

Control Posición-fuerza con compensación de gravedad y fricción implícita

Juan C. Rivera-Dueñas

Marco A. Arteaga

División de Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingeniería.-UNAM

Coyoacan DF 04510, México

jcarlo.rivera@fi-b.unam.mx; arteaga@verona.fi-p.unam.mx

Teléfono: (52)-55-56233041-3013

Resumen—En este trabajo se propone un algoritmo de control de robots manipuladores para el seguimiento de posición y fuerza. El esquema no requiere el modelo del robot para la ley de control. Se prueba que el algoritmo tiene la capacidad de compensar modelos complejos de fricción y efectos no modelados. Se emplea al cuaternión unitario para controlar la orientación.

Palabras clave: Control posición-fuerza, diseño de Observadores, perturbaciones acotadas.

I. INTRODUCCIÓN

La ejecución de una tarea de manipulación requiere a menudo la interacción entre el manipulador y el ambiente. Durante la interacción el entorno fija restricciones en las trayectorias geométricas que pueden ser seguidas por el efector final del manipulador generalmente llamado *movimiento restringido* (Sciavicco y Siciliano, 2000). Además, uno de los fenómenos que puede ser muy perjudiciales en el control de fuerza es la fricción que existe entre el efector final del robot y la superficie de contacto, estos efectos son locales y tienen un carácter disipativo; usualmente, es despreciado, pero en algunas aplicaciones (lijado de superficies, barrenado) es de gran importancia. Aunque la fricción puede ser una propiedad deseable, como lo es para los sistemas de frenado, en general es un impedimento para controlar servo mecanismos. En (Canudas y Astrom, 1995) se propone un nuevo modelo dinámico para la fricción el cual captura un mayor comportamiento de los fenómenos de fricción como el efecto Stribeck, histéresis, características de adherencia y variación, así como fuerzas de ruptura. En (Parra, 2001) se presenta el problema de control de movimiento restringido proponiéndose un controlador localmente estable para convergencia exponencial simultanea de trayectorias de fuerza y posición, con la estructura de técnicas de modos deslizantes de segundo orden para el control de movimiento libre y compensación de dinámicas provenientes de la restricción, bajo una conveniente elección de error del sistema coordinado. En (García y Canudas, 2002) se propone un nuevo modelo de fricción que captura fricción de engranaje (*meshing friction*) siendo importante a bajas velocidades y es debido a la reducción de engranes. En (Arteaga y Castillo, 2002) se desarrolla la teoría necesaria

para especificar las tareas en coordenadas cartesianas y con esto eliminar el calculo de cinemática inversa para la implementación de la ley de control; nuevamente se utiliza un esquema control-observador para lograr un seguimiento exacto en coordenadas cartesianas sin hacer uso del modelo dinámico del manipulador y solo la medición articular es necesaria; se hace uso del jacobiano analítico.

II. MODELO DEL SISTEMA Y PROPIEDADES

II-A. Modelos de Fricción

Reasignando variables al modelo de fricción de (Canudas y Astrom, 1995)

$$F = a_0\zeta + a_1\frac{d\zeta}{dt} + a_1'v, \quad (1)$$

donde ζ es la deflexión promedio de las cerdas y v es la relación de velocidad entre dos superficies. a_0 , a_1 y a_1' son parámetros relacionados a la rigidez y el amortiguamiento. además

$$\frac{d\zeta}{dt} = v - \frac{|v|}{f(v)}\zeta. \quad (2)$$

La función $f(v)$ se define como

$$f(v) = \frac{1}{a_0} \left(F_C + (F_S - F_C)e^{-(v/v_s)^2} \right), \quad (3)$$

donde F_C es la fricción de Coulomb, F_S es la fuerza de adherencia y v_s es la velocidad de Stribeck. El modelo (1)–(3) tiene la siguiente propiedad.

