

Observación de Estado y Estimación de Perturbaciones en Sistemas no Lineales en Forma Normal

David Rosas*, Joaquín Alvarez**, Patricia Rosas*, Axayacatl Silva*

*Universidad Autónoma de Baja California, Facultad de Ingeniería, Mexicali
Blvd. Benito Juárez S/N, Mexicali, B.C., {drosas, prosas}@uabc.mx, axayacatl.silva@gmail.com

**Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada
Depto. de Electrónica y Telecomunicaciones, Km. 107 Carr. Tijuana-Ensenada, Ensenada, B.C.
jqalvar@cicese.mx

Resumen— Se presenta una técnica para el diseño de un observador discontinuo para una clase de sistemas no lineales inciertos. El estado del observador converge exponencialmente al estado de la planta y a los términos correspondientes a perturbaciones. Su robustez se basa en la generación de un modo deslizante de segundo orden, pero a diferencia de otras propuestas, la estimación de las perturbaciones no se hace por medio del control equivalente. Se presentan resultados experimentales que ilustran el desempeño del observador.

Palabras clave: Observadores, modos deslizantes de alto orden, sistemas no lineales.

I. Introducción

El problema de diseño de observadores, desde el punto de vista de sistemas dinámicos, surge de la necesidad de información para realizar tareas de control, monitoreo y modelado (Besancon, 2007), de esta forma es un problema muy importante en la implementación de un sistema de control en general.

El diseño de observadores depende en gran medida del modelo de la planta y de la exactitud del conocimiento de sus parámetros. Por ejemplo, una estructura muy utilizada es el observador de Luenberger (Luenberger, 1971), el cual fue diseñado en un principio para sistemas lineales y consideraba un modelo exacto de la planta. Si existen perturbaciones externas o variaciones en los parámetros el desempeño del observador se deteriora, causando problemas de estabilidad en el sistema en lazo cerrado. Actualmente existen diferentes versiones de este esquema de observador que pueden aplicarse a sistemas no lineales y presentan cierto grado de robustez.

El problema de diseño de observadores está relacionado con el problema de diseño de controladores, es por esto que se han utilizado diferentes técnicas de control robusto en el diseño de observadores.

Las técnicas de control robusto basadas en sistemas con estructura variable han tenido buenos resultados en el diseño de observadores. En años recientes diferentes

resultados sobre estabilidad de sistemas con estructura variable han aparecido, ver por ejemplo (Branicky, 1998) y (Liberzon, 2003), donde se muestra que esta clase de sistemas tienen buenas propiedades de convergencia, y al mismo tiempo, muestran buen desempeño ante perturbaciones externas acotadas.

En particular, los observadores por modos deslizantes son ampliamente usados debido a sus características atractivas como la robustez ante entradas desconocidas, la posibilidad de usar el control equivalente para la estimación de las entradas desconocidas y la convergencia en tiempo finito (Barbot, Djemai y Boukhobza, 2002). Sin embargo, para sistemas MIMO el proceso de diseño es una tarea difícil.

Recientemente también se han aplicado técnicas de control por modos deslizantes de alto orden en el desarrollo de observadores. En (Levant, 1998) se presenta un derivador con convergencia en tiempo finito basado en el algoritmo conocido como super-twisting. Con este derivador se puede resolver, en forma teórica, el problema de observación de sistemas que puedan ser llevados a su forma normal, pero no se pueden estimar las perturbaciones y las no idealidades en el sistema.

Otras propuestas importantes son (Dávila, Fridman y Levant, 2005) y (Rosas, Alvarez y Fridman, 2007). En (Dávila, Fridman y Levant, 2005) se propone un observador para sistemas mecánicos basado en el algoritmo super-twisting el cual garantiza convergencia en tiempo finito al estado de la planta, en (Rosas, Alvarez y Fridman, 2007) se muestra un observador que presenta un modo deslizante de segundo orden que converge exponencialmente al estado de la planta. En ambos casos el control equivalente es igual al término de perturbación y puede ser recuperado utilizando un filtro pasa bajas (Utkin, 1992). En (Alvarez, Rosas y Peña, 2009) este principio fue utilizado exitosamente para compensar las perturbaciones y dar robustez al sistema en lazo cerrado; sin embargo, sólo puede aplicarse a sistemas con estructura Lagrangiana y siempre

hay un error en la estimación de las perturbaciones debido al retardo introducido por el filtro.

