

# Modelo dinámico de fricción: un enfoque para identificación y control

Juan C. Martínez-Rosas, Luis Alvarez-Icaza y Daniel Noriega-Pineda

**Resumen**—Se presenta un novedoso modelo dinámico para describir la fuerza de fricción entre dos cuerpos en contacto. Este modelo es una extensión del popular modelo de fricción LuGre. La diferencia principal con respecto al modelo LuGre y otros modelos similares radica en la descripción del efecto Stribeck, el cual, ahora es modelado con una ecuación diferencial no lineal de primer orden. Esta formulación representa a un modelo dinámico de segundo orden que preserva la base intuitiva de su precursor, reproduciendo el mismo comportamiento en estado pseudo-estacionario, y ofrece propiedades de pasividad equivalentes. La principal ventaja con respecto a otros modelos de fricción reside en la posibilidad de identificar en tiempo real todos los parámetros relevantes asociados al fenómeno de fricción. Esto es particularmente importante cuando esos parámetros cambian con el tiempo haciendo difícil calibrar de manera continua el modelo.

**Palabras clave**—Modelos de fricción dinámica, Fricción de Coulomb, Efecto Stribeck, Modelo de fricción LuGre

## I. INTRODUCCIÓN

Fricción es un fenómeno siempre presente cuando dos cuerpos están en contacto, tal que existen fuerzas con componentes tangentes a su región de contacto que se oponen al movimiento relativo de los cuerpos. Tratar con fricción, resulta en una tarea importante cuando se trabaja en control de sistemas mecánicos, puesto que su presencia puede ocasionar errores de seguimiento, ciclos límite, vibraciones y otros tipos de problemas que afectan directamente el desempeño de control de movimiento. Para compensar los efectos de fricción de manera adecuada, es importante disponer de modelos dinámicos de fricción eficientes<sup>1</sup>. Un importante paso en esta dirección es el modelo de fricción LuGre introducido en [2]. En esta referencia, los autores introducen un modelo dinámico de primer orden junto con una ecuación de salida para describir la fuerza de fricción en la región de contacto entre dos cuerpos. La principal ventaja de éste y otros modelos similares de fricción dinámica en la literatura<sup>2</sup> es su habilidad para reproducir el comportamiento de histéresis y el llamado efecto Stribeck, el cual explica la transición del régimen estático a dinámico.

Investigación apoyada con subsidios de CONACYT 47583 y UNAM-DGAPA-PAPIIT IN117108.

J. C. Martínez-Rosas es estudiante postdoctoral en el Instituto de Ingeniería; Universidad Nacional Autónoma de México; 04510 Coyoacán DF, México. jmartinezr@iingen.unam.mx.

L. Alvarez-Icaza es profesor en el Instituto de Ingeniería; Universidad Nacional Autónoma de México; 04510 Coyoacán DF, México, autor corre-spondencial, alvar@pumas.iingen.unam.mx.

D. Noriega-Pineda es profesor en la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, daniel.noriega@uacm-iztai.com

<sup>1</sup>Los lectores interesados en buscar herramientas sobre control y análisis sobre compensación de fricción en máquinas deberán referirse a [1].

<sup>2</sup>Ver, por ejemplo, [3], [4], [5].

Sin embargo, el modelo LuGre únicamente puede ser aplicado asumiendo conocimiento total o parcial de sus parámetros. Por consiguiente, resulta ser un esquema no práctico cuando las condiciones de contacto y operación varían con el tiempo, tales como temperatura, humedad, polvo, desgaste, etc.

