

Observación y Estimación en Tiempo Finito de una Clase de Sistemas no Lineales de Fase Mínima

Patricia Rosas*, David Rosas*, Joaquín Alvarez**

*Facultad de Ingeniería, Unidad Mexicali
Universidad Autónoma de Baja California
Mexicali, B.C. México.

**Depto. de Electrónica y Telecomunicaciones
Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada
Ensenada, B.C., México.

Resumen—Se presenta un observador discontinuo que estima, al mismo tiempo, el estado de la planta y las perturbaciones en una clase de sistemas no lineales de fase mínima. El diseño del observador se basa en la técnica de modos deslizantes de alto orden conocida como super-twisting, de esta manera se garantiza la identificación del estado y de las perturbaciones en tiempo finito. Este observador no requiere un filtro adicional para obtener el control equivalente, por lo que no introduce defasamientos considerables en la estimación de las perturbaciones. Se ilustra el desempeño del observador en forma numérica.

Palabras clave: Observadores, modos deslizantes de alto orden, robustez.

I. Introducción

Un problema importante en la realización de técnicas de control basadas en retroalimentación de estado es que frecuentemente éste no está completamente disponible. En algunas situaciones el vector de estado puede ser medido a través de sensores; sin embargo, en algunos otros casos no es posible hacer esta medición debido a dificultades técnicas o por resultar demasiado costoso.

Este problema puede ser resuelto usando observadores de estado, estos sistemas calculan las variables de estado a partir de la entrada y de la salida de la planta. Un esquema frecuentemente usado es el llamado observador de Luenberger, que en un principio fue usado sólo para sistemas lineales (Luenberger, 1971). Actualmente existen varias versiones de este esquema para sistemas no lineales.

El esquema clásico de Luenberger tiene un buen desempeño cuando el modelo de la planta se conoce en forma más o menos exacta. Idealmente, se necesita un modelo exacto para aplicar este esquema, pero si se presentan perturbaciones o incertidumbres paramétricas la estimación de estado puede ser imprecisa y degradar el desempeño del sistema en lazo cerrado.

El problema de observación de estados para sistemas con entradas desconocidas ha sido uno de los más importantes en la teoría de control moderna durante los

últimos años. Para resolver este problema se requiere que el número de entradas desconocidas sea menor que el número de salidas. Sin embargo, se requieren otras condiciones especiales para obtener robustez en tales observadores; ver por ejemplo (Hautus, 1983) y (Zasadzinski, Daurouch y Xu, 1994). Estas condiciones son muy restrictivas porque no pueden ser satisfechas por el mecanismo más simple con entradas desconocidas en donde sólo se conoce la posición. Para resolver este problema en (Rapaport y Gouze, 1999) se propuso un observador adaptivo que asegura convergencia exponencial del error de estimación a una pequeña vecindad del error.

En años recientes han aparecido varios resultados sobre estabilidad de sistemas con estructura variable, ver por ejemplo (Branicky, 1998) y (Liberzon, 2003), donde se muestra que esta clase de sistemas tienen buenas propiedades de convergencia, y al mismo tiempo, muestran buen desempeño ante perturbaciones externas acotadas.

El problema de observación ha sido también activamente desarrollado con la teoría de sistemas con estructura variable, en particular modos deslizantes. Los observadores por modos deslizantes son ampliamente usados debido a sus características atractivas (Barbot, Djemai y Boukhobza, 2002): la robustez ante entradas desconocidas, la posibilidad de usar el control equivalente para la estimación de las entradas desconocidas y la convergencia en tiempo finito. Sin embargo, para sistemas MIMO el proceso de diseño es una tarea difícil.

Por otro lado, en (Levant, 1998) se presenta un derivador con convergencia en tiempo finito basado en el algoritmo conocido como “super-twisting” (Levant, 1993). Con este derivador se puede resolver, en forma teórica, el problema de observación de sistemas que puedan ser llevados a su forma normal, pero no se pueden estimar las perturbaciones en el sistema.