En este trabajo se presenta un observador para sistemas no lineales SISO en forma normal, el cual es robusto ante perturbaciones acotadas en amplitud y velocidad y que satisfacen las condiciones de acoplamiento.

El observador se basa en los resultados presentados en (Rosas, Alvarez y Fridman, 2007), pero a diferencia del observador mostrado ahí, este observador garantiza convergencia exponencial a la perturbación a través de variables de estado auxiliares, con lo que se evita el uso de un filtro adicional para recuperar el control equivalente. El diseño del observador es modular; cada módulo del observador se aplica a cada ecuación de estado de la planta, debido a esto, el observador propuesto se puede aplicar a una clase más amplia de sistemas dinámicos.

La organización del artículo es la siguiente. En la segunda sección se hace el planteamiento del problema y se presentan algunas definiciones preliminares. En la tercera sección se presenta la estructura básica del observador. En la sección cuatro se muestra la estructura general del observador y se prueba su estabilidad. Su desempeño es ilustrado en la sección cinco a través de dos experimentos. En la sección seis se presentan los comentarios finales y las conclusiones.

II. Planteamiento del problema y definiciones preliminares

Considere un sistema no lineal con una entrada y una salida descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \psi(\xi) + \eta(\xi)u + \sigma(\xi)v, \\ y &= h(\xi),\end{aligned}\quad (1)$$

donde $\xi \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de estado, $\psi : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $\eta : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $\sigma : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ y $h : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ son funciones \mathcal{C}^k , para una k suficientemente grande. $u \in \mathfrak{R}$ es la entrada de control y v es una perturbación externa desconocida y acotada; $|v| < \delta$, $|\dot{v}| < \delta'$.

Considere que para la salida y el sistema (1) tiene grado relativo n con respecto a la entrada u y la perturbación v , de esta forma el sistema (1) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= f(x) + g(x)u + \gamma(x)v \\ y &= x_1,\end{aligned}\quad (2)$$

donde las funciones $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ y $\gamma(\cdot)$ están definidas a través de derivadas de Lie (Khalil, 2002).

El problema es diseñar un observador para el sistema (2) cuyo objetivo es estimar el estado x y la perturbación v . Considerando que la transformación utilizada para llevar el sistema (1) a su forma normal (2) tiene inversa en una región del espacio de estado, entonces se puede estimar el vector de estado original ξ a través de la transformación inversa.

III. Diseño de la estructura básica del observador

En esta sección se presenta la estructura básica del observador, la cual toma como base los resultados presentados en (Rosas, Alvarez y Fridman, 2007). Considere el sistema escalar

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x) + g(x)u, \\ y &= x,\end{aligned}\quad (3)$$

donde $x \in \mathfrak{R}$ es el estado, $f(t, x)$ es una función desconocida con $|f(t, x)| < \delta$ y $|\dot{f}(t, x)| < \delta'$ para todo t y x , $g(x)$ es una función conocida y no singular, $u \in \mathfrak{R}$ es una entrada de control. El problema es diseñar un observador cuyo objetivo es estimar la función $f(t, x)$.

Se propone el siguiente observador

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= g(x)u + c_1(y - \hat{y}) + w, \\ \dot{w} &= c_2(y - \hat{y}) + c_3 \text{sign}(y - \hat{y}), \\ \hat{y} &= \hat{x}.\end{aligned}\quad (4)$$

Las soluciones del sistema (4) se definen en el sentido de Filippov (Filippov, 1998). Para analizar la dinámica del observador se define la variable de error entre el estado de la planta y del observador, $e = x - \hat{x}$, cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned}\dot{e} &= f(x, t) - c_1e - w, \\ \dot{w} &= c_2e + c_3 \text{sign}(e),\end{aligned}$$

haciendo un cambio de variables, $z_1 = e$ y $z_2 = f(x, t) - c_1e - w$, se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -c_2z_1 - c_1z_2 - c_3 \text{sign}(z_1) + \dot{f}(x, t),\end{aligned}\quad (5)$$

ya que $|\dot{f}(x, t)| < \delta'$ se puede aplicar el Teorema 1 propuesto en (Rosas, Alvarez y Fridman, 2007) para seleccionar las constantes c_1 , c_2 y c_3 tal que el origen del sistema (5) sea exponencialmente estable.