El objetivo de este artículo es probar un nuevo modelo dinámico de fricción, el cual es una extensión del presentado en [2]. La principal diferencia en la nueva formulación, con respecto a [2], está en la descripción del efecto Stribeck, el cual ahora es modelado con una ecuación diferencial no-lineal de primer orden. La principal ventaja de la nueva representación, con respecto a otros modelos dinámicos de fricción, radica en la posibilidad de identificar todos los parámetros relevantes. Esto es de particular importancia en aplicaciones de control, donde los parámetros cambian con el tiempo. Un caso típico es la fricción llanta pavimento, donde hay una variedad de factores en el camino, clima y vehículo que inducen cambios en los parámetros del modelo [6], [7].

Han existido intentos por desarrollar esquemas de adaptación en línea para modelos dinámicos de fricción. En [8], [6], [9], [7] se presentan algunos trabajos donde se intenta adaptar los parámetros del modelo LuGre. Sin embargo, el número de parámetros sujetos a adaptación cambia en cada caso. En la mayor parte de ellos, siempre se asume el conocimiento de algunos parámetros. En particular, los dos parámetros relacionados con la fricción estática y fricción de Coulomb.

Es importante señalar que la mayoría de los modelos de fricción reportados en la literatura cuentan con características suficientes para describir los diferentes fenómenos friccionales durante el contacto de dos superficies en movimiento. Sin embargo, muy pocos modelos son evaluados mediante pruebas analíticas, dinámicas y estáticas, que permitan demostrar la existencia de las propiedades de un buen modelo de fricción. En éste artículo, presentamos un conjunto de pruebas típicas [2], [10], que consisten en investigar, analizar y capturar los diferentes fenómenos existentes en el modelo de fricción propuesto.

El artículo está organizado como sigue. Las Secciones II y III describen la estructura analítica del nuevo modelo y presentan sus propiedades básicas junto con la respuesta pseudo-estática del modelo de fricción. En la Sección IV la respuesta dinámica del modelo es probada mediante diferentes pruebas típicas a través de simulaciones para investigar su habilidad para capturar diferentes fenómenos de fricción. En la Sección V se hace un análisis de las propiedades de pasividad del modelo. En la Sección VI se realiza una descomposición paramétrica en la estructura del modelo y finalmente la sección

VII presenta los comentarios concluyentes del trabajo.

## II. MODELO DINÁMICO DE FRICCIÓN

El nuevo modelo tiene la siguiente estructura para la fuerza de fricción ( $F$ ) entre dos superficies en contacto

$$F = \sigma_0 F_c z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{q} + \sigma_0 (F_s - F_c) y + \alpha \dot{y}, \quad (1)$$

donde  $F_c > 0$  es el parámetro correspondiente a la fricción de Coulomb,  $F_s > 0$  es el parámetro de fricción estática y  $\sigma_i > 0$ ;  $i = 0, 1, 2$  son constantes que pueden ser interpretadas como parámetros de amortiguamiento y rigidez. En este modelo  $z$  y  $y$  son los estados de fricción,  $z$  está relacionado a la fricción de Coulomb y  $y$  al efecto Stribeck. La dinámica de  $z$  y  $y$  están dadas por

$$\dot{z} = \dot{q} - \sigma_0 |\dot{q}| z, \quad (2)$$

$$\dot{y} = -y + \frac{1}{\sigma_0} \text{sign}(\dot{q}) e^{-n|\dot{q}|^m}, \quad (3)$$

donde  $\dot{q}$  es la velocidad relativa de las superficies en contacto,  $m$  es una cantidad conocida<sup>3</sup>,  $\alpha > 0$  es una constante, y  $n = |1/\dot{q}_s|^m$ , con  $\dot{q}_s$  como la velocidad Stribeck.

Las ecuaciones (1)–(3) incluyen ligeras modificaciones respecto al modelo presentado en [11], las cuales se explican aquí. La ganancia  $\sigma_0$  es incorporada en el primero y cuarto término de (1), y en el segundo término de (2) y (3) respectivamente. La ecuación (3) y los términos  $\sigma_0 (F_s - F_c) y$  y  $\alpha \dot{y}$  en (1) ahora representan el proceso transitorio en el deslizamiento de las cerdas que van desde un estado de deflexión máxima sin deslizamiento a un proceso de estado de deslizamiento completo [2]. Este proceso transitorio es debido al efecto Stribeck. Es claro que la contribución de los términos  $\sigma_1 \dot{z}$  y  $\alpha \dot{y}$  es importante sólo para movimientos relativos que tienen cambios de dirección.

