

# Control Por Fijación En Redes Con Nodos No Idénticos

J. G. Barajas Ramírez

División de Matemáticas Aplicadas, IPICYT, A. C.

Camino a la Presa San José 2055

Col. Lomas 4a Sección CP. 78216

San Luis Potosí, S. L. P., México.

Teléfono: (52)-444-834 20 00

Email: jgbarajas@ipicyt.edu.mx

**Resumen**—La estrategia de regulación por fijación de nodos es descrita para el caso de redes con nodos idénticos y extendida al caso de redes con nodos no idénticos. Esta estrategia de control de redes puede verse como una interpretación simplificada de la interacción entre sincronización y regulación observada en el mundo real. La estrategia consiste en aplicar controladores a una pequeña fracción de los nodos, para lograr a través de la sincronización de la red, regular su comportamiento colectivo. Se presenta un criterio de estabilización por fijación para redes con nodos no idénticos en términos de la ganancia de control y propiedades estructurales de la red, específicamente la fuerza de conexión y el número de nodos. En particular, el criterio propuesto establece que la regulación por fijación será efectiva en redes cuando los diferentes nodos de la red tengan puntos de equilibrio comunes. Nuestros resultados se ilustran mediante simulaciones numéricas de la regulación por fijación en una red escala-libre, donde los nodos son dos tipos distintos de sistemas caóticos.

**Palabras clave:** Redes complejas, Control por fijación, Controlabilidad, Nodos no idénticos.

## I. INTRODUCCIÓN

Un gran número de sistemas de interés científico y tecnológico pueden ser representados como redes. En esta representación, sistemas de naturalezas tan diversas como la Internet, los grupos sociales, e incluso la red neuronal toman la forma de grafos, en los cuales cada componente del sistema se representa como un nodo, mientras que las interacciones entre ellos se representan como enlaces (Bornhold y Schuster, 2003; Newman et al., 2006). En los últimos años, el estudio de la estructura de estas redes complejas ha tomado gran relevancia en la comunidad científica. Siendo una de las principales motivaciones para estas investigaciones la búsqueda de relaciones directas entre las características topológicas de la red y las propiedades dinámicas de los sistemas representados por éstas. De modo que en la actualidad, un aspecto fundamental del estudio de redes complejas es ir más allá de identificar y caracterizar propiedades estructurales, a precisamente establecer criterios para el surgimiento de comportamientos colectivos.

En términos generales, la estructura de una red se car-

acteriza por tres números básicos (Wang y Chen, 2003; Barajas-Ramírez, 2006): La distancia de camino promedio ( $L$ ), que describe la distancia efectiva, medida en enlaces, entre dos nodos cualquiera de la red; el coeficiente de agrupamiento ( $C$ ), que indica cuantos de los vecinos de cada nodo son vecinos entre sí; y la distribución de grado de nodo ( $P(k)$ ), que describe la probabilidad de que un nodo escogido al azar tenga exactamente  $k$  enlaces. Diversos estudios empíricos realizados en redes en el mundo real, incluyendo redes sociales, tecnológicas y biológicas, han identificado algunas características topológicas básicas comunes a la mayoría de estas redes. En particular, se encontró que la distancia de camino promedio de redes en el mundo real es muy pequeña, aun cuando la red se constituya por un número muy grande de nodos; esta característica es llamada el efecto de mundo-pequeño (Watts y Strogatz, 1998). Así mismo, la distribución de enlaces se caracteriza por la presencia de un número considerable de nodos concentradores, produciendo lo que se conoce como el efecto de escala-libre (Barabási y Albert, 1999). La importancia del descubrimiento de estos principios comunes de organización estructural, radica en las implicaciones que puedan tener en la funcionalidad de los sistemas que las redes complejas representan.

Durante la última década, numerosos autores han investigado la relación entre propiedades estructurales, como los efectos de mundo-pequeño y escala-libre descritos arriba, con la dinámica de los comportamientos colectivos en redes complejas (Strogatz, 2001; Wang y Chen, 2003; Albert, 2005; Boccaletti et al., 2006; Wu, 2007; Arenas et al., 2008). En su mayoría, estas investigaciones se han enfocado en el surgimiento de sincronización en redes de osciladores idénticos, en las cuales los sistemas se conectan linealmente y con simetría difusiva (Wu y Chua, 1995; Acebrón et al., 2005), es decir, de modo que la suma de conexiones sean iguales en todas las direcciones de la red (este concepto es descrito con mayor detalle en la Sección II). Este tipo de redes son modelos adecuados para representar un gran número de situaciones reales en diversos sistemas físicos, biológicos y sociales. En particular, pueden ser utilizadas