Esto implica que en el límite cuando el tiempo tiende a infinito $x = \hat{x}$ y $w = f(x, t)$, por lo tanto la función desconocida $f(t, x)$ es identificada.

IV. Observador para sistemas SISO

Considere el sistema (2)

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= f(x) + g(x)u + \gamma(t, x) \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

donde $x \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de estado y $\gamma(t, x) = \gamma(x)v$. Se considera que el sistema presenta un comportamiento acotado para la entrada u y la perturbación $\gamma(t, x)$. Aunque no se conoce la perturbación $\gamma(t, x)$ se considera que es derivable y que su derivada es acotada. Se propone un observador de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= c_{1,1}(y - \hat{y}_1) + w_1, \\ \dot{w}_1 &= c_{2,1}(y - \hat{y}_1) + c_{3,1} \text{sign}(y - \hat{y}_1), \\ \hat{y}_1 &= \hat{x}_1.\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_i &= c_{1,i}(w_{i-1} - \hat{y}_i) + w_i, \\
\dot{w}_i &= c_{2,i}(w_{i-1} - \hat{y}_i) + c_{3,i}\text{sign}(w_{i-1} - \hat{y}_i), \\
\dot{\hat{y}}_i &= \hat{x}_i, \quad i = 2, \dots, n-1.
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_n &= f(y, \hat{x}) + g(y, \hat{x})u \\
&\quad + c_{1,n}(w_{n-1} - \hat{y}_n) + w_n, \\
\dot{w}_n &= c_{2,n}(w_{n-1} - \hat{y}_n) + c_{3,n}\text{sign}(w_{n-1} - \hat{y}_n), \\
\dot{\hat{y}}_n &= \hat{x}_n.
\end{aligned} \tag{8}$$

A. Análisis de estabilidad del observador

Se definen las variables de error

$$e_i = x_i - \hat{x}_i, i = 1, \dots, n$$

cuya dinámica está dada por el sistema

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= x_2 - c_{1,1}e_1 - w_1, \\
\dot{w}_1 &= c_{2,1}e_1 + c_{3,1}\text{sign}(e_1), \\
\dot{e}_2 &= x_3 - c_{1,2}(w_1 - x_2 + e_2) - w_2, \\
\dot{w}_2 &= c_{2,2}(w_1 - x_2 + e_2) \\
&\quad + c_{3,2}\text{sign}(w_1 - x_2 + e_2), \\
&\vdots \\
\dot{e}_i &= x_{i+1} - c_{1,i}(w_{i-1} - x_i + e_i) - w_i, \\
\dot{w}_i &= c_{2,i}(w_{i-1} - x_i + e_i) \\
&\quad + c_{3,i}\text{sign}(w_{i-1} - x_i + e_i), \\
&\vdots \\
\dot{e}_n &= f(x) + g(x)u + \gamma(t) - f(\cdot) - g(\cdot)u \\
&\quad - c_{1,n}(w_{n-1} - x_n + e_n) - w_n, \\
\dot{w}_n &= c_{2,n}(w_{n-1} - x_n + e_n) \\
&\quad + c_{3,n}\text{sign}(w_{n-1} - x_n + e_n),
\end{aligned} \tag{9}$$

El análisis de estabilidad del sistema (9) se realiza por bloques. Como se puede observar, el comportamiento de las variables e_1 y w_1 es independiente del resto del estado. El comportamiento de las variables e_2 y w_2 depende de las variables e_1 y w_1 pero no del resto del estado, y así sucesivamente cada bloque.

Se toman las primeras dos ecuaciones

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= x_2 - c_{1,1}e_1 - w_1, \\
\dot{w}_1 &= c_{2,1}e_1 + c_{3,1}\text{sign}(e_1).
\end{aligned} \tag{10}$$

Como el comportamiento de la planta es acotado y suave se tiene que $|x_2| < \delta_2$ y $|\dot{x}_2| < \delta_3$.