Finalmente, la sustitución de (2) y (3) en (1) lleva a

$$F = \sigma_0 F_c z + \sigma_1 \dot{q} - \sigma_0 \sigma_1 |\dot{q}| z + \sigma_2 \dot{q} + \sigma_0 (F_s - F_c) y + \alpha \left[ -y + \frac{1}{\sigma_0} \text{sign}(\dot{q}) e^{-n|\dot{q}|^m} \right]. \quad (4)$$

## III. COMPORTAMIENTO EN ESTADO PSEUDO-ESTACIONARIO

Para calcular la respuesta en estado pseudo-estacionario, es necesario fijar  $\dot{q}$  y colocar  $\dot{z} = 0$  y  $\dot{y} = 0$ , entonces el equilibrio para (2) es

$$\bar{z} = \frac{1}{\sigma_0} \text{sign}(\dot{q}), \quad (5)$$

y el equilibrio respectivo para (3) es

$$\bar{y} = \frac{1}{\sigma_0} \text{sign}(\dot{q}) e^{-n|\dot{q}|^m}. \quad (6)$$

La sustitución de (5) y (6) en (4) con  $\dot{z} = 0$  y  $\dot{y} = 0$  resulta en

$$\bar{F} = F_c \text{sign}(\dot{q}) + \sigma_2 \dot{q} + (F_s - F_c) \text{sign}(\dot{q}) e^{-n|\dot{q}|^m}, \quad (7)$$

que coincide con la solución en estado estacionario presentada en [2] para el modelo LuGre.

<sup>3</sup>La literatura se refiere al uso de  $m = 1/2$  or  $m = 2$ .

## IV. COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL MODELO

En esta sección, se estudia el comportamiento dinámico del modelo de fricción dado por (1)–(3). Con la finalidad de investigar si en realidad la nueva representación corresponde a un buen modelo de fricción, se llevaron a cabo un conjunto de simulaciones para demostrar que el nuevo modelo tiene la capacidad de capturar los diferentes fenómenos de fricción estándar. Para este propósito, el sistema traslacional estudiado en [2] se usa nuevamente. Los valores de referencia para los parámetros involucrados en el esquema (1) se muestran en la Tabla I.

Tabla I

Parámetros del modelo usadas en simulación		
$\sigma_0$	$10^5$	$\left[ \frac{1}{N} \right]$
$\sigma_1$	$\sqrt{\sigma_0}$	$\left[ \frac{m}{m/seg} \right]$
$\sigma_2$	0.4	$\left[ \frac{N}{m/seg} \right]$
$F_c$	1	$[N]$
$F_s$	1.5	$[N]$
$v_s$	0.001	$[m/seg]$
$\alpha$	$10^9$	$[N/(m/seg)]$

### A. Desplazamiento pre-deslizante

La primera simulación en éste trabajo fue desarrollada para investigar si el nuevo modelo de fricción captura el comportamiento de desplazamiento pre-deslizante. Tal efecto afirma que la fricción se comporta como un resorte siempre y cuando la fuerza aplicada sea menor a la fuerza necesaria para iniciar un movimiento. Esta prueba fue llevada a cabo aplicando una fuerza externa  $u$  con forma de rampa ascendente y descendente de magnitud máxima equivalente al 95% de la fuerza necesaria para vencer el reposo de una masa con peso unitario. El sistema se aprecia en el diagrama de bloques de la Figura. 1. La fuerza de entrada y el desplazamiento predeslizante obtenido se muestran en la Figura 2. Como puede ser observado, el comportamiento predeslizante obtenido con el modelo (1)–(3), concuerda cualitativamente con los resultados obtenidos en [2]. Se aprecia una ligera desviación en los resultados obtenidos con el modelo (1)–(3), en comparación con el Modelo LuGre. La razón de tal efecto se debe al factor de rigidez derivado de los estados internos  $y$  y  $z$  del nuevo modelo de fricción.

