

Observador Discontinuo de Velocidad para Helicóptero de Tres Grados de Libertad

Yuri Orlov e Iliana M. Meza-Sánchez

CICESE

Carretera Ensenada-Tijuana 3918 Zona Playitas
Ensenada, Baja California 22860
yorlov{marmeza}@cicese.mx
Tel.: (646)1750500 ext. 25320

Luis T. Aguilar

Instituto Politécnico Nacional

Avenida del parque 1310 Mesa de Otay
Tijuana, Baja California 22510
luis.aguilar@ieee.org
Tel.: (664)6231344 ext. 82861, Fax: (664)6231388

Resumen—En este artículo se presenta el diseño de una familia de observadores de velocidad de estructura variable con modos deslizantes aplicado al problema de estabilización de un sistema mecánico subactuado. Se utilizará un helicóptero de tres grados de libertad como base de prueba. Las características de funcionamiento y robustez del sistema en lazo cerrado se ilustrarán a través de simulaciones numéricas que toman en cuenta incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas.

Palabras clave: Observador discontinuo, modos deslizantes, estabilización, helicóptero.

I. INTRODUCCIÓN

El análisis y la síntesis de helicópteros a escala se han convertido en uno de los temas más abordados recientemente (véase (Avila-Vilchis *et al.*, 2003) y referencias en él). De la misma forma, se han realizado diferentes aproximaciones para resolver problemas de estabilización en este tipo de mecanismos. Un trabajo particularmente relevante es que se expone en (Spurgeon *et al.*, 1996), donde se construyó un control por retroalimentación de salida usando el helicóptero como modelo de referencia a través de un controlador y un observador por modos deslizantes. Otros esfuerzos como el de (Oh y Khalil, 1997) logra combinar controladores de estructura variable con un observador de alta ganancia para resolver el problema de control de seguimiento de sistemas no lineales con dinámica cero estable.

Uno de los principales problemas para el desarrollo de controladores corresponde a la necesidad de tener disponibles mediciones de todas las variables de estado del sistema; en la práctica, este requisito limita su implementación y utilidad. Además, es común que las mediciones posibles del sistema se encuentren corrompidas por ruido proveniente de los sensores sumado a las perturbaciones a las que se encuentra sometido físicamente el sistema. Este aspecto fundamental para la implementación de controladores ha motivado el desarrollo de observadores. Dentro de la gama de técnicas aplicadas al diseño de observadores, sobresalen aquellos basados en modos deslizantes. Esto se debe principalmente a que presentan propiedades de robustez en presencia de perturbaciones, convergencia en tiempo finito y la posibilidad de realizar estimaciones de

incertidumbre paramétricas (Davila *et al.*, 2005). Existen varias contribuciones dentro de esta línea de investigación. Por ejemplo, en (Drakunov y Utkin, 1995) se presentan algunas pautas que fundamentaron el desarrollo de observadores basados en modos deslizantes. En (M'Sirdi *et al.*, 2008) se propone un observador con modos deslizantes de segundo orden para la estimación de parámetros.

En el presente trabajo se presenta la síntesis por modos deslizantes para la estabilización alrededor de una posición deseada aplicado a un prototipo de helicóptero de tres grados de libertad, fabricado por la compañía Quanser. Con el propósito de satisfacer los requerimientos prácticos de retroalimentación, se propone el diseño de observadores discontinuos de velocidad basados en modos deslizantes de primer orden que simplifiquen el desarrollo de controladores.

El artículo está organizado de la siguiente manera. En la Sección II se introduce el enunciado del problema y el modelo dinámico del prototipo. En la Sección III se presenta el diseño de los observadores discontinuos de velocidad. Los controladores con retroalimentación de salida se presentan en la Sección IV. Las propiedades del funcionamiento y robustez del sistema en lazo cerrado se ilustran a través de resultados de simulación en la Sección V. Finalmente, la Sección VI presenta algunas conclusiones.

II. MODELO DINÁMICO Y ENUNCIADO DEL PROBLEMA

El modelo dinámico de un helicóptero de laboratorio de 3-GDL tomado del manual de usuario (Quanser, n.d.) está dado por

$$J_e \ddot{\theta} = K_f(V_f + V_b)L_b - F_g L_b + w_e \quad (1)$$

$$J_d \ddot{\phi} = K_f(V_f - V_b)L_h + w_d \quad (2)$$

$$J_t \ddot{\psi} = -K_p \sin(\phi)L_b + w_t. \quad (3)$$

De las ecuaciones anteriores, $\theta(t) \in \mathbb{R}$ es el ángulo de elevación, $\phi(t) \in \mathbb{R}$ es el ángulo de dirección, y $\psi(t) \in \mathbb{R}$ es el ángulo de rotación, J_e es el momento de inercia del sistema alrededor del eje de elevación, J_d es el momento de inercia del helicóptero sobre el eje de cabeceo o dirección, J_t es el momento de inercia alrededor del eje de rotación, y las variables manipulables que se