para representar sistemas cuyo funcionamiento adecuado requiere la interacción entre mecanismos de sincronización y regulación. Por ejemplo, en fisiología, el funcionamiento del corazón requiere la sincronía de las células que forman el tejido cardíaco, y a la vez se requiere que las células cardíacas sean reguladas por las células marcapaso localizadas en el nodo sinusal (Peskin, 1977). Así mismo, el arreglo de neuronas cerebrales, que en su conjunto forma la médula oblongada, sintonizan sus comportamientos eléctricos con otras partes del sistema nervioso para regular diferentes funciones del organismo, como por ejemplo el ritmo respiratorio (Rekling y Feldman, 1998). Por otro lado, la formación de opiniones en un grupo social es producto de la regulación lograda por la sincronización de la red formada por los miembros del grupo, donde una opinión se consolida en función de las pautas que algunos individuos clave, llamados líderes de opinión, dictan al grupo (Weisbuch et al, 2004). La regulación de comportamientos en las redes complejas que describen estos ejemplos tiene dos elementos básicos: La presencia de nodos especiales que establecen el comportamiento a seguir, y la sincronización como un mecanismo de control sobre el resto de la red. Inspirados en estas observaciones, Wang y Chen propusieron una estrategia de regulación para redes complejas llamada control por fijación (Wang y Chen, 2002; Li et al, 2004).

La estrategia de regulación por fijación de nodos, llamada pinning-control en Inglés, puede verse como una interpretación simplificada de la interacción entre los mecanismos de regulación y sincronía que se observa en el mundo real. La idea básica es utilizar la estructura de la red para coadyuvar en su regulación, con este fin se aplica una acción de control local a un número pequeño de nodos, fijando su dinámica a un punto de equilibrio deseado. Entonces, cuando la red alcanza la sincronía, el resto de los nodos son forzados al mismo equilibrio que los nodos controlados. En cierto sentido, los nodos controlados, también llamados nodos fijados, juegan el papel de las células marcapaso, o los líderes de opinión en los ejemplos de regulación por sincronización presentados arriba. Mientras que la estructura de interconexión se convierte en una suerte de controlador virtual, que se encarga de propagar la acción de control desde los nodos fijados al resto de la red.

En artículos recientes (Sorrentino et al., 2007; Sorrentino, 2007; Xiang et al., 2007; Xiang et al., 2008), el concepto de controlabilidad por fijación, pinning-controllability en Inglés, fue sugerido para describir la eficiencia con la que una red puede ser estabilizada a un punto de equilibrio cuando solo una fracción de sus nodos son controlados. Desde este punto de vista, la controlabilidad de una red depende directamente de su topología y la elección que se haga de los nodos a controlar. En (Sorrentino et al., 2007), bajo las restricciones de nodos idénticos y conexión difusiva, se propone un criterio para establecer la controlabilidad por fijación de una red, basado en el criterio de sincronización llamado Función Maestra de Estabilidad (Pecora y Carroll, 1998), conocida como MSF por sus

siglas en Inglés. El criterio propuesto por Sorrentino *et al.* establece la controlabilidad por fijación de la red como una propiedad estructural de la red, y la mide en términos de la fuerza de conexión necesaria para lograr que una red con nodos fijados alcance la sincronía. Por otro lado, bajo las mismas restricciones, en (Li et al., 2004) se evaluó la controlabilidad de una red en términos del número de nodos que es necesario fijar para regularla, comparando dos formas de escoger los nodos a fijar: al azar, y escogiendo los nodos concentradores. Demostrando que el número de nodos necesarios para regular la red se reduce significativamente cuando se fijan los nodos concentradores.

En esta contribución, la metodología de control por fijación propuesto por la referencias arriba mencionadas es extendida al caso de redes con nodos no idénticos. Se presenta un criterio de estabilización que permite comparar la controlabilidad de redes en términos de la ganancia de control y la fuerza de conexión necesarias para lograr la estabilización, y además se establece que la controlabilidad de la red también depende del número de nodos en la red. En particular, se analiza la regulación de redes donde los nodos son sistemas distintos conectados entre sí formando redes de escala-libre. Así mismo, se compara la controlabilidad por fijación de la red cuando se escogen los nodos a controlar en diferentes formas. Nuestros resultado indican que es posible describir una estrategia de control por fijación que establezca la red de nodos no idénticos, aun cuando se controle solo un nodo concentrador. Por otro lado, se observa que la metodología propuesta esta restringida a la estabilización de la red a un punto de equilibrio común, además se observa que las ganancias de control y fuerza de conexión necesarias para lograr la regulación depende de factores tanto estructurales como de la naturaleza de los nodos, que pueden llegar a ser difíciles de evaluar en redes en el mundo real.