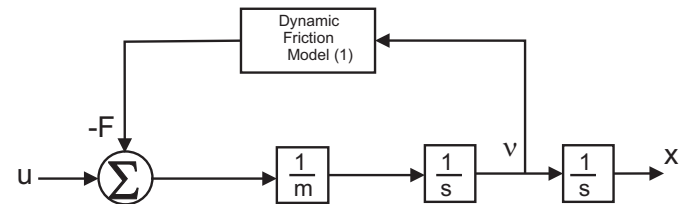


Figura 1. Diagrama a bloques para el sistema con fricción dinámica.

### B. Comportamiento de Histéresis

La segunda prueba realizada tiene el propósito de mostrar que en el nuevo modelo de fricción dinámica existe histéresis en la relación correspondiente entre la fricción y la velocidad.

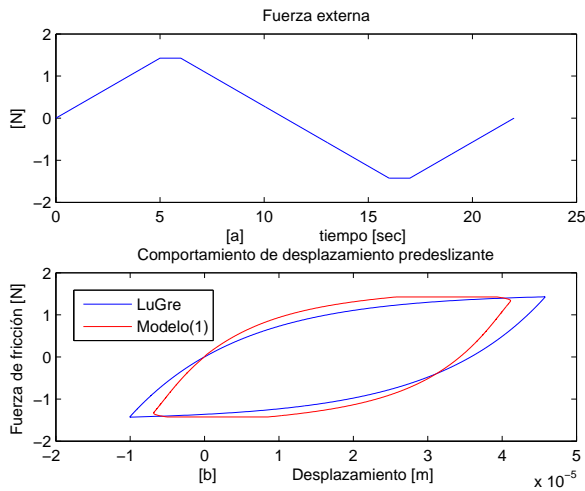


Figura 2. Comportamiento de desplazamiento pre-deslizante en modelo (1).

Para este propósito se inyecta una señal de velocidad con perfil senoidal al modelo de fricción. La gráfica de la velocidad de entrada se muestra en la Figura 3a. Las Figuras 3b y 4a muestran el comportamiento de los estados internos de fricción resultantes  $z$  y  $y$  para el nuevo modelo. Finalmente, la Figura 4b muestra la comparación del comportamiento de histéresis del modelo (1)–(3) y del modelo LuGre. De acuerdo a la Figura 4b es claro que el nuevo modelo dinámico de fricción captura de manera eficiente la histéresis existente en el fenómeno de fricción. En la Figura 4b, es importante notar que la fuerza de fricción es más baja para velocidades decrecientes en comparación a incrementos de velocidad. En la Figura 3b, la respuesta dinámica del estado interno de fricción  $z$ , presenta la deflexión promedio de las cerdas de acuerdo a los cambios de velocidad al rededor del equilibrio. Por otro lado, en la Figura 4a, el estado interno  $y$  el cual relaciona al efecto Stribeck, describe los transitorios correspondientes a la transición del régimen estático al régimen dinámico durante cada cambio de dirección de la velocidad de entrada.