En (Dávila, Fridman y Levant, 2005) se propone un

observador para sistemas mecánicos basado también en el algoritmo super-twisting, el cual garantiza convergencia en tiempo finito al estado de la planta. Otro ejemplo es el observador presentado en (Rosas, Alvarez y Fridman, 2007), el cual también es un observador que presenta un modo deslizante de segundo orden pero que converge exponencialmente al estado de la planta. En ambos trabajos el control equivalente es igual a los términos de perturbación en la planta y puede ser recuperado utilizando un filtro pasa bajas (Utkin, 1992). En (Alvarez, Rosas y Peña, 2009) este principio fue utilizado exitosamente para compensar las perturbaciones y dar robustez al sistema en lazo cerrado, sin embargo, sólo puede aplicarse a sistemas con estructura Lagrangiana y siempre hay un error en la estimación de las perturbaciones debido a un defasamiento introducido por el filtro.

En este trabajo se presenta un observador para sistemas no lineales MIMO de fase mínima, el cual es robusto ante perturbaciones, con amplitud y derivada acotadas, que satisfacen las condiciones de acoplamiento.

El observador se basa en el algoritmo de super-twisting y el diferenciador exacto presentado en (Levant, 1998), pero a diferencia del observador presentado en (Dávila, Fridman y Levant, 2005), se garantiza convergencia a la perturbación en tiempo finito, con lo que evita el uso de un filtro adicional para recuperar el control equivalente. Además, puede aplicarse a una clase más amplia de sistemas dinámicos.

La organización del artículo es la siguiente. En la segunda sección se define la clase de sistemas en los que se puede aplicar el observador propuesto. En la tercera y cuarta sección se presentan la estructura básica, la estructura general y la prueba de estabilidad del observador. Su desempeño es mostrado en la sección cinco por medio de simulaciones numéricas. En la sección seis se presentan los comentarios finales y las conclusiones.

II. Definición de una clase de sistemas no lineales MIMO

Considere el sistema no lineal formado por un conjunto de k subsistemas de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\lambda_i} &= x_{\lambda_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, m-1, \\ \dot{x}_{\lambda_m} &= f_{\lambda}(x) + g_{\lambda}(x)u_{\lambda} + w_{\lambda}(\cdot), \\ y_{\lambda} &= x_{\lambda_1}, \end{aligned} \quad (1)$$

donde el subíndice $\lambda = 1, \dots, k$ identifica a cada subsistema, el vector de estado es $x_{\lambda} = [x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \dots, x_{\lambda_m}]^T \in \mathfrak{R}^m$. y_{λ} es la salida del subsistema λ , $f_{\lambda}(\cdot)$ y $g_{\lambda}(\cdot)$ son funciones suaves cuyo dominio es el vector de estado completo $x = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_{\lambda}^T, \dots, x_k^T]^T$, se asume que la función $g_{\lambda}(\cdot)$ es no singular para todo valor de su argumento. $u_{\lambda} \in \mathfrak{R}$ es la entrada de control y $w_{\lambda}(\cdot)$ es una perturbación, que puede depender de todo el estado

del sistema y del tiempo, desconocida pero acotada; $|w_{\lambda}(\cdot)| \leq \delta_{\lambda}$, $|\dot{w}_{\lambda}(\cdot)| \leq \delta'_{\lambda}$.

El problema es diseñar un observador para estimar el estado x y todas las perturbaciones $w_{\lambda}(\cdot)$ en tiempo finito.

III. Diseño de la estructura básica del observador

Considere el sistema de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + g(x)u, \\ y &= x, \end{aligned} \quad (2)$$

donde $x \in \mathfrak{R}$ es el estado, $f(t, x)$ es una función suave, desconocida, pero acotada $|f(t, x)| < \delta$ y $|\dot{f}(x, t)| < \delta'$ para todo t y x , $g(x)$ es una función conocida y no singular para todo x , $u \in \mathfrak{R}$ es una entrada de control. El problema es diseñar un observador cuyo objetivo es estimar la función $f(x, t)$ en tiempo finito.

Se propone el siguiente observador

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= g(x)u + z + c_1|y - \hat{y}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(y - \hat{y}), \\ \dot{z} &= c_2 \text{sign}(y - \hat{y}), \\ \hat{y} &= \hat{x}. \end{aligned} \quad (3)$$

Las soluciones del sistema (3) se definen en el sentido de Filippov (Filippov, 1998). Para analizar el funcionamiento del observador se define la variable de error entre el estado de la planta y del observador $e = x - \hat{x}$, cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e} &= f(x, t) - z - c_1|e|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e), \\ \dot{z} &= c_2 \text{sign}(e), \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variables $v_1 = e$, $v_2 = f(x, t) - z$, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2 - c_1|v_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(v_1), \\ \dot{v}_2 &= \dot{f}(x, t) - c_2 \text{sign}(v_1). \end{aligned} \quad (4)$$

Ya que $|\dot{f}(x, t)| < \delta'$, se puede aplicar el Teorema 1 propuesto en (Dávila, Fridman y Levant, 2005) y proponer las constantes c_1 y c_2 satisfaciendo las desigualdades

$$\begin{aligned} c_1 &> \sqrt{\frac{2}{c_2 + \delta'} \frac{(c_2 + \delta')(1+p)}{(1-p)}}, \\ c_2 &> \delta', \end{aligned} \quad (5)$$

lo que garantiza que las trayectorias del sistema (4) convergen al origen en tiempo finito.