Haciendo el cambio de variables $z_{1,1} = e_1$ y $z_{1,2} = x_2 - c_{1,1}e_1 - w_1$ el sistema (10) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{1,1} &= z_{1,2}, \\
\dot{z}_{1,2} &= \dot{x}_2 - c_{1,1}z_{1,2} - c_{2,1}z_{1,1} + c_{3,1}\text{sign}(z_{1,1}),
\end{aligned}$$

donde se puede encontrar un conjunto de constantes $c_{1,1}$, $c_{2,1}$ y $c_{3,1}$ tal que el origen del sistema sea exponencialmente estable (Rosas, Alvarez y Fridman, 2007). Por lo tanto w_1 converge a x_2 y \hat{x}_1 a x_1 .

Ahora considerando la dinámica de las variables e_2 y w_2

$$\begin{aligned}
\dot{e}_2 &= x_3 - c_{1,2}(w_1 - x_2 + e_2) - w_2, \\
\dot{w}_2 &= c_{2,2}(w_1 - x_2 + e_2) + c_{3,2}\text{sign}(w_1 - x_2 + e_2),
\end{aligned}$$

y definiendo un nuevo conjunto de variables

$$\begin{aligned}
z_{1,2} &= w_1 - x_2 + e_2, \\
z_{2,2} &= \dot{z}_{1,2},
\end{aligned}$$

cuya dinámica está dada por el sistema

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{1,2} &= z_{2,2}, \\
\dot{z}_{2,2} &= \ddot{w}_1 - c_{1,2}z_{2,2} - c_{2,2}z_{1,2} - c_{3,2}\text{sign}(z_{1,2}).
\end{aligned} \tag{11}$$

Ya que $\ddot{w}_1 \rightarrow x_4$ se puede garantizar que $|\ddot{w}_1| < \delta'_4$ por lo que se puede encontrar un conjunto de constantes $c_{1,2}$, $c_{2,2}$ y $c_{3,2}$ tal que el origen del sistema (11) sea un punto de equilibrio exponencialmente estable, por lo tanto \hat{x}_2 converge a x_2 y w_2 converge a x_3 .

Ahora analizando el caso i . Considere las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\dot{e}_i &= x_{i+1} - c_{1,i}(w_{i-1} - x_i + e_i) - w_i, \\
\dot{w}_i &= c_{2,i}(w_{i-1} - x_i + e_i) + c_{3,i}\text{sign}(w_{i-1} - x_i + e_i),
\end{aligned}$$

defina un nuevo conjunto de variables

$$\begin{aligned}
z_{1,i} &= w_{i-1} - x_i + e_i, \\
z_{2,i} &= \dot{z}_{1,i},
\end{aligned}$$

cuya dinámica está dada por el sistema

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{1,i} &= z_{2,i}, \\
\dot{z}_{2,i} &= \ddot{w}_{i-1} - c_{1,i}z_{2,i} - c_{2,i}z_{1,i} - c_{3,i}\text{sign}(z_{1,i}).
\end{aligned} \tag{12}$$

Como $\ddot{w}_{i-1} \rightarrow \dot{x}_{i+1}$ se puede garantizar que $|\ddot{w}_{i-1}| < \delta'_h$ por lo que se puede encontrar un conjunto de constantes $c_{1,i}$, $c_{2,i}$ y $c_{3,i}$ tal que el origen del sistema (12) sea un punto de equilibrio exponencialmente estable, por lo tanto \hat{x}_i converge a x_i y w_i converge a x_{i+1} .

Finalmente se analiza el caso n . Considere las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\dot{e}_n &= f(x) + g(x)u + \gamma(t) - f(\cdot) - g(\cdot)u \\
&\quad - c_{1,n}(w_{n-1} - x_n + e_n) - w_n, \\
\dot{w}_n &= c_{2,n}(w_{n-1} - x_n + e_n) \\
&\quad + c_{3,n}\text{sign}(w_{n-1} - x_n + e_n),
\end{aligned} \tag{13}$$

por simplicidad se define la función $\phi(\cdot)$ como

$$\phi(\cdot) = f(x) + g(x)u + \gamma(t) - f(\cdot) - g(\cdot)u$$

tal que el sistema (13) puede ser reescrito en la forma

$$\begin{aligned}
\dot{e}_n &= \phi(\cdot) - c_{1,n}(w_{n-1} - x_n + e_n) - w_n, \\
\dot{w}_n &= c_{2,n}(w_{n-1} - x_n + e_n) \\
&\quad + c_{3,n}\text{sign}(w_{n-1} - x_n + e_n).
\end{aligned} \tag{14}$$