Propiedad 1: (Canudas y Astrom, 1995) Asuma que $0 < f(v) \leq \bar{a}$, con \bar{a} una constante positiva y finita. Si $|\zeta(0)| \leq \bar{a}$ entonces $|\zeta(t)| \leq \bar{a} \forall t \geq 0$. \triangle

Note que si $F_S \leq F_C$ entonces $\frac{F_S}{a_0} \leq f(v) \leq \frac{F_C}{a_0} \triangleq \bar{a}$, y si $F_C \leq F_S$ entonces $\frac{F_C}{a_0} \leq f(v) \leq \frac{F_S}{a_0} \triangleq \bar{a}$. Debido a esto la Propiedad 1 nos dice que las deflexiones en las cerdas ζ son acotadas. Podemos reescribir el modelo de fricción de (Canudas y Astrom, 1995) en uno mas simple

$$F = a_0\zeta + a_1v - a_2\frac{|v|}{(F_C + (F_S - F_C)e^{-(v/v_s)^2})}\zeta, \quad (4)$$



con $a_1 \triangleq a'_1 + a''_1$ y $a_2 \triangleq a'_1 a_0$.

Estos términos pueden verse como disturbios externos acotados, que es una característica necesaria para el análisis de estabilidad. \triangle

Con respecto al robot manipulador, consideramos dos fuentes de fricción: una articular (relacionada a las coordenadas articulares), y otro debida al contacto con una superficie (relacionada a las coordenadas cartesianas). Entonces, si $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^6$ es el vector de velocidad lineal y angular del efector final el siguiente modelo de fricción puede ser usado para representar el contacto con la superficie

$$F_i = a_{0i}\zeta_i + a_{1i}\dot{x}_i - a_{2i} \frac{|\dot{x}_i|}{(F_{Ci} + (F_{Si} - F_{Ci})e^{-(\dot{x}_i/\dot{x}_{si})^2})} \zeta_i, \quad (5)$$

de $i = 1, \dots, 6$, y \dot{x}_i elementos de $\dot{\mathbf{x}}$.

Por otro lado, si el manipulador es rígido de n -grados de libertad, cuyas articulaciones se asumen de revolución por simplicidad, entonces es mas conveniente utilizar el modelo de fricción propuesto en (Garcia y Canudas, 2002), él cual se simplificó para tomar únicamente dos frecuencias del análisis de espectro. El modelo esta dado por

$$\tau_{fi} = \left\{ \tau_{Ci} + (\tau_{Ei} - \tau_{Ci})e^{-\frac{|\dot{q}_i|}{\dot{q}_{si}}} + \bar{a}_{3i} \sin(\omega_{3i}q_i + \varphi_{3i}) + \bar{a}_{4i}e^{-\bar{a}_{5i}|\dot{q}_i|} \sin(\omega_{4i}q_i + \varphi_{4i}) \right\} \text{sign}(\dot{q}_i) + \bar{a}_{1i}\dot{q}_i, \quad (6)$$

con $i = 1, \dots, n$. τ_{Ci} representa la fricción de Coulomb, τ_{Ei} es la fricción estática, \bar{a}_{1i} es el coeficiente de fricción viscosa, \dot{q}_{si} es la velocidad de Stribeck, \bar{a}_{3i} y \bar{a}_{4i} representan la amplitud de las oscilaciones, cuyas frecuencias y fases están dadas por $\omega_{3i}q_i$, φ_{3i} , $\omega_{4i}q_i$ respectivamente y φ_{4i} . \bar{a}_{5i} es la constante de decaimiento de la amplitud. Finalmente, podemos reescribir (5) en forma vectorial como

$$\mathbf{f}_f = \mathbf{D}_x \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}_b(\dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\zeta}) \quad (7)$$

donde $\mathbf{D}_x \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ es la matriz diagonal semidefinida positiva de coeficientes de viscosidad dados por a_{1i} , y los i -elementos de $\mathbf{f}_b \in \mathbb{R}^6$ están dados directamente por F_i en (5) menos el termino $a_{1i}\dot{x}_i$, Para $i = 1, \dots, 6$. $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^6$ se define así por razones obvias. También, la ecuación (6) podemos escribirla en forma vectorial

$$\boldsymbol{\tau}_f = \mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\tau}_b(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (8)$$

donde $\mathbf{D}_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz diagonal semidefinida positiva de coeficientes de viscosidad dados por \bar{a}_{1i} , y los i -elementos de $\boldsymbol{\tau}_f \in \mathbb{R}^n$ están dados por τ_{fi} en (6) sin el termino $\bar{a}_{1i}\dot{q}_i$, Para $i = 1, \dots, n$.