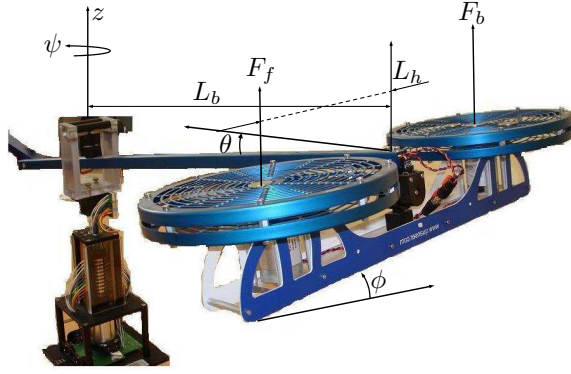


Figura 1. Helicóptero prototipo de 3-GDL.

usan para el control son el voltaje de armadura del motor de corriente directa frontal y de cola denotados como $V_f(t)$ y $V_b(t)$, respectivamente; $w_e(t)$, $w_d(t)$, $w_t(t)$ representan a las perturbaciones externas que afectan al sistema; K_f es la constante de fuerza de la combinación del motor/propela, L_b es la distancia del punto pivote al cuerpo del helicóptero, F_g es la fuerza gravitacional, L_h es la distancia del eje de cabeceo a ambos motores, y K_p es la fuerza requerida para mantener el helicóptero en vuelo.

La variable de movimiento ψ corresponde a la rotación del sistema completo alrededor del eje vertical z . La elevación θ se define como el movimiento del cuerpo del helicóptero, que corresponde al desplazamiento angular del brazo de sustentación principal con respecto al eje horizontal y . El movimiento de cabeceo ϕ corresponde al cambio de altitud del cuerpo del helicóptero. La inercia del modelo del sistema se simplifica a puntos de masas asociados a los dos motores y su contrapeso; de manera adicional, los efectos de fricción y aerodinámicos serán despreciados. La fuerza generada por cada motor de propela se asume que es normal al plano de la propela.

Con el fin de descomponer el sistema subactuado de 3-GDL (1)–(3) en dos subsistemas, actuados de manera independiente, se introducen las entradas de control $u_1 = V_f + V_b$ y $u_2 = V_f - V_b$. Entonces, definiendo $\theta_1 = \theta$, $\theta_2 = \dot{\theta}$, $\phi_1 = \phi$, $\phi_2 = \dot{\phi}$, $\psi_1 = \psi$, $\psi_2 = \dot{\psi}$, y $a = K_f L_b J_e^{-1}$, $b = L_b F_g J_e^{-1}$, $c = K_f L_h J_d^{-1}$, $d = K_p L_b J_t^{-1}$, el sistema (1)–(3) toma la forma

$$\dot{\theta}_1 = \theta_2, \quad \dot{\theta}_2 = -b + au_1 + w_1 \quad (4)$$

$$\dot{\phi}_1 = \phi_2, \quad \dot{\phi}_2 = cu_2 + w_2 \quad (5)$$

$$\dot{\psi}_1 = \psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = -d \sin(\phi_1) + w_3 \quad (6)$$

donde $w_1(t) = J_e^{-1} w_e(t)$, $w_2(t) = J_d^{-1} w_d(t)$, y $w_3(t) = J_t^{-1} w_t(t)$. Este sistema (4)–(6) posee una dinámica cero estable.

Por cuestiones prácticas de aplicación, se asume que las mediciones de las posiciones $\theta_1(t)$, $\phi_1(t)$, $\psi_1(t)$ son la única información disponible del sistema. El problema consiste en diseñar observadores de velocidad apropiados de la dinámica no lineal del modelo del helicóptero, que

retroalimentarán el sistema en lazo cerrado, que permitan la síntesis de la dinámica de salida.

III. DISEÑO DE OBSERVADORES DISCONTINUOS

Se proponen observadores discontinuos de velocidad que correrán en paralelo a los controladores por modos deslizantes para constituir la síntesis de la dinámica de salida del sistema (4)–(6).