El resto de la contribución esta organizada como sigue: En la Sección II, se describe la estrategia de control por fijación, así como algunos conceptos básicos sobre sincronización en redes de nodos idénticos. En la Sección III, se propone un criterio de controlabilidad para una red con nodos no idénticos, que extiende los resultados previos. Un ejemplo numérico del control por fijación en una red con nodos de dos tipos distintos de sistemas caóticos es presentado en la Sección IV. Finalmente, la contribución se concluye con algunos comentarios presentados en la Sección V.

## II. REDES DE NODOS IDÉNTICOS

### II.A. Sincronización

La evolución dinámica de una red con  $N$  nodos idénticos acoplados en forma lineal y difusiva, en la que cada nodo es un sistema dinámico  $n$ -dimensional, esta dada por las ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

donde  $x_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}]^\top \in \mathbf{R}^n$  son las variables de estado del  $i$ -ésimo nodo;  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  es una función Lipschitz conocida que describe la dinámica propia de un nodo aislado de la red; y la constante positiva,  $\sigma \in \mathbf{R}$ , representa la fuerza de conexión uniforme para toda la red. La matriz constante,  $\mathcal{A} = \{a_{ij}\} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ , es llamada la matriz de conexiones, y describe la forma en que los nodos se conectan. Por otro lado, la matriz  $\Gamma \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , llamada matriz de acoplamientos internos, es una matriz constante de entradas cero y uno que describe cuales elementos de las variables de estado de los nodos conectados se acoplan entre sí.

El requerimiento de simetría difusiva se satisface construyendo la matrix de conexiones como sigue: Si hay una conexión entre el  $i$ -ésimo y el  $j$ -ésimo nodo ( $i \neq j$ ), la entrada correspondiente es uno ( $a_{ij} = a_{ji} = 1$ ); en caso contrario,  $a_{ij} = a_{ji} = 0$ . La matrix se completa asignando a los elementos diagonales el valor:  $a_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} = -k_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, N$ , donde  $k_i$  es el grado del  $i$ -ésimo nodo. De este modo, la suma de  $\mathcal{A}$  por renglones y columnas es nula:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = \sum_{i=1}^N a_{ij} = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

Una forma de interpretar la conexión difusiva es que, para cada nodo, la interconexión con sus vecinos en todas las direcciones de la red se anula cuando la información proveniente de cada nodos es idéntica.

Para una red difusiva, en la que no haya nodos aislados, la matriz de conexiones es simétrica e irreducible, además sus valores propios son reales, con cero un valor propio de multiplicidad uno y el resto negativos. De modo que su espectro de valores propios puede escribirse como (Wu y Chua, 1995):

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N \quad (3)$$

Describiendo la red dinámica en (1), en términos de la variable  $X = [x_1, x_2, \dots, x_N] \in \mathbf{R}^{n \times N}$ , explícitamente la trayectoria de cada nodo de la red es  $x_i = x_i(t_0, x_1^0, \dots, x_N^0)$  con  $x_i^0$  las condiciones iniciales de cada nodo y  $t_0$  un tiempo inicial. Dado que todos los nodos son idénticos, comparten un mismo dominio  $D \subset \mathbf{R}^n$ , de modo que las condiciones iniciales para una trayectoria dada, definen un subconjunto de este dominio  $D^0(t_0) \subseteq D \subset \mathbf{R}^n$  para cada nodo. Ahora podemos definir el concepto de sincronización de la red como sigue:

**Definición 1 (Sincronización idéntica):** (Lü et al, 2004) Si existe un conjunto abierto no vacío de condiciones iniciales  $x_i^0 \in D^0(t_0)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t; t_0, x_1^0, \dots, x_N^0) - x_j(t; t_0, x_1^0, \dots, x_N^0)\|_2 = 0 \quad (4)$$

para  $1 \leq i, j \leq N$ . Entonces, se dice que la red dinámica (1) alcanza asintóticamente una sincronización idéntica, y que  $D^0(t_0) \times D^0(t_0) \times \dots \times D^0(t_0)$  es la región de sincronía de la red.