Esto implica que $x = \hat{x}$ y $z = f(x, t)$, por lo tanto la función desconocida $f(t, x)$ es identificada en tiempo finito.

IV. Observador para el sistema completo

Considere el subsistema λ

$$\begin{aligned}\dot{x}_{\lambda_i} &= x_{\lambda_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, m-1, \\ \dot{x}_{\lambda_m} &= f_\lambda(x) + g_\lambda(x)u_\lambda + w_\lambda(\cdot), \\ y_\lambda &= x_{\lambda_1}.\end{aligned}\quad (6)$$

Se aborda el diseño del observador para el subsistema λ ya que el diseño para el resto de los subsistemas que forman el sistema (1) es similar. Se propone un observador de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_{\lambda_1} &= z_1 + c_{1,1}|x_{\lambda_1} - \hat{x}_{\lambda_1}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_{\lambda_1} - \hat{x}_{\lambda_1}), \\ \dot{z}_1 &= c_{2,1}\text{sign}(x_{\lambda_1} - \hat{x}_{\lambda_1}), \\ \hat{y}_1 &= \hat{x}_{\lambda_1}.\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_{\lambda_i} &= z_i + c_{1,i}|z_{i-1} - \hat{x}_{\lambda_i}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{i-1} - \hat{x}_{\lambda_i}), \\ \dot{z}_i &= c_{2,i}\text{sign}(z_{i-1} - \hat{x}_{\lambda_i}), \quad i = 2, \dots, m-1, \\ \hat{y}_i &= \hat{x}_{\lambda_i}.\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_{\lambda_m} &= f_\lambda(\hat{x}) + g_\lambda(\hat{x})u_\lambda + z_m \\ &+ c_{1,m}|z_{m-1} - \hat{x}_{\lambda_m}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{m-1} - \hat{x}_{\lambda_m}), \\ \dot{z}_m &= c_{2,m}\text{sign}(z_{m-1} - \hat{x}_{\lambda_m}), \\ \hat{y}_m &= \hat{x}_{\lambda_m}.\end{aligned}\quad (9)$$

A. Análisis de estabilidad del observador

Defina las variables de error

$$e_{\lambda_i} = x_{\lambda_i} - \hat{x}_{\lambda_i}, \quad \text{para } i = 1, \dots, m$$

cuya dinámica está dada por el sistema

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\lambda_1} &= x_{\lambda_2} - z_1 - c_{1,1}|e_{\lambda_1}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_{\lambda_1}), \\ \dot{z}_1 &= c_{2,1}\text{sign}(e_{\lambda_1}), \\ \dot{e}_{\lambda_2} &= x_{\lambda_3} - z_2 - c_{1,2}|z_1 - \hat{x}_{\lambda_2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_1 - \hat{x}_{\lambda_2}), \\ \dot{z}_2 &= c_{2,2}\text{sign}(z_1 - \hat{x}_{\lambda_2}), \\ &\vdots \\ \dot{e}_{\lambda_i} &= x_{\lambda_{i+1}} - z_i \\ &- c_{1,i}|z_{i-1} - \hat{x}_{\lambda_i}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{i-1} - \hat{x}_{\lambda_i}), \\ \dot{z}_i &= c_{2,i}\text{sign}(z_{i-1} - \hat{x}_{\lambda_i}), \\ \dot{e}_{\lambda_m} &= f_\lambda(x) + g_\lambda(x)u_\lambda + w_\lambda(\cdot) \\ &- f_\lambda(x, \hat{x}) - g_\lambda(x, \hat{x})u_\lambda \\ &- c_{1,m}|z_{m-1} - \hat{x}_{\lambda_m}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{m-1} - \hat{x}_{\lambda_m}), \\ \dot{z}_m &= c_{2,m}\text{sign}(z_{m-1} - \hat{x}_{\lambda_m}),\end{aligned}\quad (10)$$

El análisis de estabilidad del sistema (10) se realiza por bloques. Como se puede observar, el comportamiento de las variables e_1 y z_1 es independiente del resto de los estados de (10),

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\lambda_1} &= x_{\lambda_2} - z_1 - c_{1,1}|e_{\lambda_1}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_{\lambda_1}), \\ \dot{z}_1 &= c_{2,1}\text{sign}(e_{\lambda_1}).\end{aligned}\quad (11)$$

Se asume que el comportamiento de la planta es acotado y que $|\dot{x}_{\lambda_2}| < \delta'_{\lambda_2}$.