II-B. Modelo del Robot

Considere un robot rígido de n -grados de libertad en contacto con su entorno, representado por m -restricciones. La dinámica del sistema esta dada de la siguiente manera

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\tau}_f + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{f}_f - \boldsymbol{\tau}_p - \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}, \quad (9)$$

donde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas articulares generalizadas, $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia definida simétrica positiva, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coriolis y fuerzas centrífugas, $\boldsymbol{\tau}_f \in \mathbb{R}^n$ representa la fricción en las articulaciones, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas gravitacionales, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de torque que actúa sobre las articulaciones, $\mathbf{f}_f \in \mathbb{R}^6$ representa la fricción debida al contacto entre el robot y la superficie; $\boldsymbol{\tau}_p \in \mathbb{R}^n$ representa una perturbación externa y acotada. $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) = \nabla\varphi(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es asumida de rango completo es este trabajo. $\nabla\varphi(\mathbf{q})$ denota el gradiente del vector de superficie $\varphi \in \mathbb{R}^m$ que mapea un vector al plano normal del plano tangente que surge en el punto de contacto y $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de multiplicadores de Lagrange (representación de la fuerza aplicada sobre un punto de contacto).

$$\varphi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}. \quad (10)$$

Note que la ecuación (10) significa que las restricciones consideradas son homogéneas (Parra, 2001).

Mediante el uso de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ y tomando en cuenta (7) y (8), el modelo (9) puede escribirse como

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_b(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{f}_b(\dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\zeta}) - \boldsymbol{\tau}_p - \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (11)$$

donde $\mathbf{D} \triangleq \mathbf{D}_q + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{D}_x\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz semidefinida positiva. En adelante usaremos $\boldsymbol{\tau}_b = \boldsymbol{\tau}_b(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathbf{f}_b = \mathbf{f}_b(\dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\zeta})$. El modelo (11) tiene la siguiente propiedad.

Propiedad 2: Con una apropiada definición paramétrica del modelo del robot podemos decir

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\tau}_b - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{f}_b - \boldsymbol{\tau}_p - \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}, \quad (12)$$

donde $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ es el *regresor* y $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^p$ es el vector constante de parámetros. \triangle

La meta es diseñar la ley de control con la tarea especificada directamente en las coordenadas del espacio de trabajo. Para hacer esto considere la siguiente relación

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}}_n \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (13)$$

donde ${}^0\boldsymbol{\omega}_n \in \nu$ es la velocidad angular del efector final, mientras que ${}^0\dot{\mathbf{p}}_n \in (n-\nu)$ es la velocidad lineal del efector

final. Se asume $n = 6$ y $\nu = 3$. Si el robot no esta en alguna singularidad, la siguiente relación se cumple

$$\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{x}. \quad (14)$$

Suposición 1: El robot no pasa por ninguna singularidad, así que $J^{-1}(q)$ siempre existe. \triangle

Entonces, x esta dado por

$$x = \begin{bmatrix} {}^0p_n \\ {}^0\phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0p_n \\ \int_0^t {}^0\omega_n d\vartheta \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Suponga que (10) puede escribirse en coordenadas cartesianas, *i. e.*

$$\varphi({}^0p_n) = \varphi(x) = 0, \quad (16)$$

Entonces

$$J_{\varphi x} = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}, \quad (17)$$

por lo tanto

$$J_{\varphi}(q) = J_{\varphi x} J(q). \quad (18)$$

con lo cual puede reescribirse (11) como

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = \tau - \tau_b - J^T(q)f_b - \tau_p - J^T(q)J_{\varphi x}^T \lambda, \quad (19)$$

y otra propiedad puede establecerse.