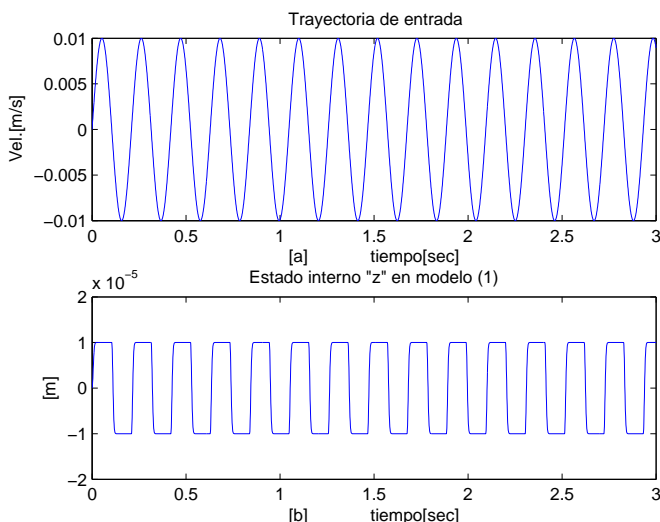


Figura 3. a) trayectoria de velocidad en simulación, b) Comportamiento del estado interno de fricción  $z$  del modelo (1).

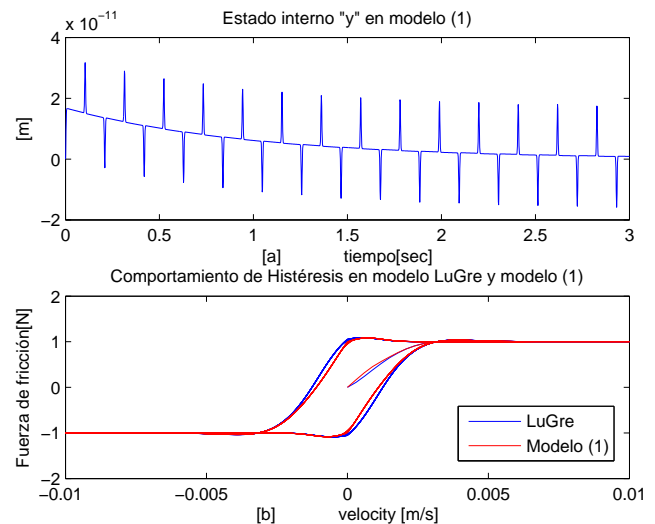


Figura 4. a) Comportamiento del estado interno de fricción  $y$  en el modelo (1), b) Comparación de la respuesta de Histéresis correspondiente a la relación entre la fricción y la velocidad del Modelo LuGre y el Modelo(1).

### C. Movimiento frenado-deslizamiento (stick-slip)

Para mostrar que la fuerza de fricción es mayor en reposo que durante el movimiento, una prueba de movimiento tipo frenado-deslizamiento (stick-slip) se desarrolla usando el nuevo modelo de fricción. Para llevar a cabo la simulación, se ha considerado el experimento dado en [2], donde el valor de los parámetros de la Tabla I han sido usados. Una masa con peso unitario se engancha a un resorte y el extremo del resorte es jalado con una velocidad constante. Este sistema es mostrado en la Figura. 5. La Figura. 6a muestra que la fuerza del resorte se incrementa de manera lineal. Así, la fuerza de fricción contrarresta la fuerza del resorte, lo cual provoca un ligero desplazamiento. Cuando la fuerza aplicada alcanza la magnitud necesaria para superar la fricción estática (*break-away force*), la masa comienza a deslizarse y la fricción decrece rápidamente debido al efecto Stribeck, el cual es expresado por el comportamiento del estado interno  $y$ , como se muestra en la Figura 6b. Cuando la fuerza del resorte decrece, la masa disminuye su movimiento y la fuerza de fricción se incrementa debido nuevamente al efecto Stribeck, en consecuencia, el movimiento se detiene. Este fenómeno repetitivo es visualizado en la Figura 7a, donde se presenta la posición de la masa y del resorte. El comportamiento de la fuerza de fricción y la velocidad de la masa pueden ser visualizado en la Figura 7b. Por lo tanto, es evidente que los resultados obtenidos con el modelo propuesto capturan el comportamiento stick-slip. La respuesta dinámica de la Figura 7 puede compararse con el movimiento frenado-deslizado presentado en LuGre [2], el cual puede visualizarse en la Figura 8. Claramente se observa que la fuerza de fricción de la Figura 7b, muestra un transitorio de mayor amplitud, permitiendo una transición de régimen estático a dinámico más veloz, cuyo efecto es debido al estado  $y$  correspondiente al efecto Stribeck.