Haciendo el cambio de variables $v_{1,1} = e_{\lambda_1}$ y $v_{1,2} = x_{\lambda_2} - z_1$ el sistema (11) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\dot{v}_{1,1} &= z_{1,2} - c_{1,1}|v_{1,1}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(v_{1,1}), \\ \dot{v}_{1,2} &= \dot{x}_{\lambda_2} - c_{2,1}\text{sign}(v_{1,1}),\end{aligned}$$

eligiendo valores adecuados de las constantes $c_{1,1}$ y $c_{1,2}$ de acuerdo a (5) se puede garantizar la convergencia en tiempo finito al origen de $v_{1,1}$ y $v_{1,2}$, lo que implica que en un tiempo finito $\hat{x}_{\lambda_1} = x_{\lambda_1}$ y $z_1 = x_{\lambda_2}$.

En la siguiente etapa se puede considerar que se cuenta con x_{λ_2} , de esta forma las siguientes dos ecuaciones del sistema (10) pueden reescribirse como

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\lambda_2} &= x_{\lambda_3} - z_2 - c_{1,2}|e_{\lambda_2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_{\lambda_2}), \\ \dot{z}_2 &= c_{2,2}\text{sign}(e_{\lambda_2}).\end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento con este par de ecuaciones se pueden encontrar los valores de las constantes $c_{1,2}$ y $c_{2,2}$ tal que $z_2 = x_{\lambda_3}$ en tiempo finito. Se puede aplicar este análisis hasta la penúltima ecuación del sistema (6). Finalmente se analiza el caso m . Considere las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\lambda_m} &= \phi_\lambda(\cdot) - z_m - c_{1,m}|e_{\lambda_m}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_{\lambda_m}), \\ \dot{z}_m &= c_{2,m}\text{sign}(e_{\lambda_m}),\end{aligned}\quad (12)$$

donde $\phi_\lambda(\cdot)$ se define como

$$\phi_\lambda(\cdot) = f_\lambda(x) + g_\lambda(x)u_\lambda + w_\lambda(\cdot) - f_\lambda(\hat{x}) - g_\lambda(x)u_\lambda,$$

considerando que $|\dot{\phi}_\lambda(\cdot)| < \delta'_{\lambda_\phi}$, se puede garantizar la existencia de constantes $c_{1,m}$, $c_{2,m}$ tal que $\hat{x}_{\lambda_m} = x_{\lambda_m}$ y $z_m = \phi_\lambda(\cdot)$ en tiempo finito.

De esta forma se demuestra que el estado del observador converge al estado de la planta y que se identifican los términos de perturbación en tiempo finito.

V. Diseño de un observador para un péndulo simple

En esta sección se ilustra el procedimiento de diseño del observador y su desempeño a través de simulaciones numéricas.

Considere el modelo del péndulo dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_1 \sin(x_1) - k_2 x_2 + k_3 u + \gamma(\cdot) \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

donde $k_1 = 3.057$, $k_2 = 0.29$, $k_3 = 55.54$, $u = 0.5 \sin(t)$ y $\gamma(\cdot) = 0.5 \sin(t)$. El observador tiene la forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= z_1 + c_{1,1}|x_1 - \hat{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1), \\ \dot{z}_1 &= c_{2,1}\text{sign}(x_1 - \hat{x}_1), \\ \hat{y}_1 &= \hat{x}_1.\end{aligned}\quad (13)$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_2 &= -k_1 \sin(x_1) - k_2 \hat{x}_2 + k_3 u + z_2 \\ &\quad + c_{1,2} |z_1 - \hat{x}_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_1 - \hat{x}_2), \\ \dot{z}_2 &= c_{2,2} \text{sign}(z_1 - \hat{x}_2), \\ \hat{y}_2 &= \hat{x}_2.\end{aligned}$$

