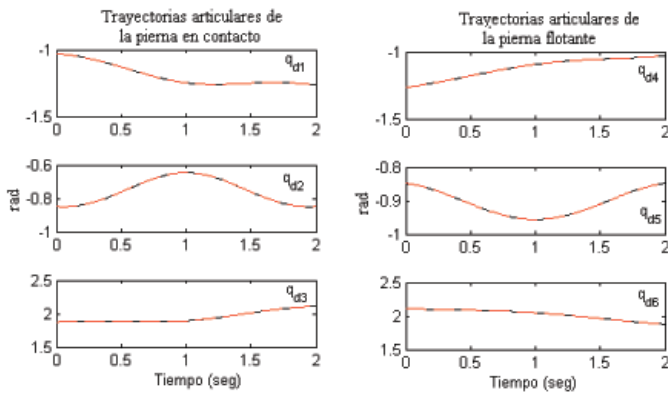


Figura 7. Trayectorias articulares

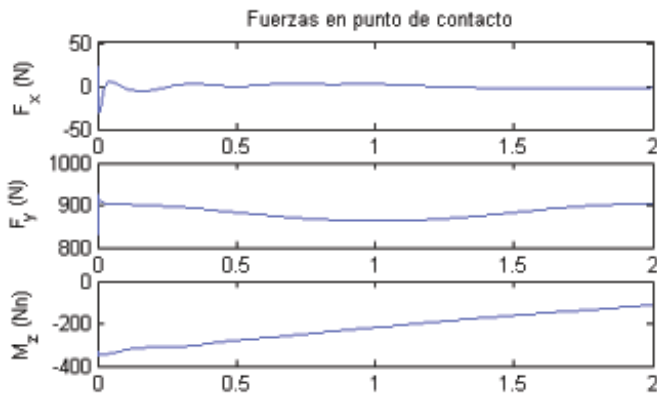


Figura 8. Fuerzas y momentos en el punto de contacto

al peso del robot, mientras que las variaciones son debidas al movimiento de todo el sistema. La fuerza horizontal es relativamente pequeña y en teoría está acotada por la fuerza máxima de fricción estática, indicando que no existe deslizamiento.

## V. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

### V-A. Conclusiones

En este documento se obtuvo un modelo dinámico de un robot bípedo con base (torso) no inercial, basado en las formulaciones de Kirchoff y Euler-Lagrange. El modelo del torso es obtenido físicamente por el primer método y su equivalente en Lagrange para poder ser incluido con los modelos dinámicos de las piernas. Estas son modeladas con el formalismo Lagrangiano usando operadores no inerciales llamados "Mobile Manipulator Jacobian" ("mmJ"). El conjunto es un método novedoso para obtener un modelo dinámico de robots bípedos en fase de vuelo.

Usando nuevamente los mmJ de cada pierna y el principio de trabajo virtual, fuerzas de contacto en cada pierna son obtenidas e incluidas en el modelo, dotándolo de la característica general de representar al robot tanto en fase de vuelo como de simple o doble soporte.

Simulaciones ayudaron a validar la equivalencia de modelos del torso. El modelo en fase de soporte simple se validó con diferentes simulaciones. En este trabajo se presentó la de un

paso de 50 cm de longitud. Este modelo proporciona un vector fuerzas en el punto de contacto.

### V-B. Trabajo futuro

Es natural observar que debe existir una relación entre las fuerzas de contacto y las condiciones de estabilidad, tanto estáticas como dinámicas. En base a este modelo dinámico es necesario determinar las condiciones para generar estabilidad dinámica en fase de soporte simple, de doble soporte y de transición. Igualmente es indispensable, para efectos prácticos y de experimentación, extender el modelo a un robot bípedo en tres dimensiones.

## REFERENCIAS

- [1] Grizzle, J.W.; Abba, G. and Plestan, F. *Proving Asymptotic Stability of a Walking Cycle for a Five DOF Biped Robot Model*. Second International Conference on Climbing and Walking Robots, Portsmouth, UK (pp. 69-81), September 1999.
- [2] Kajita, S.; Kanehiro, F.; Kaneko, Ke.; Fujiwara, K.; Yokoi, K. and Hirukawa, H. *A Realtime Pattern Generator for Biped Walking*, Proceedings of IEEE International Conference on Robotics & Automation, Washington D.C., May 2002.
- [3] Kajita, S. and Tani, K. *Adaptive Gait Control of a Biped Robot Based on Realtime Sensing of the Ground Profile*. Proceedings of IEEE International Conference on Robotics & Automation, 1996.
- [4] Hootsman, N. and Dubowsky, S. *Large Motion Control of Mobile Manipulators Including Vehicle Suspension Characteristics*. Proceedings of IEEE International Conference on Robotics & Automation, Sacramento California, April 1991.
- [5] Hootsman, N.A.M. *The motion Control of Manipulators on Mobile Vehicles*. PhD. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, January 1992.
- [6] Huang, Q.; Yokio, K.; Kajita, S.; Kaneko, K., Arai, K.; Koyachi, N. and Tanie, K. *Planning Walking Patterns for a Biped Robot*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 17, No.3, 2001.
- [7] Okumura, Y.; Tawara, T.; Endo, K.; Furuta, T. and Shimizu, M. *Realtime ZMP Compensation for Biped Walking Robot using Adaptive Inertia Force Control*, Proceedings of the 2003 IEEWRSJ Intl. Conference on Intelligent Robots and Systems, Las Vegas Nevada, October 2003.
- [8] Olguín Díaz, Ernesto *Equations of 3D motion for Rigid Bodies*. Reporte Interno, Cinvestav México, 2008.
- [9] Spong, M.W. and Vidyasagar, M. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley, New York 1989.
- [10] Vanderborght, B. *Dynamic stabilisation of the biped Lucy powered by actuators with controllable stiffness*. PhD. Thesis, Vrije Universiteit Brussel, May 2007
- [11] Vukobratovic, M.; Borovac, B.; Surla, D. and Stokic, D. *Biped Locomotion*, Vol. 7 of Scientific Fundamentals of Robotics, Springer-Verlag, 1990.
- [12] Yamagushi, J. and Takanish, A. *Development of a Biped Walking Robot having Antagonistic Driven Joints using Nonlinear Spring Mechanics*, Proceedings of IEEE International Conference on Robotics & Automation, 1997.