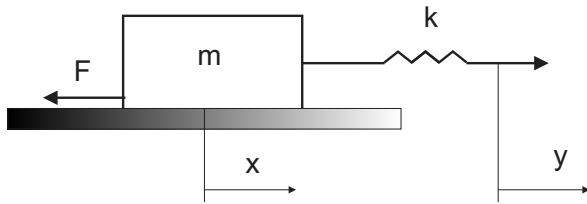


Figura 5. Sistema dinámico para probar el movimiento *stick-slip* en simulación.

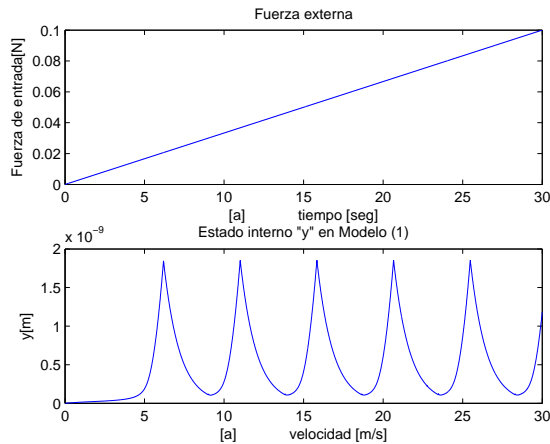


Figura 6. a) Fuerza de entrada de prueba durante el comportamiento *stick-slip* en el modelo (1), b) Comportamiento del estado de fricción interno  $y$  durante la prueba del modelo (1).

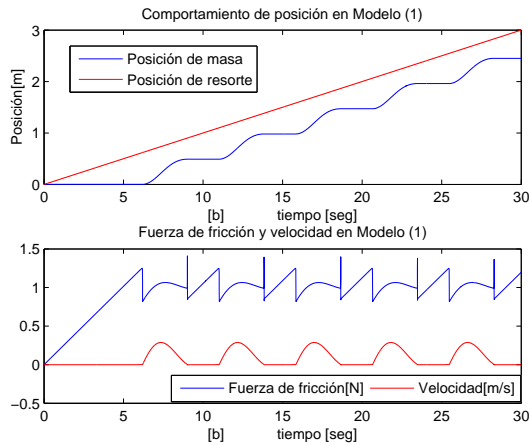


Figura 7. a) Posición resultante en la masa y el resorte durante la prueba *stick-slip*, b) Comportamiento de la fuerza de fricción y velocidad durante la prueba *stick-slip* en el modelo (1).

#### D. Ciclos límites y control PID

A fin de aplicar el nuevo modelo de fricción en un problema de sistema servo típico, y con el objetivo de probar su desempeño con un controlador PID y poder mostrar su habilidad para compensar los ciclos límites causados por la fricción, una simulación se realizó usando el mismo sistema de movimiento lineal y ganancias del controlador PID aplicado en [2]. Un diagrama de bloques del sistema es mostrado en la Figura 9. La comparación entre los resultados obtenidos en [2] y los resultados obtenidos con el nuevo modelo de fricción se muestran en la Figura 10. Se puede observar en la Figura. 10a, que el nuevo modelo de fricción reproduce ciclos límites