se define el error

$$e_1 = x_1 - \hat{x}_1,$$

cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= x_2 - z_1 - c_{1,1} |x_1 - \hat{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{z}_1 &= c_{2,1} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1),\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variables $v_1 = e_1$ y $v_2 = x_2 - z_1$ su dinámica está dada por

$$\begin{aligned}\dot{v}_{1,1} &= v_{2,1} - c_{1,1} |v_{1,1}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(v_{1,1}), \\ \dot{v}_{2,1} &= \dot{x}_{2,1} - c_{2,1} \text{sign}(v_{1,1}),\end{aligned}$$

considerando que para esta entrada la aceleración angular está acotada por $|\dot{x}_2| < 5 \text{rad/seg}^2$ de donde se proponen las constantes $c_{1,1} = 105$ y $c_{2,1} = 10$ basadas en las condiciones (5), de esta forma $v_{1,1}$ y $v_{2,1}$ sean cero en tiempo finito.

Ahora se analiza la siguiente etapa del observador, se define el error

$$e_2 = x_2 - \hat{x}_2,$$

cuya dinámica está dada por el sistema

$$\begin{aligned}\dot{e}_2 &= \gamma(\cdot) - z_2 - c_{1,2} |z_1 - \hat{x}_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_1 - \hat{x}_2), \\ \dot{z}_2 &= c_{2,2} \text{sign}(z_1 - \hat{x}_2),\end{aligned}$$

considerando que $z_1 = x_2$ se tiene

$$\begin{aligned}\dot{e}_2 &= \gamma(\cdot) - z_2 - c_{1,2} |e_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_2), \\ \dot{z}_2 &= c_{2,2} \text{sign}(e_2),\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variables $v_{2,2} = \gamma(\cdot) - z_2$ y $v_{1,2} = e_2$ se tiene

$$\begin{aligned}\dot{v}_{1,2} &= v_{2,2} - c_{1,2} |v_{1,2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(v_{1,2}), \\ \dot{v}_{2,2} &= \dot{\gamma}(\cdot) - c_{2,2} \text{sign}(e_2),\end{aligned}$$

ya que $|\dot{\gamma}(\cdot)| < 0.2$ entonces se propone a $c_{2,2} = 5$ y $c_{1,2} = 60$.

Los resultados de simulaciones numéricas se muestran en las figuras 1, 2 y 3. En la figura 1 se muestra la posición de la planta y la posición observada, así como el error entre ellas. Como se puede ver, la convergencia de la primera etapa del observador es muy rápida.

En la figura 2 se muestra la velocidad de la planta x_2 , la velocidad observada \hat{x}_2 (en la gráfica indicada como x_{2o}) y la variable w_1 . Aquí se puede notar que la variable w_1 , de la primera etapa del observador converge a x_2 , esto es muy importante ya que en la segunda etapa del observador la variable \hat{x}_2 debe converger a w_1 . El funcionamiento de la segunda etapa también es adecuado como se puede observar en las gráficas de error entre \hat{x}_2 y x_2 , y entre la perturbación y la perturbación estimada, ver figura 3.

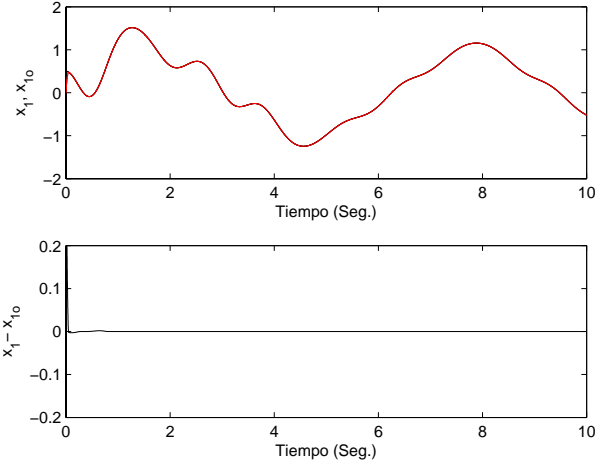


Figura 1. Posición de la planta, posición observada y error de posición entre el observador y la planta.