Defina un nuevo conjunto de variables

$$\begin{aligned}
z_{1,n} &= w_{n-1} - x_n + e_n, \\
z_{2,n} &= \dot{z}_{1,n},
\end{aligned}$$

cuya dinámica está dada por el sistema

$$\begin{aligned}\dot{z}_{1,n} &= z_{2,n}, \\ \dot{z}_{2,n} &= \ddot{w}_{n-1} - \ddot{x}_n + \dot{\phi}(\cdot) - c_{1,n}z_{2,n} \\ &\quad - c_{2,n}z_{1,n} + c_{3,n}\text{sign}(z_{1,n}).\end{aligned}$$

Puesto que $\ddot{w}_{n-1} \rightarrow \ddot{x}_n$ y $|\dot{\phi}(\cdot)| < \mu$ se puede garantizar que $|\ddot{w}_{n-1} - \ddot{x}_n + \dot{\phi}(\cdot)| < \delta'_{h_n}$ por lo que se puede encontrar un conjunto de constantes $c_{1,n}$, $c_{2,n}$ y $c_{3,n}$ tal que el origen del sistema (12) sea un punto de equilibrio exponencialmente estable, por lo tanto \hat{x}_n converge a x_n y w_n converge a $\phi(\cdot)$.

V. Ilustración del desempeño del observador

En esta sección se ilustra el desempeño del observador a través de dos experimentos. En el primero se implementa el observador y la planta en un sistema dSPACE 1103. El objetivo de este experimento es analizar el comportamiento de cada una de las variables del observador tal que éste coincida con el comportamiento planteado en la teoría.

El segundo experimento consiste en aplicar el observador en una tarea de control de seguimiento de trayectorias en un mecanismo $x - y$.

A. Realización de un observador para un sistema mecánico de 1GDL

Considere un sistema masa resorte amortiguador con un modelo dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -8.3x_1 - 0.332x_2 + 1.66u + \gamma(\cdot), \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

se propone un observador definido por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= c_{11}(x_1 - \hat{x}_1) + w_1, \\ \dot{w}_1 &= c_{21}(x_1 - \hat{x}_1) + c_{31}\text{sign}(x_1 - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -ax_1 - b\hat{x}_2 + cu + c_{12}(w_1 - \hat{x}_2) + w_2, \\ \dot{w}_2 &= c_{22}(w_1 - \hat{x}_2) + c_{32}\text{sign}(w_1 - \hat{x}_2).\end{aligned}$$

En este experimento se considera la perturbación $\gamma(\cdot) = 0.2\sin(t)$, las constantes del observador $c_{11} = 10$, $c_{21} = 2$, $c_{31} = 5$, $c_{12} = 10$, $c_{22} = 1$, $c_{32} = 2$, y una entrada $u = 0.5\sin(t)$. Los resultados se describen a continuación.

En la figura 1 se presenta el funcionamiento de la primera etapa del observador, en donde se puede observar que el error entre la posición medida y la observada es mínimo. La figura 2 muestra que la velocidad observada converge a la velocidad de la planta, lo que implica que la variable w_1 de la primera etapa del observador también converge a x_2 . Aquí el error es un poco mayor debido a los errores probocados por el paso de integración. Finalmente, en la figura 3 se muestra la perturbación estimada y el error entre ésta y la perturbación real. La magnitud de este error es un

poco mayor ya que el efecto de los errores en las etapas anteriores causa una degeneración en las siguientes etapas. Sin embargo, para muchas aplicaciones este error es permisible como se ve en el siguiente experimento.

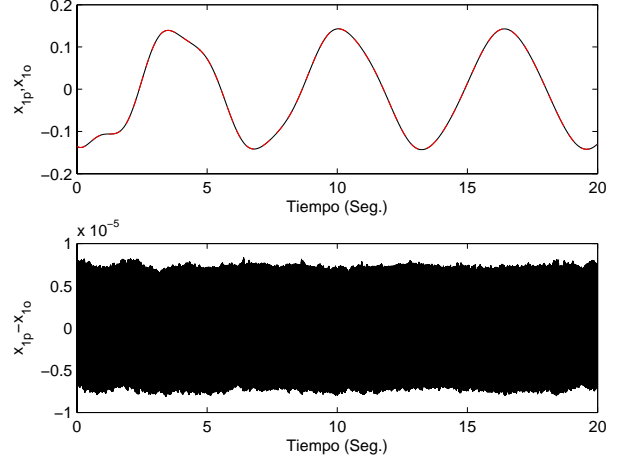


Figura 1. Posición de la planta, posición observada y error entre ellas.