A. Diseño de Observador de Velocidad de Elevación

El observador de estructura variable que se propone para el estado θ , correspondiente al ángulo de elevación, está definido por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_1 &= \hat{\theta}_2 + \mu_\theta \text{sign}(\theta_1 - \hat{\theta}_1) \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= -b + au_1 + \nu_\theta \text{sign}(\theta_1 - \hat{\theta}_1), \end{aligned} \quad (7)$$

con parámetros $\mu_\theta, \nu_\theta > 0$. La dinámica de los errores de observación $e_1 = \theta_1 - \hat{\theta}_1$, $e_2 = \theta_2 - \hat{\theta}_2$ están descritas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 - \mu_\theta \text{sign} e_1, \\ \dot{e}_2 &= -\nu_\theta \text{sign} e_1 + w_1, \end{aligned} \quad (8)$$

con lado derecho discontinuo. De manera subsecuente, se muestra que estas ecuaciones parecen ser interna y asintóticamente estables. Además, en presencia de perturbaciones externas w_1 con magnitud superiormente acotada $M_1 > 0$, se demuestra que los errores de observación decaen de forma asintótica al segmento

$$S_\theta = \{(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2 : e_1 = 0, |e_2| \leq \frac{\mu_\theta M_1}{\nu_\theta}\} \quad (9)$$

con un dominio de atracción

$$D_\theta = \{(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2 : |e_2| < \frac{\mu_\theta \nu_\theta}{M_1}\}, \quad (10)$$

condicionado a que

$$\nu_\theta > \max\{M_1, \mu_\theta M_1\}. \quad (11)$$

Teorema 1: Considérese que la dinámica de los errores de observación (8), sujetos a la subordinación de parámetros (11) para alguna $M_1 > 0$, parecen ser internamente estables en forma asintótica y global. Estas dinámicas llegan al intervalo $I_{\mu_\theta} = \{(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2 : e_1 = 0, |e_2| < \mu_\theta\}$ en tiempo finito cuando son inicializadas dentro del dominio (10) y en presencia de perturbaciones externas admisibles w_1 de magnitud menor ó igual a M_1 . Posteriormente, aparecen modos deslizantes dentro del intervalo S_{μ_θ} a lo largo del eje vertical y decaen al segmento empotrado (9) cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración: Primero, nótese que para el sistema discontinuo del error (8), la condición

$$e_1 \dot{e}_1 = e_1(e_2 - \mu_\theta \text{sign} e_1) \leq -|e_1|(\mu_\theta - |e_2|) < 0$$

garantiza la existencia de modos deslizantes para todo $e_1 \neq 0$ y $|e_2| < \mu_\theta$.

A continuación, considérese la función candidata de Lyapunov $V(e_1, e_2) = \nu_\theta |e_1| + \frac{1}{2} e_2^2$. Calculando la derivada temporal de esta función a lo largo de las trayectorias del sistema no perturbado (8), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \nu_\theta \text{sign} e_1 (e_2 - \mu_\theta \text{sign} e_1) - e_2 \nu_\theta \text{sign} e_1 \\ &= -\mu_\theta \nu_\theta < 0, \end{aligned} \quad (12)$$

la cual es válida para toda la función excepto en el eje vertical $e_1 = 0$ donde $V(e_1, e_2)$ no es diferenciable. Aparentemente, la desigualdad (12) asegura que las trayectorias llega al intervalo de modo deslizante I_{μ_θ} en tiempo finito; de otra manera, dichas trayectorias se dirigirán al origen y llegarán en tiempo finito. Dado que los modos deslizantes en el intervalo I_{μ_θ} se gobiernan por la ecuación estable en forma asintótica

$$\dot{e}_2 = -\frac{\nu_\theta}{\mu_\theta} e_2, \quad (13)$$

esto origina que la dinámica del error (8) sea internamente estable en forma global.

Para conveniencia del lector, se recuerda que la ecuación por modos deslizantes (13) se deriva de acuerdo al método del control equivalente (Utkin, 1992), a través de la sustitución del valor equivalente $\text{sign}_{eq} e_1$ de la función conmutada $\text{sign} e_1$. Esto garantiza la identidad $\dot{e}_1 = 0$ a lo largo de los modos deslizantes en la segunda ecuación del sistema no perturbado (8) para $\text{sign} e_1$. De hecho, el valor equivalente representa la solución de la ecuación algebraica $e_2 - \mu_\theta \text{sign} e_1 = 0$ con respecto a $\text{sign} e_1$ y por lo tanto, $\text{sign}_{eq} e_1 = \mu_\theta^{-1} e_2$.

En consecuencia, para la dinámica perturbada (8), la relación (12) se modifica a

$$\dot{V} = -\mu_\theta \nu_\theta + e_2 w_1 \leq -\mu_\theta \nu_\theta + M_1 |e_2|, \quad (14)$$

y para las trayectorias, inicializadas dentro del dominio (10), permanece negativo definido. Así, junto con la dinámica interna, las trayectorias del sistema perturbado (8) llegan al intervalo de modos deslizantes I_{μ_θ} en tiempo finito $T_{w_1} > 0$, el cual depende de las perturbaciones w_1 . Las soluciones de la ecuaciones con modos deslizantes en presencia de perturbaciones

$$\dot{e}_2 = -\frac{\nu_\theta}{\mu_\theta} e_2 + w_1 \quad (15)$$

están dadas por

$$e_2(t) = e^{-(t-T_{w_1})} e_2(T_{w_1}) + \int_{T_{w_1}}^t e^{-(t-\tau)} w_1(\tau) d\tau,$$

y tomando en consideración la cota superior M_1 en la magnitud de las perturbaciones admisibles w_1 , estas soluciones se aproximan al segmento (9) cuando $t \rightarrow \infty$. ■

Con el fin de interpretar el resultado anterior en términos del observador de velocidad (7), se introduce el siguiente concepto.