En particular, el hecho que la matriz de conexiones satisfaga la condición de acoplamiento difusivo (2), asegura que la trayectoria de un nodo aislado,  $\dot{s}(t) = f(s(t))$ , es también una solución para toda la red. Específicamente, esta es la solución en la que la red evoluciona cuando alcanza la sincronía. De modo que, la sincronización idéntica en términos de (4) corresponde al movimiento en una variedad invariante descrita por:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_N = s \quad (5)$$

donde la solución de sincronización,  $s(t)$ , puede ser un punto de equilibrio, una órbita periódica, o inclusive un atractor caótico de un nodo aislado de la red.

## II.B. Criterio De Sincronización

La estabilidad de la solución sincronizada se puede determinar analizando la dinámica de los errores transversales a la variedad de sincronización,  $\xi_i = x_i - s \in \mathbf{R}^n$ , para  $i = 1, 2, \dots, N$ , la cual esta dada por:

$$\dot{\xi}_i = f(x_i) - f(s) + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

Entonces, si los errores transversales son asintóticamente estables, la red logra la sincronización en el sentido de (4).

Una forma de establecer la estabilidad de los errores transversales es analizar la linealización de (6) alrededor de  $s$ . Esta linealización descrita en términos de la variable  $\bar{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N] \in \mathbf{R}^{n \times N}$ , tiene la forma:

$$\dot{\bar{\xi}} = \mathcal{D}f(s)\bar{\xi} + \sigma\Gamma\bar{\xi}\mathcal{A} \quad (7)$$

donde  $\mathcal{D}f(s) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  es el Jacobiano de la función  $f$  evaluado en  $s$ .

Por construcción, la matriz de conexiones es diagonalizable y puede escribirse como:  $\mathcal{A} = \Phi\Lambda\Phi^\top$ , donde  $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N] \in \mathbf{R}^{N \times N}$  y  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ , con  $\phi_k \in \mathbf{R}^N$  el  $k$ -ésimo vector propio de  $\mathcal{A}$  y  $\lambda_k$  su valor propio asociado. Entonces, en términos de la variable  $\bar{\eta} = \bar{\xi}\Phi$ , la dinámica de error esta dada por:

$$\dot{\bar{\eta}}(t) = \mathcal{D}f(s(t))\bar{\eta}(t) + \sigma\Gamma\bar{\eta}(t)\Lambda, \quad (8)$$

Cabe resaltar que en esta representación la variedad de sincronización, descrita en (5), coincide con la dinámica del error en la dirección del vector propio  $\phi_1 = [1, 1, \dots, 1] \in \mathbf{R}^N$ ; y esta asociada al valor propio  $\lambda_1 = 0$ . De lo anterior, se tiene que la estabilidad de la solución sincronizada es equivalente a establecer la estabilidad del sistema de  $N - 1$  ecuaciones lineales variantes en el tiempo:

$$\dot{w} = (\mathcal{D}f(s) + \sigma\lambda_i\Gamma)w, \text{ para } i = 2, 3, \dots, N \quad (9)$$

**Lema 1 (Criterio  $\lambda_2$ ):** (Wang y Chen, 2002a) Suponga que existe una matriz diagonal  $P > 0 \in \mathbf{R}^{N \times N}$  y dos constantes  $d < 0$  y  $\tau > 0$ , tal que

$$(\mathcal{D}f(s) + d\Gamma)^\top P + P(\mathcal{D}f(s) + d\Gamma) \leq -\tau I_n \quad (10)$$

para toda  $d \leq \bar{d}$ , con  $I_n$  la matriz identidad de dimensión  $n$ . Si

$$\sigma|\lambda_2| \geq |\bar{d}| \quad (11)$$

Entonces, el estado sincronizado de la red dinámica (1) es exponencialmente estable.

### II.C. Control Por Fijación

Considere que a una pequeña fracción ( $\nu = pN, 0 < p \ll 1$ ) de los nodos de la red (1) se aplican controladores de la forma:

$$u_i = -\kappa_i \Gamma(x_i - \bar{s}), \text{ para } i \in \Omega \quad (12)$$

donde  $\kappa_i \in \mathbf{R}$  es la ganancia de retroalimentación del controlador;  $\Omega = \{c_1, c_2, \dots, c_\nu\}$  es un conjunto con los índices de los nodos controlados. En particular, el objetivo de control del diseño de  $u_i$  es estabilizar los nodos en  $\Omega$  al punto de equilibrio  $\bar{s}$ , donde  $f(\bar{s}) = 0$ .