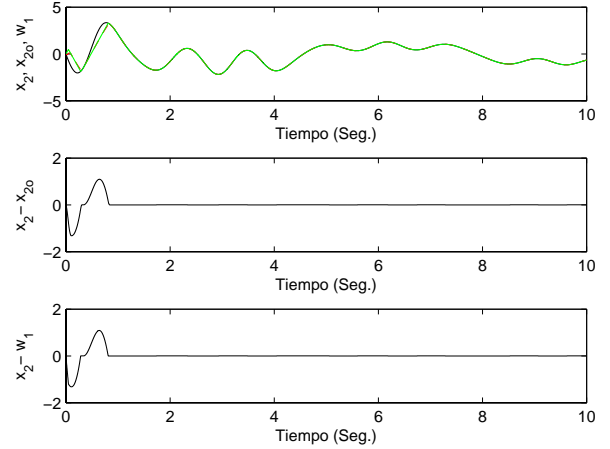


Figura 2. Velocidad de la planta, variable w_1 , velocidad observada y errores de estimación de velocidad en ambas etapas del observador.

VI. Conclusiones

El observador muestra buenas propiedades de robustez ante cierta clase de incertidumbres en la planta y perturbaciones, una de las ventajas teóricas es que se garantiza convergencia en tiempo finito al estado de la planta y a la perturbación. Sin embargo, debido a las no idealidades en la implementación del observador, incluso en la simulación numérica, existen pequeños errores en cada etapa, los cuales se van acumulando y pueden deteriorar el desempeño del observador cuando se aplican muchas etapas en cascada.

Este observador puede ser utilizado en la realización de controladores por retroalimentación de estado, en donde se podrá aplicar el principio de separación, y al mismo tiempo dar robustez al sistema en lazo cerrado

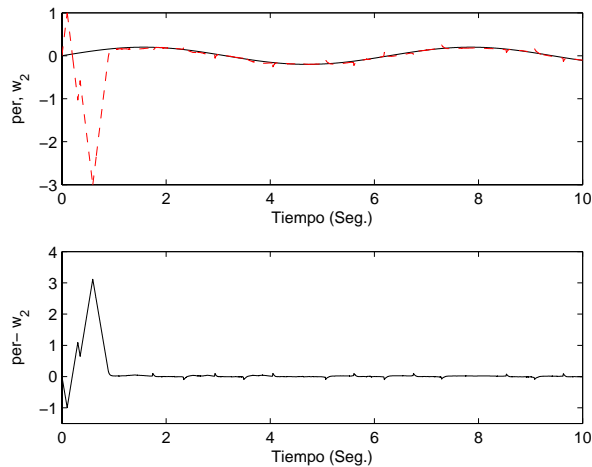


Figura 3. Perturbación, perturbación estimada y error de estimación de perturbación.

a través de la compensación de las perturbaciones estimadas.

Referencias

- Alvarez J., Rosas D y Jonatan P. "Analog Implementation of a Robust Control Strategy for Mechanical Systems", por aparecer en: IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2009.
- Barbot J., Djemai M., y Boukhobza T. Sliding Mode Observers, Capítulo 4. En: Sliding Mode Control in Engineering, Editado por Wilfrid Perruquetti and Jean Pierre Barbot. Marcel Bekker Inc. New York, 2002.
- Branicky M. S., "Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems", IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 43, No. 4, 1998, pp. 979-982.
- Davila J., Fridman L. y Levant A. "Second-Order Sliding-Mode Observer for Mechanical Systems". IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 50, No.1, 2005, pp 1785-1789.
- Filippov A. F., Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides, Dordrecht, Netherlands, Kluwer, 1998.
- Hautus M. "Strong detectability and observers", Linear Algebra and its Applications, vol. 50, 1983, pp. 353-368.
- Levant A. "Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control," International Journal of Control, vol. 58, 1993, pp 1247-1263.
- Levant A. "Robust exact differentiation via sliding mode technique", Automatica, vol. 34(3), 1998, pp 379-384.
- Liberzon D., Switching in Systems and Control, Birkhäuser, Boston, 2003.
- Luenberger D. "An introduction to observers", IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. AC-16, 1971, pp 596-602.
- Rapaport A. y Gouze, J. "Practical observers for uncertain affine output injection systems." in ECC99, 1999.
- Rosas D., Alvarez J. y Fridman L. Robust observation and identification of n DOF Lagrangian systems. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2007, 17, pp. 842-861.
- Utkin V. I., Sliding Modes in Control and Optimization, Springer-Verlag, 1992.
- Zasadzinski M., Daurouch, M. y Xu, S. "Full order observers for linear systems with unknown inputs". IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 39. No. 3, 1994, pp. 606-609.