Definición 1: Considérese el sistema dinámico de segundo orden

$$\ddot{\eta} = f(\eta, \dot{\eta}) \quad (16)$$

y un sistema dinámico de la forma

$$\dot{\hat{\eta}}_1 = f_1(\eta, \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2), \quad \dot{\hat{\eta}}_2 = f_2(\eta, \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \quad (17)$$

con variables de estado escalares $\eta(t)$ y $\dot{\eta}(t)$ y de manera respectiva, $\hat{\eta}_1(t)$ y $\hat{\eta}_2(t)$ poseen soluciones en el sentido de Filippov para condiciones iniciales arbitrarias. Se dice que el sistema (17) constituye un observador asintótico de velocidad del sistema (16) con un dominio de atracción $D \subset \mathbb{R}^2$ de errores de observación inicial y una precisión $\epsilon > 0$ si y solo si

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{\tau \geq t} |\eta(\tau) - \hat{\eta}_1(\tau)| \leq \epsilon, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{\tau \geq t} |\dot{\eta}(\tau) - \hat{\eta}_2(\tau)| \leq \epsilon \quad (18)$$

para todas las soluciones en el sentido de Filippov $(\eta, \dot{\eta})$ y $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)$ de (16) y (17) tales que los errores de observación iniciales $(\eta(0) - \hat{\eta}_1(0), \dot{\eta}(0) - \hat{\eta}_2(0))$ están en D .

Basados en la Definición 1, el Teorema 3 se reformula como sigue.

Teorema 2: Considérese el observador de velocidad de estructura variable (7) de la dinámica de elevación (4). Sea $M_1 > 0$, una cota superior de la magnitud de la perturbación externa $w_1(t)$ que afecta a (4), conocida a priori. Entonces bajo la condición (11), impuesta en los parámetros μ_θ, ν_θ del observador, (7) representa un observador de velocidad asintótico de precisión $\frac{\mu_\theta M_1}{\nu_\theta}$, donde (10) corresponde al dominio de atracción de los errores de estimación iniciales $e_1(0) = \theta_1(0) - \hat{\theta}_1(0)$, $e_2(0) = \theta_2(0) - \hat{\theta}_2(0)$. Además, (7) es un observador asintótico global del sistema no perturbado (4).

B. Observador Semiglobal para Dirección-Rotación

De manera similar al observador de elevación (7), se diseña una familia de observadores de velocidad de estructura variable para el subsistema dirección-rotación

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\phi}}_1 &= \hat{\phi}_2 + \mu_\phi \text{sign}(\phi_1 - \hat{\phi}_1) \\ \dot{\hat{\phi}}_2 &= c u_2 + \nu_\phi \text{sign}(\phi_1 - \hat{\phi}_1), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\psi}}_1 &= \hat{\psi}_2 + \mu_\psi \text{sign}(\psi_1 - \hat{\psi}_1) \\ \dot{\hat{\psi}}_2 &= -d \sin(\phi_1) + \nu_\psi \text{sign}(\psi_1 - \hat{\psi}_1), \end{aligned} \quad (20)$$

con parámetros $\mu_\phi, \nu_\phi, \mu_\psi, \nu_\psi > 0$.

Los errores de observación $\phi_i - \hat{\phi}_i, \psi_i - \hat{\psi}_i$, $i = 1, 2$ parecen decaer en forma asintótica a los segmentos

$$\begin{aligned} S_\phi &= \{(\phi_1 - \hat{\phi}_1, \phi_2 - \hat{\phi}_2) \in \mathbb{R}^2 : \\ &\quad \phi_1 = \hat{\phi}_1, |\phi_2 - \hat{\phi}_2| \leq \frac{\mu_\phi M_2}{\nu_\phi}\} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} S_\psi &= \{(\psi_1 - \hat{\psi}_1, \psi_2 - \hat{\psi}_2) \in \mathbb{R}^2 : \\ &\quad \psi_1 = \hat{\psi}_1, |\psi_2 - \hat{\psi}_2| \leq \frac{\mu_\psi M_3}{\nu_\psi}\} \end{aligned} \quad (22)$$

con dominios de atracción

$$D_\phi = \{(\phi_1 - \hat{\phi}_1, \phi_2 - \hat{\phi}_2) \in \mathbb{R}^2 : |\phi_2 - \hat{\phi}_2| < \frac{\mu_\phi \nu_\phi}{M_2}\}, \quad (23)$$

$$D_\psi = \{(\psi_1 - \hat{\psi}_1, \psi_2 - \hat{\psi}_2) \in \mathbb{R}^2 : |\psi_2 - \hat{\psi}_2| < \frac{\mu_\psi \nu_\psi}{M_3}\}, \quad (24)$$

a condición de que

$$\nu_\phi > \max\{M_2, \mu_\phi M_2\}, \quad \nu_\psi > \max\{M_3, \mu_\psi M_3\}. \quad (25)$$