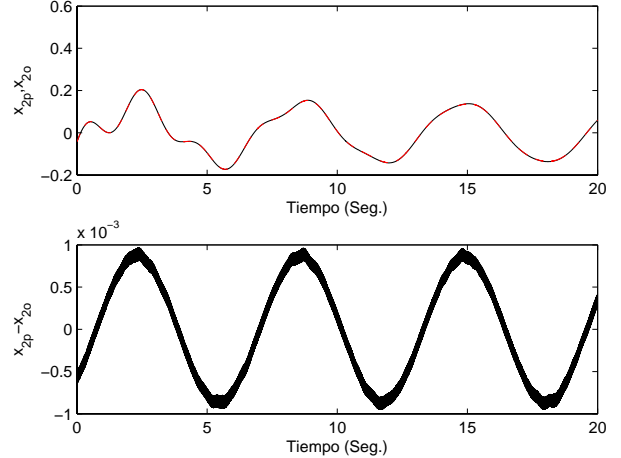


Figura 2. Velocidad de la planta, velocidad observada y error entre ellas.

B. Aplicación a un sistema de control

En esta subsección se presentan los resultados experimentales del uso del observador en el control del mecanismo $x - y$ mostrado en la figura 4; aquí el objetivo de control es seguimiento de trayectorias.

El modelo de cada eje está dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_2 + \frac{k}{m}u + \gamma(\cdot),\end{aligned}$$

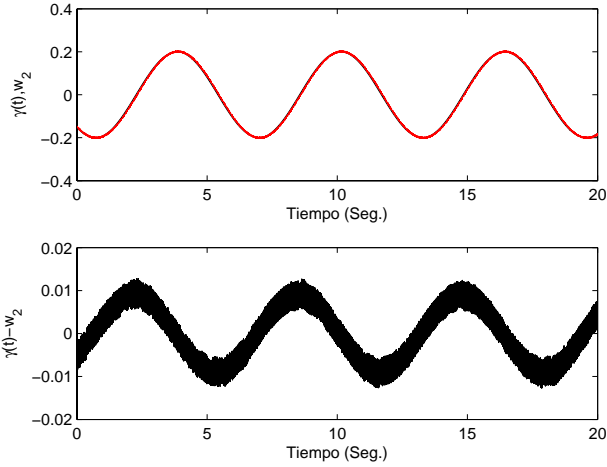


Figura 3. Perturbación, perturbación estimada y error entre ellas.



Figura 4. Mecanismo $x - y$.

donde x_1 es la posición, x_2 es la velocidad, b es el coeficiente de fricción viscosa, m es la masa, k es una ganancia que depende de la etapa de potencia y del motor y $\gamma(\cdot)$ es un término que contiene todas las perturbaciones en el sistema. Es importante mencionar que no se conoce, ni en forma aproximada, ninguno de los parámetros de la planta, lo que complica el diseño de un controlador, además sólo se tiene medición de la posición.

El observador que se propone tiene la forma siguiente

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= c_{11}(x_1 - \hat{x}_1) + w_1, \\ \dot{w}_1 &= c_{21}(x_1 - \hat{x}_1) + c_{31}\text{sign}(x_1 - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\frac{b}{m}\hat{x}_2 + \frac{k}{m}u + c_{12}(w_1 - \hat{x}_2) + w_2, \\ \dot{w}_2 &= c_{22}(w_1 - \hat{x}_2) + c_{32}\text{sign}(w_1 - \hat{x}_2).\end{aligned}$$

Considerando que se desea seguir la referencia $y_{ref}(t)$ con derivadas $\dot{y}_{ref}(t)$ y $\ddot{y}_{ref}(t)$ el control que se propone para cada eje es

$$u = \frac{m}{k} \left(\frac{b}{m}\hat{x}_2 - w_2 + \ddot{y}_{ref}(t) - k_1 e_1 - k_2 e_2 \right),$$

donde $e_1 = x_1 - y_{ref}(t)$ y $e_2 = x_2 - \dot{y}_{ref}(t)$. El controlador fue implementado en un sistema dSPACE