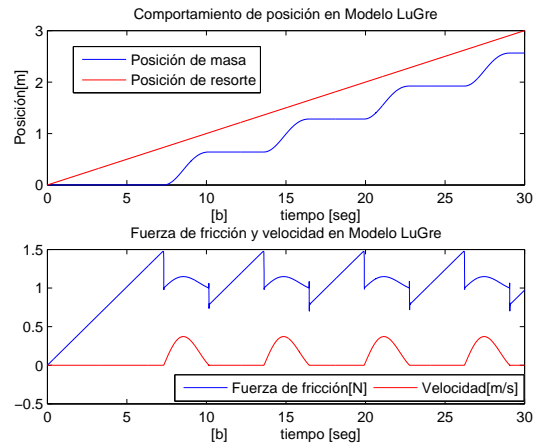


Figura 8. a) Posición resultante en la masa y el resorte durante la prueba *stick-slip*, b) Comportamiento de la fuerza de fricción y velocidad durante la prueba *stick-slip* en el modelo LuGre.

desvanecientes, los cuales tienden a atenuarse en el tiempo. La Figura 10b muestra que la combinación del controlador PID y el nuevo modelo de fricción ayudan a reducir alrededor de un 65 por ciento el error cuando se compara con los resultados obtenidos en [2]. Lo anterior verifica que el modelo de fricción propuesto tiene mejores características dinámicas respecto al modelo LuGre dado en [2]. Permitiendo un mejor desempeño cuando se usa como compensador de fricción en sistemas de control.

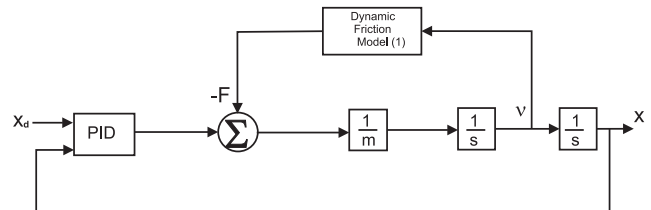


Figura 9. Diagrama a bloques para el sistema con fricción y control PID.

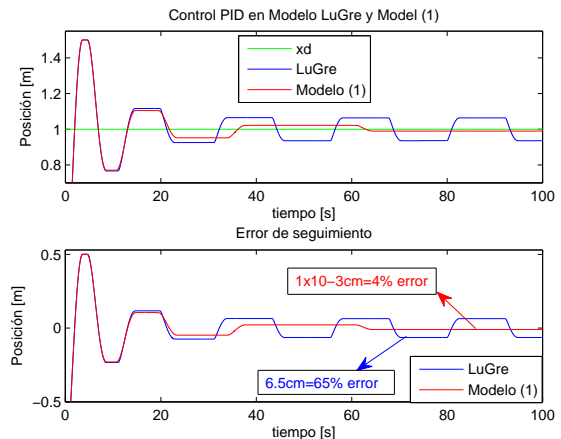


Figura 10. Comparación del control de posición del modelo LuGre y modelo (1) usando un controlador PID.

## V. PROPIEDADES DE PASIVIDAD

Los modelos de fricción tienen propiedades de pasividad en el mapa de velocidad a fuerza de fricción<sup>4</sup>. A fin de asegurar que el nuevo modelo matemático constituye un buen modelo de fricción, en esta sección se investiga la pasividad del modelo (1)-(3).

*Proposición 1:* Si  $F_s \geq F_c$ , el sistema dinámico descrito en (1)-(3) define un operador estrictamente pasivo  $\Sigma : \mathcal{L}_{2e} \rightarrow \mathcal{L}_{2e} : \dot{q} \rightarrow F$ , esto es, a lo largo de las soluciones (1)-(3), con condiciones iniciales cero,

$$I(0, T) = \int_0^T \dot{q} F dt > 0, \quad (8)$$

*Prueba:*

$$\begin{aligned} I(0, T) &= \int_0^T \dot{q} F dt \\ &= \int_0^T (\sigma_0 F_c z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{q} + \sigma_0 (F_s - F_c) y + \alpha \dot{y}) \dot{q} dt. \end{aligned} \quad (9)$$