Sin pérdida de generalidad, se puede asumir que los índices en  $\Omega$  corresponden a los primeros  $\nu$  nodos en la red. Entonces, la dinámica de la red puede escribirse como:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j - \sigma \kappa_i \Gamma(x_i - \bar{s}), \quad (13)$$

para  $i = 1, 2, \dots, \nu$ , y

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j, \quad (14)$$

para  $i = \nu + 1, \nu + 2, \dots, N$ .

Donde (13) y (14) describen la dinámica de la subred controlada y no controlada, respectivamente.

La estabilidad de la red controlada (13)-(14) alrededor del punto de equilibrio  $\bar{s}$  puede ser determinada siguiendo un desarrollo similar al presentado en la subsección anterior, con la diferencia de que en este caso el sistema (9) es un conjunto de  $N - 1$  ecuaciones lineales e invariantes en el tiempo.

*Lema 2 (Criterio de estabilización):*

(Wang y Chen, 2002) Sea  $\mathcal{P} = \mathcal{A} - \mathcal{K}$ , donde  $\mathcal{K} = \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_\nu, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ , con  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_N$  los valores propios de la matriz  $\mathcal{P}$ . Suponga que existe una constante  $d < 0$ , tal que la matriz  $\mathcal{D}f(\bar{s}) + d\Gamma$  es Hurwitz. Entonces, si el valor propio más grande de  $\mathcal{P}$  es tal que:

$$\sigma \mu_1 \leq d \quad (15)$$

localmente el punto de equilibrio  $\bar{s}$  es una solución exponencialmente estable para toda la red (13)-(14).

## III. REDES DE NODOS NO IDÉNTICOS

### III.A. Criterio De Sincronización

La ecuación de estados que describe la dinámica de una red de  $N$  nodos no idénticos, acoplados en forma lineal y difusiva, tiene la forma

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (16)$$

donde las funciones Lipschitz  $f_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  son conocidas y que describen la dinámica propia de cada nodo aislado de la red; con el resto de las variables descritas como en (1). En particular, se asume que los nodos satisfacen la siguiente restricción:

$$f_i(x_i) - f(s) \leq \alpha_i \|x_i - s\|, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (17)$$

donde  $\alpha_i$  es una constante real. Esta restricción permite asegurar que la solución descrita por  $\dot{s} = f(s)$  es una solución de sincronización para la red (16) en el sentido de (4). Cabe mencionar que esta restricción, aunque fuerte, se cumple en diferentes situaciones prácticas como el caso de sistemas con nodos con diferencias paramétricas, y en redes con sistemas que comparten soluciones estables, por ejemplo, puntos de equilibrio comunes.

La dinámica del error de sincronización de la red (16) esta dada por:

$$\dot{e} = f_i(x_i) - f(s) + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma e_j, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N \quad (18)$$

La estabilidad de la solución sincronizada puede ser determinada expresando el error de sincronización en términos de las variables  $\bar{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N] \in \mathbf{R}^{n \times N}$  descritas en (8). En esta representación, mediante la función de Lyapunov  $V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \eta_j^T \eta_j$  se obtiene el siguiente resultado:

*Lema 3:* (Barajas-Ramírez, 2006a) Si el valor propio  $\lambda_2$  de la matriz de conexiones de (16) es tal que:

$$\sigma|\lambda_2| \geq N \sum_{j=1}^N \alpha_i \quad (19)$$

Entonces, el estado sincronizado de la red dinámica (16) es exponencialmente estable.

### III.B. Control Por Fijación

Considere que a  $\nu$  nodos de la red en (16) se aplican controladores descritos como en (12); donde el objetivo de control es estabilizar la red en un punto de equilibrio  $\bar{s}$ , descrito por  $f(\bar{s}) = 0$ . En particular, se asume que los nodos comparten el mismo punto de equilibrio, es decir:

$$f(\bar{s}) = f_i(\bar{s}) = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

Cabe mencionar que si la condición (20) se cumple, entonces la restricción en (17) también se cumple.

Suponiendo que los índices de los nodos controlados pueden ser reorganizados, tal que  $\Omega$  corresponda a los primeros  $\nu$  nodos en la red; la red controlada se puede describir como una subred controlada y una no controlada:

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j - \sigma \kappa_i \Gamma(x_i - \bar{s}), \quad (21)$$

para  $i = 1, 2, \dots, \nu$ , y

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j, \quad (22)$$

para  $i = \nu + 1, \nu + 2, \dots, N$ .