Propiedad 3: El vector \dot{x} puede escribirse como

$$\dot{x} = Q_x(x)\dot{x} + P_x(x)\dot{x}, \quad (20)$$

donde $Q_x(x) \triangleq (I_{n \times n} - P_x(x))$, $P_x(x) \triangleq J_{\varphi x}^+ J_{\varphi x}$, y $J_{\varphi x}^+ \triangleq J_{\varphi x}^T (J_{\varphi x} J_{\varphi x}^T)^{-1} \in n \times m$ es la pseudoinversa de Penrose's y $Q_x \in n \times n$ satisface $rank(Q_x) = n - m$. Estas dos matrices son ortogonales, *i. e.* $Q_x P_x = O$ ($Q_x J_{\varphi x}^T = O$ y $J_{\varphi x} Q_x = O$). Alternativamente, (20) puede escribirse como

$$\dot{x} = Q_x(x)\dot{x} + J_{\varphi x}^+ \dot{p}_c, \quad (21)$$

donde $\dot{p}_c \triangleq J_{\varphi x} \dot{x} \in m$ puede interpretarse como una restricción de velocidad. Además, de (16) se tiene

$$\dot{p}_c = 0 \quad \text{and} \quad p_c = 0. \quad (22)$$

Note que $p_c = \varphi(x)$ es la restricción de posición. \triangle

Para simplificar el análisis de estabilidad puede hacerse la siguiente suposición.

Suposición 2: La matriz $J_{\varphi x}$ es constante. \triangle

Una consecuencia directa de la suposición 2 es que Q_x y P_x son constantes, lo que significa que la superficie es plana.

III. DISEÑO DEL CONTROLADOR-OBSERVADOR CON COMPENSACIÓN DE FRICCIÓN IMPLÍCITA

Primero se considera una variable auxiliar x_a , que permita definir el error de seguimiento como:

$$\Delta x \triangleq x - x_a, \quad (23)$$

donde se asume que x_a y su primera derivada \dot{x}_a están acotadas. Por otro lado, suponga que las mediciones de velocidad no están disponibles. Entonces, un estimado de x está dado por \hat{x} , y se puede definir el error de observación como

$$z \triangleq x - \hat{x}. \quad (24)$$

Finalmente, como en Arteaga y Castillo (2002), se define una variable de error auxiliar

$$\bar{x} \triangleq \hat{x} - x_a. \quad (25)$$

El error de fuerza está dado por:

$$\Delta \lambda \triangleq \lambda - \lambda_d, \quad (26)$$

donde $\lambda_d \in \mathbb{R}^m$ es el valor de fuerza deseada. A continuación se define una variable deslizante:

$$s \triangleq Q_x(\dot{\hat{x}} + \Lambda_x \bar{x}) + J_{\varphi x}^+ \xi_2 \Delta F \triangleq s_p + s_f, \quad (27)$$

donde $\Lambda_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\xi_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son matrices positivas definidas y

$$\Delta F = \int_0^t \Delta \lambda d\vartheta. \quad (28)$$

El observador esta definido igual que en (Arteaga y Rivera, 2007) de la forma

$$\hat{x} \triangleq \int_0^t \dot{\hat{x}} d\vartheta + P_x x \quad (29)$$

$$\dot{\hat{x}} \triangleq Q_x(\dot{x}_a - \Lambda_x \bar{x} + k_d \Lambda_z \int_0^t z(\vartheta) d\vartheta + \Lambda_z z + k_d z) \quad (30)$$

donde $\Lambda_z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal positiva definida y k_d es una constante positiva.

Considere las siguientes definiciones

$$\dot{x}_r \triangleq Q_x(\dot{x}_a - \Lambda_x \bar{x}) - J_{\varphi x}^+ \xi_2 \Delta F + s_d - K_\gamma \sigma, \quad (31)$$

$$\dot{x}_o \triangleq \dot{\hat{x}} - \Lambda_z z \quad (32)$$

$$r \triangleq \dot{x} - \dot{x}_o = \dot{z} + \Lambda_z z \quad (33)$$

$$s_o \triangleq \dot{x}_o - \dot{x}_r. \quad (34)$$

Entonces, se pueden definir las siguientes relaciones

$$s_x \triangleq \dot{x} - \dot{x}_r = Q_x(\Delta \dot{x} + \Lambda_x \bar{x}) + J_{\varphi x}^+ \xi_2 \Delta F - s_d + K_\gamma \sigma \quad (35)$$

$$s_r \triangleq \dot{q} - \dot{q}_r = J_x^{-1}(q)(\dot{x} - \dot{x}_r) = J_x^{-1}(q)s_x. \quad (36)$$



AMCA

La ley de control esta dada por

$$\begin{aligned} \tau = & -K_p J^{-1}(q) s_o + J^T(q) J_{\varphi x}^T \lambda_d \\ & - J^T(q) J_{\varphi x}^T \xi_1 \Delta F, \end{aligned} \quad (37)$$

con $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\xi_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ como una matriz positiva definida.