Teorema 3: Considérense los observadores de velocidad de estructura variable (19) y (20) de las dinámicas de dirección y rotación (5) y (6). Sean $M_2 > 0$ y $M_3 > 0$, las cotas superiores de las magnitudes de las perturbaciones externas $w_2(t)$ y $w_3(t)$ que afectan a los sistemas (19) y (20), conocidas a priori. Entonces, bajo las condiciones (25), impuestas en los parámetros $\mu_\phi, \nu_\phi, \mu_\psi, \nu_\psi$ de los observadores, las dinámicas de los sistemas (19) y (20) representan observadores de velocidad asintóticos de dirección y rotación, con una precisión $\frac{\mu_\phi M_2}{\nu_\phi}$ y $\frac{\mu_\psi M_3}{\nu_\psi}$, respectivamente; estos observadores poseen dominios de atracción (23) y (24) de los errores de estimación iniciales $\phi_i(0) - \hat{\phi}_i(0), \psi_i(0) - \hat{\psi}_i(0)$, $i = 1, 2$. Además, (19) y (20) son observadores asintóticos globales del sistema no perturbado (5) y (6).

Demostración: La línea de razonamiento usado para establecer la validación del Teorema 4 se aplica también aquí. Los detalles de la prueba del Teorema 5 entonces se omiten. ■

IV. DISEÑO DE CONTROLADOR

Se proponen controladores $u \in \mathbb{R}^2$ de tal modo que θ_i, ϕ_i, ψ_i , $i = 1, 2$ tiendan a cero en forma asintótica y también atenúen los efectos de las perturbaciones externas. Aparentemente, las ecuaciones (4), que describen la dinámica de elevación, constituyen un subsistema independiente al formado por el subsistema de dirección-rotación descrito por (5)-(6). Por tal motivo, se presentan dos desarrollos independientes propuestos en (Orlov, 2009) para el control de ambos subsistemas.

A. Control por Modos Deslizantes de Segundo Orden para el Eje de Elevación

Considerando que el ángulo de elevación θ_1 y la velocidad angular θ_2 se pueden medir, el controlador de elevación por modos deslizantes de segundo orden propuesto es el siguiente

$$u_1 = \frac{1}{a}[b - h\theta_1 - p\theta_2 - \alpha \text{sign}(\theta_1) - \beta \text{sign}(\theta_2)]. \quad (26)$$

Con esta ley de control, el sistema de lazo cerrado (4), (26) será estable en forma global y en tiempo finito siempre y cuando las ganancias de los parámetros sean

$$h, p \geq 0, \quad \alpha - M_1 > \beta > M_1 \quad (27)$$

para cualquier $M_1 > 0$. Por otra parte, la estabilidad se conserva sin importar cualquier disturbio externo w_1 de magnitud acotada

$$\sup_t |w_1(t)| \leq M_1 \quad (28)$$

que afecte al sistema.

Teorema 4: Considérese el sistema perturbado (4) conducido por el controlador (26) sujeto a los parámetros (27) con alguna constante positiva $M_1 > 0$. Entonces, el sistema de lazo cerrado (4), (26) es estable en forma global y en tiempo finito, sujeto a que las perturbaciones externas $w_1(t)$ satisfacen la restricción en la cota superior (28) para alguna constante M_1 .

Demostración: Sustituyendo (26) en (4), el sistema de lazo cerrado toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 &= -h\theta_1 - p\theta_2 - \alpha \text{sign}(\theta_1) - \beta \text{sign}(\theta_2) + w_1, \end{aligned} \quad (29)$$

y aplicando el Teorema 4.4 de (Orlov, 2009) al sistema (29) bajo las condiciones (27), (28), se valida el Teorema 4. ■

B. Control por Modos Deslizantes para los Ejes de Dirección y Rotación

El siguiente objetivo es estabilizar en forma asintótica el subsistema subactuado (5), (6), mientras que se atenúen las perturbaciones externas w_2, w_3 .

La estrategia de control consiste en dos pasos. Primero, la salida del sistema en cuestión se especifica de tal manera que la dinámica cero no perturbada correspondiente sea estable en forma asintótica y global mientras que la influencia de las perturbaciones externas en la dinámica cero será atenuada gracias a la selección apropiada de la salida del sistema. A continuación, se construye una entrada u_2 que lleve de manera local el sistema a la variedad de la dinámica cero en tiempo finito a pesar de las perturbaciones externas.