La estabilidad del punto de equilibrio común,  $\bar{s}$ , como una solución sincronizada para toda la red (21)-(22) se puede establecer extendiendo los resultados previos de la siguiente manera:

*Lema 4:* Sean  $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_N$  los valores propios de la matrix  $\mathcal{P} = \mathcal{A} - \mathcal{K}$ , donde  $\mathcal{K} = \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_\nu, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ . Entonces, si el valor propio  $\rho_1$  es tal que:

$$\sigma \rho_1 \leq N \sum_{j=1}^N \alpha_j \quad (23)$$

el punto de equilibrio  $\bar{s}$  es una solución exponencialmente estable de la red (21)-(22).

Cabe recalcar que escogiendo las ganancias  $\kappa_i$  suficientemente grandes, de modo que se pueda asegurar que la dinámica de la subred controlada está fijada al punto de equilibrio ( $x_i = \bar{s}$  para  $i \in \Omega$ ). La estabilización de la red depende de la sincronización en la subred (22), la cual puede ser garantizada si el valor propio  $\tilde{\lambda}_2$  del menor de la matrix de conexiones correspondiente a la subred no controlada ( $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathbf{R}^{N-\nu \times N-\nu}$ ) satisface el criterio de sincronización en el Lema 3.

#### IV. SIMULACIONES NUMÉRICAS

Considere una red donde algunos nodos son sistemas de Lorenz (24) y otros son sistemas de Chen (25), con los parámetros  $a_L = 10$ ,  $b_L = \frac{8}{3}$ , y  $c_L = 28$  para Lorenz; y  $a_C = 35$ ,  $b_C = 3$ ,  $c_C = 28$  los nodos de la red se encuentran en su estado caótico.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{L1} &= a_L(x_{L2} - x_{L1}) \\ \dot{x}_{L2} &= c_L x_{L1} - x_{L2} - x_{L1} x_{L3} \\ \dot{x}_{L3} &= x_{L1} x_{L2} - b_L x_{L3} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{C1} &= a_C(x_{C2} - x_{C1}) \\ \dot{x}_{C2} &= (c_C - a_C)x_{C1} + c_C x_{C2} - x_{C1} x_{C3} \\ \dot{x}_{C3} &= x_{C1} x_{C2} - b_C x_{C3} \end{aligned} \quad (25)$$

Los nodos Lorenz y Chen se conectan de forma lineal y difusiva, de acuerdo con el algoritmo de construcción de redes escala-libre descrita en (Wang y Chen, 2002). Además, los índices en la red se organizan de manera que los nodos concentradores correspondan a los primeros nodos en la red. Estabilización de una red con 10 sistemas Lorenz y 10 Chen. Controlando un solo nodo concentrador.

El objetivo de control es estabilizar la red al punto de equilibrio  $\bar{s} = [0, 0, 0]$ , el cual es un punto fijo común para los sistemas Lorenz y Chen. Para este fin, se aplican controladores de la forma (12) a algunos de sus nodos. En la Figura 1, se presentan las trayectorias para el primer caso de simulación: Una red de diez sistemas de Lorenz y diez sistemas de Chen, en la cual se controla solo el nodo concentrador con el grado de nodo más grande. En este caso, la fuerza de conexión y ganancia de control tal que la condición (23) del Lemma 4 se satisfaga son:  $\sigma = 80$  y