Mediante la sustitución de (37) en (19) y notando que $s_o = s_x - r$, se puede obtener la dinámica del error de seguimiento

$$\begin{aligned} H(q) \dot{s}_r + C(q, \dot{q}) s_r + K_{DP} s_r = & (38) \\ -J^T J_{\varphi x}^T \Delta \lambda + K_p J^{-1} r - J^T J_{\varphi x}^T \xi_1 \Delta F - Y_a, \end{aligned}$$

donde $K_{DP} \triangleq D + K_p$ y mediante la Propiedad 2

$$\begin{aligned} Y_a \triangleq & Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \ddot{q}_r) \phi \\ & + \tau_b(q, \dot{q}) + J^T(q) f_b(\dot{x}, \zeta) + \tau_p. \end{aligned} \quad (39)$$

Reescribiendo (30)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} - \Lambda_z Q_x z - k_d Q_x z = Q_x (\dot{x}_a - \Lambda_x \bar{x}) & (40) \\ + k_d \Lambda_z Q_x \int_0^t z(\vartheta) d\vartheta, \end{aligned}$$

donde se asume que $\Lambda_z Q_x = Q_x \Lambda_z$. Lo cual implica hacer $\Lambda_z = k_z I$, con $k_z > 0$. De (31), mediante el uso de $z = Q_x z$, $\dot{z} = Q_x \dot{z}$ y el uso de las ecuaciones (33), (35) obtenemos

$$r + k_d \int_0^t r(\vartheta) d\vartheta = Q_x (\Delta \dot{x} + \Lambda_x \bar{x}). \quad (41)$$

o alternativamente podríamos emplear

$$\dot{r} + k_d r = Q_x (\Delta \ddot{x} + \Lambda_x \dot{\bar{x}}). \quad (42)$$

la cual es interpretada como la dinámica de observación.

IV. DISEÑO DEL CONTROLADOR-OBSERVADOR CON COMPENSACIÓN DE GRAVEDAD

Es necesario realizar el calculo del vector de fuerzas gravitacionales que se utilizara para realizar la compensación.

Tomando en cuenta que la teoría desarrollada hasta el momento es valida para el diseño del controlador, partimos de la propiedad 2 y la modificamos para considerar esta compensación.

Propiedad 4: Con una apropiada definición paramétrica del modelo del robot podemos decir

$$\begin{aligned} H(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + D\dot{q} = & (43) \\ Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \phi - g(q) - \tau_b - J^T(q) f_b - \tau_p - J_{\varphi}^T(q) \lambda, \end{aligned}$$

donde $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ es el *regresor* y $\phi \in \mathbb{R}^p$ es el vector constante de parámetros. \triangle

de acuerdo a la propiedad 4 la dinámica del error de seguimiento esta dada por

$$\begin{aligned} H(q) \dot{s}_r + C(q, \dot{q}) s_r + D s_r = & (44) \\ \tau - J^T(q) J_{\varphi x}^T \lambda - Y_a - g(q), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} Y_a \triangleq & H(q) \ddot{q}_r + C(q, \dot{q}) \dot{q}_r + D \dot{q}_r + \tau_b(q, \dot{q}) \\ & + J^T(q) f_b(\dot{x}, \zeta) + \tau_p \\ = & Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \ddot{q}_r) \phi + \tau_b(q, \dot{q}) + J^T(q) f_b(\dot{x}, \zeta) + \tau_p. \end{aligned} \quad (45)$$

una vez establecido el modelo paramétrico del robot manipulador, la ley de control empleada es la siguiente:

$$\begin{aligned} \tau = & -K_p J^{-1}(q) s_o + J^T(q) J_{\varphi x}^T \lambda_d \\ & - J^T(q) J_{\varphi x}^T \xi_1 \Delta F + g(q), \end{aligned} \quad (46)$$

con $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\xi_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ que es una matriz positiva definida.