1103 con un paso de integración de $10\mu s$. Los valores nominales de los parámetros del eje x son $b = 40\text{kg/seg}$, $m = 10\text{kg}$, $k = 1.5$. Las constantes del observador son $c_{11} = 10$, $c_{21} = 1$, $c_{31} = 1$, $c_{12} = 5$, $c_{22} = 1$, $c_{32} = 1$, y las ganancias del controlador son $k_1 = 50$ y $k_2 = 5$. Para el eje y : $b = 40\text{kg/seg}$, $m = 10\text{kg}$, $k = 1.5$. Las constantes del observador son $c_{11} = 20$, $c_{21} = 0.5$, $c_{31} = 0.2$, $c_{12} = 10$, $c_{22} = 1$, $c_{32} = 0.2$, y las ganancias del controlador son $k_1 = 5$ y $k_2 = 1$.

En las figuras 5 y 6 se muestra el comportamiento de las posiciones y errores de seguimiento en ambos ejes. La línea punteada gruesa, en todas las gráficas de esta sección, indica el instante en donde se incorpora la variable w_2 en el control. Antes de aplicar la compensación de perturbaciones las salidas (líneas punteadas delgadas) difieren de la referencia (línea continua), las gráficas de error muestran que en este periodo de tiempo los errores son del orden de 2.5cm en el eje x y de 1.0cm para el eje y . Después de compensar las perturbaciones, estos errores disminuyen a 0.4mm en el eje x y a 1mm en el eje y . Las figuras 7 y 8 muestran las perturbaciones estimadas y las señales de control en ambos ejes. Es importante notar que las señales de control no tienen componentes de alta frecuencia, lo que evita el problema de chattering.

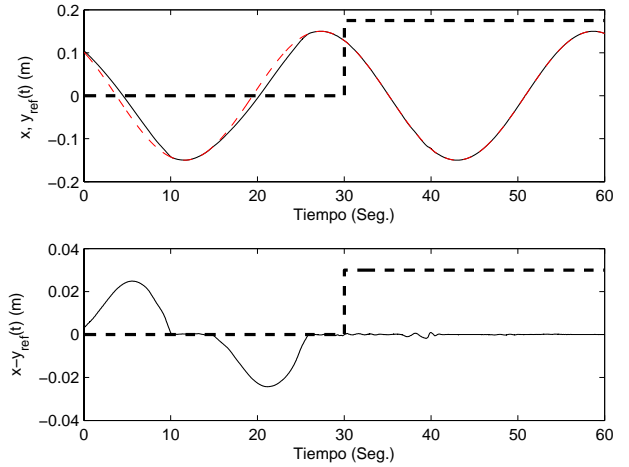


Figura 5. Referencia, posición y error de seguimiento para el eje x .

VI. Conclusiones

El observador que se propone garantiza, en forma analítica, la convergencia al estado de la planta y la identificación de perturbaciones. Su diseño es modular, lo que facilita su implementación y sintonización. Sin embargo, el uso de varias etapas en cascada puede deteriorar el desempeño de las últimas etapas. A pesar de esto, los resultados experimentales se acercan mucho a los obtenidos con otras técnicas más complejas como

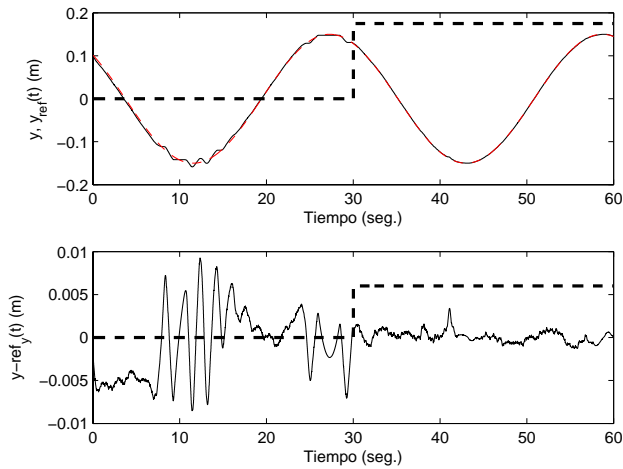


Figura 6. Referencia, posición y error de seguimiento para el eje y .