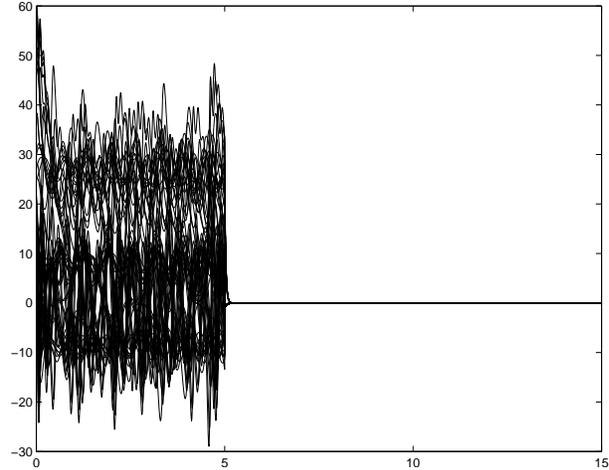


Figura 1. Control por fijación caso 1

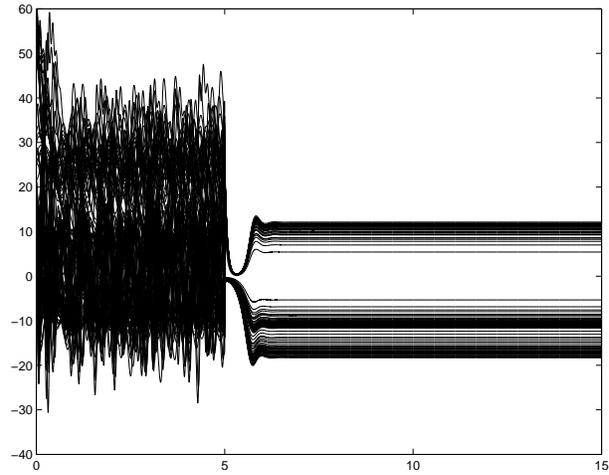


Figura 2. Control por fijación caso 2

$\kappa_1 = 1000$ . El controlador es aplicado a partir del instante de simulación  $t = 5$ .

Enseguida consideramos una situación diferente. El caso 2 es una red con veinte sistemas de Lorenz y veinte sistemas de Chen, en esta red una vez más se controla el nodo más conectado con los mismos valores de fuerza de conexión y ganancia de control que en el caso 1. Como se muestra en la Figure 2, no se logra estabilizar la red en el punto de equilibrio  $\bar{s}$ ; esto se debe a que de acuerdo con el criterio del Lema 4, al incrementarse el número de nodos ( $N$ ) el criterio no se satisface con esos valores de controlador. En la Figura 3, el controlador del caso 1 se aplica en el instante  $t = 5$  y a partir del instante  $t = 10$  la fuerza de conexión y la ganancia de control se ajustan a  $\sigma = 250$  y  $\kappa_1 = 1000$ , lo que vuelve estable el punto de equilibrio. Alternativamente, la red puede ser estabilizada en  $\bar{s}$  cuando en lugar de a un solo nodo, el controlador original se aplica a los cinco nodos más conectados de la red ( $\sigma = 80$ ,  $\kappa_i = 1000$  para  $i =$

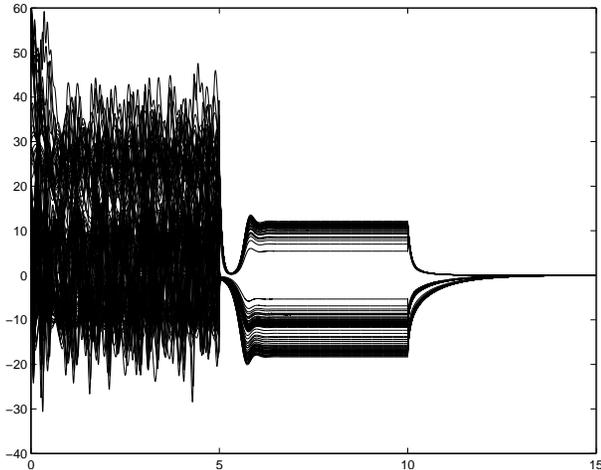


Figura 3. Control por fijación caso 2 ajustado

1, 2, 3, 4, 5.).

## V. CONCLUSIONES

En esta contribución se discutió y extendió la estrategia de control por fijación al caso de redes con nodos no idénticos. Así mismo, basados en resultados previos, se propuso un criterio para la estabilización por fijación para redes con nodos no idénticos. Este criterio se muestra la dependencia de la controlabilidad por fijación con: la fuerza de controlabilidad, la ganancia de los controladores, y el número de nodos en la red. Nuestros resultados muestran que una red de nodos no idénticos puede ser estabilizada, aun cuando solo un nodo sea controlado, siempre que todos los nodos de la red compartan el mismo punto de equilibrio.

La connotación de los conceptos de control y controlabilidad de redes que se presentan en esta contribución, son considerablemente diferentes a como se entienden usualmente en el contexto de control automático. En particular en el contexto presentado aquí, la controlabilidad por fijación se refiere a la posibilidad de estabilizar la red en un punto de equilibrio común, sin considerar otros comportamientos deseables, es decir, en el estado actual de la metodología no es posible imponer un comportamiento deseado en la red controlando solo algunos de sus nodos. Actualmente se trabaja en esta dirección.

## VI. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado parcialmente por CONACYT con el proyecto CB-2007 82321-Y, y FOMIX-SLP con el proyecto FMSLP-2008-C01 86513.

## REFERENCIAS

Bornhold, S., y H. G. Schuster (2003). *Handbook of Graphs and Networks: From the Genome to the Internet*. Wiley VCH. Darmstadt, Alemania.