La dinámica del error de seguimiento y observación es la misma que en la sección anterior exceptuando el termino Y_a ; por lo cual puede utilizarse la misma prueba de estabilidad para ambos controladores. Por cuestiones de espacio la prueba de estabilidad es omitida en este trabajo, pero al igual que en (Arteaga y Rivera, 2007) la prueba de estabilidad se resuelve en tres pasos tomando como estados a la dinámica de error de seguimiento (38), observación (42) y fuerza (28); definido como sigue:

$$y \triangleq \begin{bmatrix} s_r \\ r \\ \Delta F \end{bmatrix}. \quad (47)$$

V. RESULTADOS EXPERIMENTALES

La teoría desarrollada es probada en esta sección, para lo cual se emplea una bala giratoria para suaviza el movimiento; en combinación con la herramienta, se emplea una superficie de acero inoxidable muy porosa, como se muestra en la Figura 1.



Figura 1. Bala giratoria(1), superficie porosa(2)

La trayectoria que se realiza en la superficie plana parte de un punto A en línea recta hasta B y después hace un círculo pasando por A hasta regresar a B; con una orientación constante (ver Figura 2(1)). La trayectoria que realiza para la superficie esférica parte de un punto A hacia un punto B y hace un círculo hasta regresar a B con una orientación variable, es decir se sitúa siempre sobre el vector normal a la superficie como se ve en la Figura 2(2).

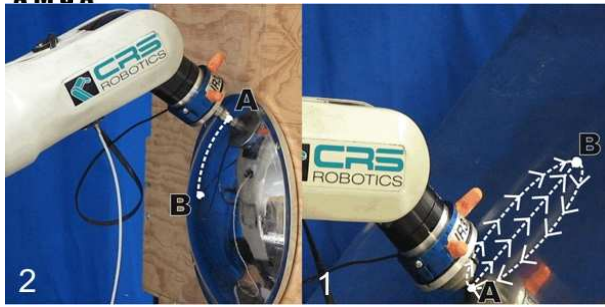


Figura 2. Superficie Plana (1), Superficie esférica (2)

A continuación se presentan los experimentos realizados para los dos tipos de superficies, empleando los controladores propuestos en las secciones III y IV, en adelante se les llamara como control implícito y control gravedad respectivamente.

V-A. Experimentos en superficie plana

La trayectoria (Figura 2(1)) tiene un tiempo total de 10s. El error de seguimiento se muestra en la Figura 3. Puede verse que la señal del controlador gravedad alcanza errores mas elevados sobre todo en la parte referente a las variables que reflejan a la orientación (ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z).

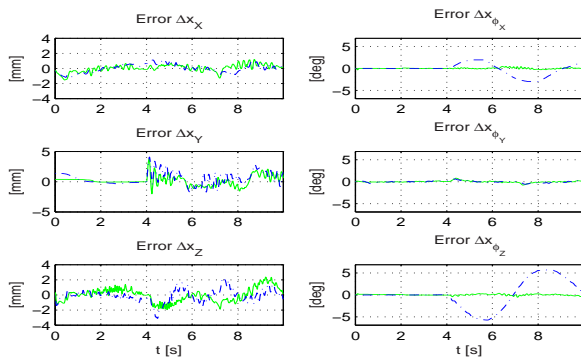


Figura 3. Error Δx , C. implícito(—) y C. gravedad (- -).

En la Figura 4 puede apreciarse el error de observación; la escala es la misma que en la Figura 3, lo cual sirve para apreciar de forma mas sencilla el desempeño del observador.

En la Figura 5 se muestra la matriz de orientación deseada y la respuesta de ambos controladores; en donde puede verse clara mente que el controlador implícito realiza mejor la tarea.

Por ultimo, la Figura 6 muestra la trayectoria deseada de fuerza, junto con el error de fuerza obtenido para cada controlador, puede verse que es muy parecido en ambos casos. Note que el controlador gravedad alcanza una fuerza mas grande al iniciar el experimento.