Considérese la siguiente superficie

$$s(\phi_1, \psi_1, \psi_2) = d \sin(\phi_1) - c_1 \psi_1 - c_2 \psi_2 \quad (30)$$

con constantes positivas c_1 y c_2 que permiten imponer las propiedades deseadas en la dinámica cero. Aparentemente, mientras que la variable de rotación se encuentre en la variedad $s = 0$, su dinámica estará gobernada por el sistema

$$\dot{\psi}_1 = \psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = -c_1 \psi_1 - c_2 \psi_2 + w_3, \quad (31)$$

el cual es internamente estable en forma asintótica; las perturbaciones w_3 son atenuadas gracias a una selección apropiada de las ganancias c_1 y c_2 (véase (Doyle *et al.*, 1989) para detalles). Para asegurar que se alcance la variedad (30) en tiempo finito, se propone la siguiente entrada de control

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{c \cos(\phi_1)} [\sin(\phi_1) \phi_2^2 - c_1 \sin(\phi_1) - c_2 \cos(\phi_1) \phi_2 \\ &\quad - \alpha_1 \text{sign}(s) - \beta_1 \text{sign}(\dot{s}) - h_1 s - p_1 \dot{s}] \end{aligned} \quad (32)$$

con parámetros positivos $\alpha_1, \beta_1, h_1, p_1$. Obsérvese que, debido a la pérdida de controlabilidad del cuerpo del

helicóptero en $\phi_1 = \pm \frac{\pi}{2}$, la dinámica de cabeceo no será permitida en esos puntos de singularidad y es por eso que el ángulo de dirección se tratará en forma local. La idea detrás de la síntesis propuesta es traer la proyección del sistema en lazo cerrado (5), (6), (32) al subespacio conformado por la salida s , a la forma cuasihomogénea

$$\ddot{s} = -d[\alpha_1 \text{sign}(s) + \beta_1 \text{sign}(\dot{s}) + h_1 s + p_1 \dot{s}] + w \quad (33)$$

donde se asume que la perturbación externa $w_3(t)$ que afecta a la dinámica de rotación es diferenciable y se ha aplicado la siguiente notación $w = d \cos(\phi_1)w_2 - c_1 w_3 - c_2 \dot{w}_3$. Por el Teorema 4.4 de (Orlov, 2009), la ecuación (33) parece ser equiuniforme en forma global (en w) y estable en tiempo finito satisfaciendo $\sup_t |w(t)| \leq M$ para cualquier constante $M > 0$ y cumpliendo con

$$h_1, p_1 \geq 0, d\alpha_1 - M > d\beta_1 > M, \quad (34)$$

para los parámetros del controlador. Asumiendo que las magnitudes de las perturbaciones externas $w_2(t)$ y $w_3(t)$ y que la derivada temporal $w_4(t) = \dot{w}_3(t)$ estén superiormente acotadas

$$\sup_t |w_i(t)| \leq M_i, \quad i = 2, 3, 4 \quad (35)$$

por cualquier constante positiva M_2, M_3, M_4 , se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 5: Considérese el sistema de lazo cerrado (5), (6), (32) con la subordinación de parámetros (34) y con la consideración (35) en las perturbaciones externas. Considérese que se satisfacen las condiciones (34) con $M = dM_2 + c_1 M_3 + c_2 M_4$; entonces el sistema en lazo cerrado es llevado a la variedad de la dinámica cero (30) en tiempo finito, y su dinámica posterior está gobernada por la ecuación de modo deslizante (31). Además, la dinámica interna del sistema en lazo cerrado (5), (6), (32) es asintóticamente estable en forma local.

Demostración: Dado que la proyección (5), (6), (32) en el subespacio de la salida s , se describe localmente por la ecuación (33) y bajo las condiciones del teorema, esta ecuación es equiuniformemente estable en tiempo finito de acuerdo al Teorema 4.4 (Orlov, 2009), el sistema en lazo cerrado, iniciando desde un instante de tiempo finito $T > 0$, evoluciona a la variedad de la dinámica cero (30). Así, para $t \geq T$, el sistema (5), (6), (32) está gobernado por la ecuación con modos deslizantes (31), la cual es internamente estable en forma asintótica. El sistema de lazo cerrado es interno y asintóticamente estable debido a la estabilidad en tiempo finito de la primer etapa que precedió a los modos deslizantes, y gracias a que la última etapa está bien definida. ■

Observación 1: Dado que los parámetros c_1 y c_2 , que determinan la variedad de la dinámica cero (30), puede ser asignado arbitrariamente grande, la influencia de las perturbaciones externas en la superficie de deslizamiento (31) está atenuado a un nivel tan bajo como se desee bajo la selección adecuada de parámetros.