Newman, M., y A. L. Barabási, y D. J. Watts (2006). *The structure and dynamics of networks*. Princeton University Press. EE. UU.

Wang, X. F., y G. Chen (2003). Complex Networks: Small-World, Scale-Free and Beyond. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, First Quarter 2003, 6–20.

Barajas-Ramírez, J. G. (2006). Complex Networks: Topology, Dynamics and Synchronization. *Forschungsberichte des Fachbereichs Elektrotechnik und Informationstechnik FernUniversität in Hagen*, ISSN 0945-0130 4/2006 1–72.

Barajas-Ramírez, J. G. (2006a). Sincronización en redes de sistemas dinámicos inciertos. *Congreso nacional de control automático AM-CA2006*, México D.f., México, 148–153.

Watts, D. J., y S. H. Strogatz (1998). Collective dynamics of small-world networks. *Nature*, **393**, 441–442.

Barabási, A. L., y Albert, R. (1999). Emergence of Scaling in Random Networks. *Science*, **286**, 509–512.

Strogatz, S. H. (2001). Exploring complex networks. *Nature*, **410**, 268–276.

Albert, R. (2005). Scale-free networks in cell biology. *J. of Cell Science*, **118**, 4947–4957.

Boccaletti, S., y Latora, V., y Moreno, Y., y Chavez, M., y Hwang, D. U. (2006). Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, **424**, 175–308.

Wu, C. W. (2007). *Synchronization in complex networks of nonlinear dynamical systems*. World scientific. Singapore.

Arenas, A., y Díaz-Guilera, A., y Kurths, J., y Moreno, Y., y Zhou, C. S. (2008). Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, **469**, 93–153.

Wu, C.W. y Chua, L.O. (1995). Synchronization on an array of linearly coupled dynamical systems. *IEEE Trans. C. Syst. I* **42**(8), 430–447.

Acebrón, J. A., y Bonilla, L. L., y Pérez-Vicente, C. J., y Ritort, F., y Spigler, R. (2005). The Kuramoto model: a simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Physics*, **77**, 137–185.

Peskin, C. (1977). *Mathematical Aspects Of Heart Physiology*. Courant Ints. Math. Sci., [www.math.nyu.edu/faculty/peskin/heartnotes/index.html](http://www.math.nyu.edu/faculty/peskin/heartnotes/index.html), New York, EE. UU.

Rekling, J. C., y Feldman, J. L. (1998). Prebötzing complex and pacemaker neurons: hypothesized site and kernel for respiratory rhythm generation. *Annual Review of Physiology*, **60**, 385–405.

Weisbuch, G., y Deffuant, G., y Amblard, F. (2004). Persuasion dynamics. *Physica A*, **353**, 555–575.

Wang, X. F., y G. Chen (2002). Pinning control of scale-free dynamical networks. *Physica A*, **310**, 521–531.

Wang, X. F., y Chen, G. (2002a). Synchronization in scale-free dynamical networks. Robustness and fragility. *IEEE Trans. C. Syst. I* **49**(1), 54–62.

Li, X., y X. F. Wang, y G. Chen (2004). Pinning a Complex Dynamical Network to Its Equilibrium. *IEEE Trans. C. Syst. I* **51**(10), 2074–2087.

Sorrentino, F. y M. di Bernardo, y F. Garofalo, y G. Chen (2007). Pinning-controllability of complex networks. *Phys. Rev. E*, **75**, 046103.

Sorrentino, F. (2007). Effects of the network structural properties on its controllability. *Chaos*, **17**, 033101.

Xiang, L. Y., y Liu, Z. X., y Chen, Z. Q., y Chen, F., Yuan, Z. Z. (2007). Pinning control of complex dynamical networks with general topology. *Physica A*, **379**, 298–306.

Xiang, L. Y., y Liu, Z. X., y Chen, Z. Q., y Chen, F., y Guo, G. y Yuan, Z. Z. (2008). Comparison between pinning control of different chaotic complex dynamical networks. *J Control Theory Appl*, **6**(1), 2–10.

Pecora, L. M., Carroll, T. L. (1998). Master Stability Functions for synchronized coupled systems. *Phys Rev Lett* **80**, 2109–2112.

Lü, J., Yu, X., Chen, G., y Cheng, D. (2004). Characterizing the Synchronizability of Small-World Dynamical Networks. *IEEE Trans. C. Syst. I* **51**(4), 787–796.