V-B. Experimentos en superficie curva

Este experimento se encuentra fuera del dominio de la Suposición (1), pero esto no significa que el algoritmo

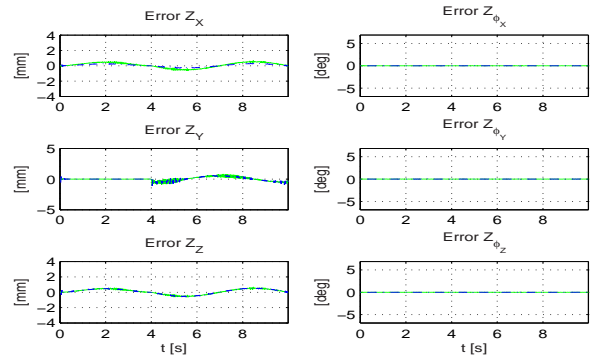


Figura 4. Error z , C. implícito(—) y C. gravedad (- -).

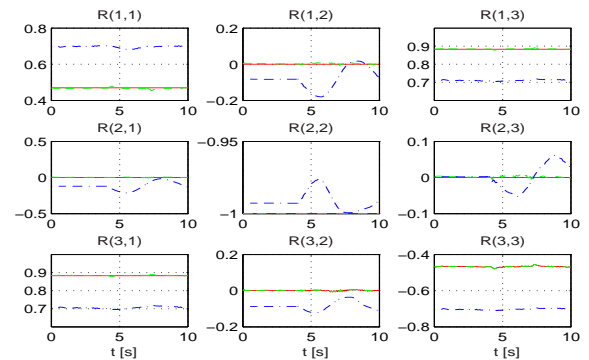


Figura 5. Matriz de orientación: deseado (—), C. implícito(- -) y C. gravedad (-.-).

de control no pueda hacer dicha tarea. Se decidió probar experimentalmente que puede trabajar en superficies curvas. La trayectoria y orientación deseada puede verse en la Figura 2(2), con un tiempo total de 4s. los parámetros del controlador son los mismos. El error de seguimiento se muestra en la Figura 7; puede apreciarse que el error de seguimiento es muy pequeño, lo cual puede justificarse debido a que el movimiento es menos complejo para las articulaciones del robot.

El error de observación es muy similares al del experimento anterior, por lo cual se ha omitido. En la Figura 8 se muestra la matriz de orientación deseada y las matrices real para ambos controladores.

Por ultimo la Figura 9 muestra el error de fuerza, del segundo 2 al 3 puede notarse un incremento de la fuerza, lo cual puede deberse a deformaciones en la superficie.

VI. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue auspiciado por el **CONACYT** bajo la referencia **58112** y por la **DGAPA-UNAM** con referencia **IN105408**

VII. CONCLUSIONES

El problema de control de fuerza y seguimiento en presencia de fricción desconocida es estudiado en este trabajo. El esquema propuesto es diseñado en coordenadas

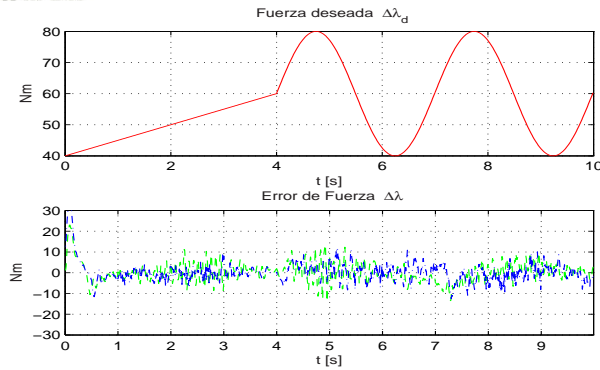


Figura 6. Fuerza deseada (arriba), b) Error de fuerza (abajo): C. implícito(—) y C. gravedad (- -).

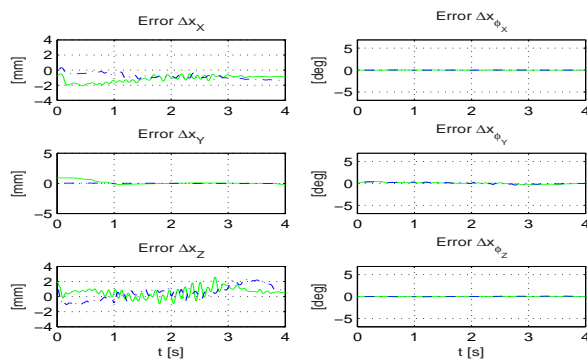


Figura 7. Error Δx , C. implícito(—) y C. gravedad (- -).

cartesianas con lo cual la cinemática inversa no es necesaria. También se asume que la medición de velocidad no está disponible, por lo cual se presenta un observador directamente en coordenadas cartesianas. Para tratar con el problema de la orientación se emplea el cuaternión unidad (Sciavicco y Siciliano, 1999). El controlador-observador utiliza una variable deslizante de segundo orden para lidiar con las dinámicas desconocidas del robot. Esta característica es utilizada para la compensación de términos de fricción sin identificación previa.