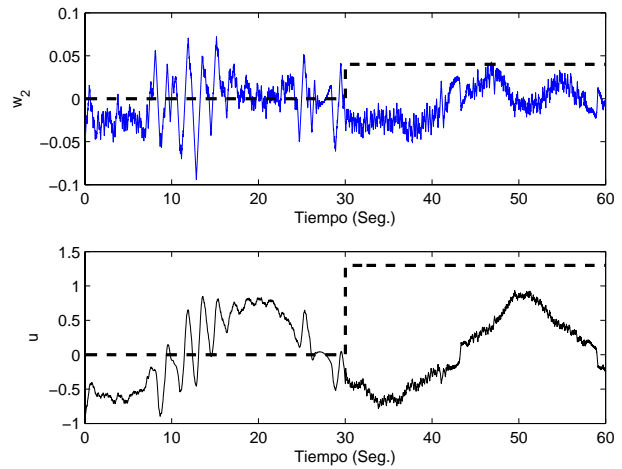


Figura 8. Perturbación estimada y entrada de control para el eje y .

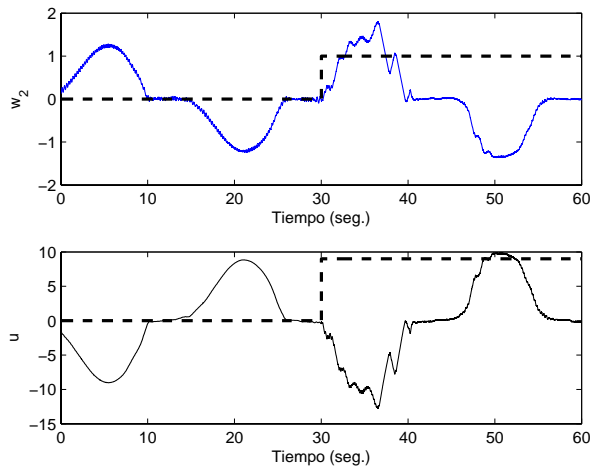


Figura 7. Perturbación estimada y entrada de control para el eje x .

H_∞ y control por modos deslizantes, pero con la ventaja de no necesitar la solución de la ecuación diferencial de Riccati en línea (Isidori y Astolfi, 1992), que es el caso de H_∞ , y de tener una señal de control suave, lo que no se puede hacer con modos deslizantes.

Referencias

Alvarez J., Rosas D y Peña J. "Analog Implementation of a Robust Control Strategy for Mechanical Systems", por aparecer en: IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2009.

Barbot J., Djemai M., y Boukhobza T. Sliding Mode Observers, Chapter 4. En: "Sliding Mode Control in Engineering", Editado por Wilfrid Perruquetti y Jean Pierre Barbot. Marcel Bekker Inc. New York, 2002.

Besancon G. "Nonlinear Observers and Applications", Springer-Verlag, Berlin, 2007.

Branicky M. S., "Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems", IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 43, No. 4, 1998, pp. 979-982.

Davila J., Fridman L. y Levant A. "Second-Order Sliding-Mode Observer for Mechanical Systems". IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 50, No.1, 2005, pp 1785-1789.

Filippov A. F., "Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides", Netherlands, Kluwer, 1998.

Isidori A y Astolfi A., "Disturbance attenuation and H_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems", IEEE Transactions on Automatic Control, vol 37, No. 9, 1992, pp.1283-1293.

Khalil H. K. "Nonlinear systems". Prentice Hall. 3 Ed. New Jersey. 742 pp. 2002

Levant A. "Robust exact differentiation via sliding mode technique", Automatica, vol. 34(3), 1998, pp. 379-384.

Liberzon D., "Switching in Systems and Control", Birkhäuser, Boston, 2003.

Luenberger D. "An introduction to observers", IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. AC-16, 1971, pp 596-602.

Rosas D., Alvarez J. y Fridman L. "Robust observation and identification of n DOF Lagrangian systems". International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2007, 17, pp. 842-861.

Utkin V. I., "Sliding Modes in Control and Optimization", Springer-Verlag, 1992.