TABLA I

PARÁMETROS DEL HELICÓPTERO DE 3-GDL

Notación	Valor	Unidades
L_b	0.66	m
L_h	0.177	m
J_e	0.91	$kg \cdot m^2$
J_d	0.0364	$kg \cdot m^2$
J_t	0.91	$kg \cdot m^2$
K_f	0.5	N/V
K_p	0.686	N
F_g	0.686	N

C. Síntesis de la Retroalimentación de Salida

A través de la sustitución de las salidas $\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_2$ de los observadores de velocidad propuestos en la ley de retroalimentación de estados (26), (32) por las variables de estado θ_2, ϕ_2, ψ_2 , se obtienen los controladores

$$u_1 = \frac{1}{a}[b - h\theta_1 - p\hat{\theta}_2 - \alpha \text{sign}(\theta_1) - \beta \text{sign}(\hat{\theta}_2)] \quad (36)$$

$$u_2 = \frac{1}{c \cos(\phi_1)}[\sin(\phi_1)\hat{\phi}_2^2 - c_1 \sin(\phi_1) - c_2 \cos(\phi_1)\hat{\phi}_2 - \alpha_1 \text{sign}(\hat{s}) - \beta_1 \text{sign}(\dot{\hat{s}}) - h_1 \hat{s} - p_1 \dot{\hat{s}}] \quad (37)$$

En la síntesis anterior, $\hat{s} = d \sin(\phi_1) - c_1 \psi_1 - c_2 \hat{\psi}_2$ es equivalente a $s(\phi_1, \psi_1, \hat{\psi}_2)$ y s , que están definidos por (30).

El análisis de estabilidad del sistema de lazo cerrado (4)–(6), (7), (19), (20), conducido por los controladores de retroalimentación de salida (36), (37) y operando bajo condiciones de incertidumbre se omite por razones de espacio, sin embargo éstas combinan detalles de la prueba de los Teoremas 1 a 5.

V. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Características de funcionamiento de controlador por modos deslizantes con retroalimentación de salida son probados a través de un estudio de simulación llevada a cabo con SIMULINK. En la Tabla I se presentan los parámetros del helicóptero, tomados del manual del helicóptero de 3-GDL de Quanser.

Las condiciones iniciales para el helicóptero fueron $\theta_1(0) = \phi_1(0) = \psi_1 = 0.8$ [rad], mientras que las condiciones iniciales para la velocidad fueron $\dot{\theta}(0) = \dot{\phi}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$ [rad/s].

Se simularon dos situaciones, una para el caso no perturbado y otra para el sistema afectado por perturbaciones armónicas $w_1 = w_2 = 0.5 \cos 40t$ [rad/s²], $w_3 = 0.2 \cos 50t$ [rad/s²]. En las simulaciones, las ganancias del controlador en (26) y (32) fueron sintonizadas a $\alpha = 4$, $\beta = 3.5$, $h = 10$, $p = 5$, $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 1$, $h_1 = 0$, $p_1 = 0$, $c_1 = 2$ y $c_2 = 3$.

De manera adicional, las condiciones iniciales para el observador de velocidad no lineal fueron ajustadas a $\hat{\theta}(0) = \hat{\phi}(0) = \hat{\psi}(0) = 0$ [rad] y $\dot{\hat{\theta}}(0) = \dot{\hat{\phi}}(0) = \dot{\hat{\psi}}(0) = 0$ [rad/s].

Los resultados de simulación usando el controlador de posición por modos deslizantes (26) y (32) y aplicando los observadores de velocidad propuestos (7) y (20), se

muestran en las figuras 2 para el caso no perturbado. De la misma forma, las figuras 3 y 4 ilustran el caso con perturbaciones armónicas. Es posible observar la estabilización asintótica del sistema aplicando una retroalimentación con las velocidades estimadas de los observadores y el error de observación. Asimismo, de acuerdo a lo establecido en el análisis teórico presentado, se observa la atenuación de las perturbaciones externas.

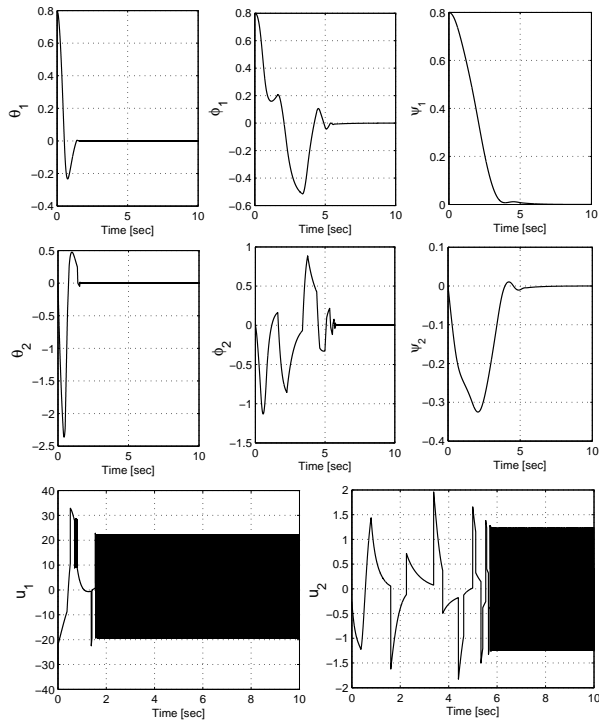


Figura 2. Estabilización del helicóptero para el caso no perturbado.