Una subregion del espacio de trabajo libre de singularidades y unas ganancias apropiadas pueden siempre ser encontradas para garantizar estabilidad. Por simplicidad se asume que la superficie es un plano, pero como se muestra en los experimentos también puede emplearse en superficies curvas. Las suposiciones hechas en este trabajo facilitan el diseño del controlador, pero podrían no considerarse.

Algo interesante que se observa en las gráficas es que contrariamente a lo sugerido por la teoría desarrollada, los experimentos con la superficie curva tienen mejor seguimiento, lo cual podría apoyar el hecho de que las suposiciones consideradas para el diseño del controlador pueden ser relajadas. Además, la compensación de gravedad no mejora los resultados; esto puede deberse a que la restricción reduce el movimiento causado por la gravedad

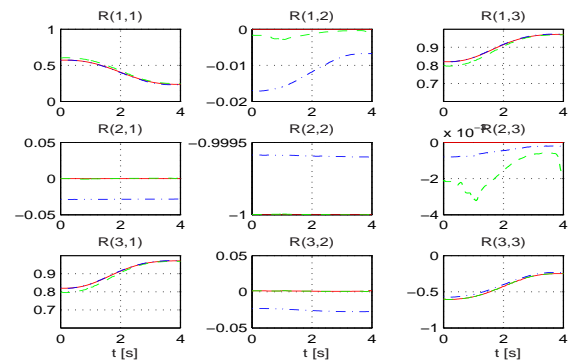


Figura 8. Matriz de orientación: deseado (—),C. implícito(- -) y C. gravedad (-.-).

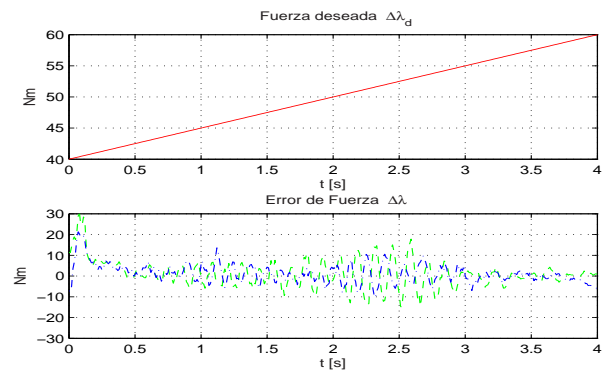


Figura 9. Fuerza deseada (arriba), b) Error de fuerza (abajo): C. implícito(—) y C. gravedad (- -).

(en función del ángulo de inclinación), lo cual puede interpretarse como una perturbación para el controlador.

REFERENCIAS

- Sciavicco, L. and Siciliano, B. (2000). *Modeling and Control of Robot Manipulators, 2nd ed.* Springer-Verlag. London.
- Canudas, C. and Olsson, H. and Astrom, K. J. and Lischinsky P. (1995). A New Model for Control of Systems with Friction. *IEEE Transactions on Automatic Control* **40** No.3, 419-425.
- Garcia, Gonzalez de Santos and Canudas, de wit (2002). Velocity Dependence in the Cyclic Friction. *IEEE The International journal od robotics research*, 419-425.
- Arteaga-Pérez, M. A. and Castillo-Sánchez, A. M. and Parra-Vega, V. (2006). Cartesian Control of Robots without Dynamic Model and Observer Design. *Automatica*, **42**, 473-480.
- Parra, V. (2001). Adaptive compensation of dynamic friction in finite time of 1 DOF mechanical system. *Third International Workshop on Robot Motion and Control*, 159-162.
- Arteaga-Pérez, M. A. and Rivera-Dueñas, Juan C. (2007). Force control without inverse kinematics nor robot model. *Proceedings of the European Control Conference, Kos, Greece*.
- Siciliano, B. and Villani, L. (1999). *Robot Force Control*. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.