VI. CONCLUSIONES

Se propone el marco general para resolver el problema de estabilización asintótica por retroalimentación de salida de un helicóptero de 3-GDL aplicando observadores discontinuos de velocidad que presentan modos deslizantes. El análisis propuesto involucra una descomposición del problema y la síntesis para la retroalimentación de salida. El método propuesto presenta el diseño de observador de velocidad por modos deslizantes de primer orden aplicando un controlador por modos deslizantes de segundo orden por retroalimentación de estados. La verificación numérica, realizada para un prototipo de laboratorio, demuestra la efectividad del método.

REFERENCIAS

Avila-Vilchis, J.C., B. Brogliato, A. Dzul y R. Lozano (2003). Nonlinear modelling and control of helicopters. *Automatica* **39**, 1526–1530.
 Davila, J., L. Fridman y A. Levant (2005). Second order sliding mode observer for mechanical systems. *IEEE Transaction on Automatic Control* **50**(11), 1785–1789.

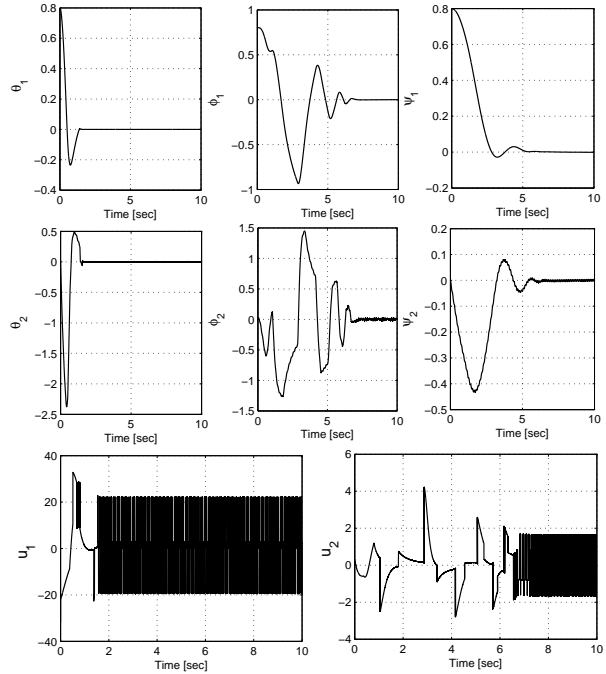


Figura 3. Estabilización del helicóptero para el caso perturbado.

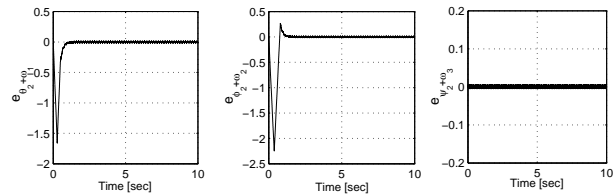


Figura 4. Error de observación para el caso perturbado.

Doyle, J., K. Glover, P. Khargonekar y B. Francis (1989). State space solution to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Trans. Autom. Control* **34**(8), 831–846.
 Drakunov, S. y V. Utkin (1995). Sliding mode observers: tutorial. En: *Proceedings of the 34th IEEE CDC*. New Orleans, USA.
 M'Sirdi, N.K., A. Rabhi, L. Fridman, J. Davila y Y. Delanne (2008). Sosl observer for estimation of vehicle dynamic parameters. *Int. J. Vehicle Design* **48**(3/4), 190–207.
 Oh, S. y H.K. Khalil (1997). Nonlinear output-feedback tracking using high-gain observer and variable structure control. *Automatica* **33**(10), 1845–1856.
 Orlov, Y. (2009). *Discontinuous systems – Lyapunov analysis and robust synthesis under uncertainty conditions*. Springer-Verlag, London.
 Quanser (n.d.). *3D helicopter system with active disturbance*. [available] <http://www.quanser.com/choice.asp>.
 Spurgeon, S.K., C. Edwards y N.P. Foster (1996). Robust model reference control using sliding mode controller/observer scheme with application to a helicopter problem. En: *Proc. of the IEEE International Workshop on Variable Structure Systems*. pp. 36–41.
 Utkin, V.I. (1992). *Sliding Modes in Control Optimization*. Springer-Verlag, Berlin.