que puede ser descompuesta como

$$I(0, T) = I_1(0, T) + I_2(0, T) + I_3(0, T) + I_4(0, T), \quad (10)$$

con

$$I_1(0, T) = \int_0^T (\sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{q}) \dot{q} dt, \quad (11a)$$

$$I_2(0, T) = \sigma_0 F_c \int_0^T z \dot{q} dt, \quad (11b)$$

$$I_3(0, T) = \alpha \int_0^T \dot{y} \dot{q} dt, \quad (11c)$$

$$I_4(0, T) = \sigma_0 (F_s - F_c) \int_0^T y \dot{q} dt, \quad (11d)$$

Si los estados iniciales satisfacen  $z(0) = y(0) = 0$ , entonces, es posible acotar  $z$  y  $y$  por

$$|z| \leq \frac{1}{\sigma_0}, \quad (12a)$$

$$|y| \leq \frac{1}{\sigma_0} e^{-n|\dot{q}|^m}, \quad (12b)$$

Tomando ahora (11a), sustituyendo (2) y usando (12a) se consigue

$$\begin{aligned} I_1(0, T) &= \int_0^T (\sigma_1 \dot{q} - \sigma_0 \sigma_1 |\dot{q}| z + \sigma_2 \dot{q}) \dot{q} dt \\ &= \int_0^T (-\sigma_0 \sigma_1 |\dot{q}| z + (\sigma_1 + \sigma_2) \dot{q}) \dot{q} dt \\ &\geq \int_0^T (-\sigma_1 + \sigma_1 + \sigma_2) \dot{q}^2 dt \\ &= \int_0^T \sigma_2 \dot{q}^2 dt > 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Para (11b), usando  $z(0) = 0$ , (2) y (12b) se obtiene

$$\begin{aligned} I_2(0, T) &= \sigma_0 F_c \int_0^T z (\dot{z} - \sigma_0 |\dot{q}| z) dt \\ &= \frac{\sigma_0 F_c}{2} z^2(T) + \sigma_0^2 F_c \int_0^T z^2 |\dot{q}| dt > 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Para el caso de (11c), se toma (3) y (12b) para conseguir

$$\begin{aligned} I_3(0, T) &= \alpha \int_0^T \dot{y} \dot{q} dt \\ &= \alpha \int_0^T (-y + \text{sign}(\dot{q}) e^{-n|\dot{q}|^m}) \dot{q} dt \\ &= \alpha \int_0^T (-\dot{q} + |\dot{q}|) e^{-n|\dot{q}|^m} dt \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Finalmente, para (11d), se usa (3) con lo cual se obtiene

$$\dot{q} = \sigma_0 \frac{\dot{y} + y}{e^{-n|\dot{q}|^m}} |\dot{q}|. \quad (16)$$

La sustitución de lo anterior en (11d) y usando (12b)  $y y(0) = 0$  se consigue

$$\begin{aligned} I_4(0, T) &= \sigma_0^2 (F_s - F_c) \int_0^T \frac{\dot{y} + y}{e^{-n|\dot{q}|^m}} y |\dot{q}| dt \\ &\geq \sigma_0^2 (F_s - F_c) \left\{ \int_0^T y \dot{y} |\dot{q}| dt + \int_0^T y^2 |\dot{q}| dt \right\} \\ &\geq \sigma_0^2 (F_s - F_c) \left\{ \int_0^T y^2 |\dot{q}| dt \right\} \geq 0. \end{aligned}$$

Este será el caso si  $F_s \geq F_c \Rightarrow I(0, T) = I_1(0, T) + I_2(0, T) + I_3(0, T) + I_4(0, T) > 0$ . ■

Esta prueba esta inspirada por los resultados presentados en [10] para el Modelo LuGre.

## VI. PARAMETRIZACIÓN

La mayoría de los modelos presentados en la literatura carece de una estructura lineal en parámetros que permita su identificación en línea. En esta sección se muestra una de las principales propiedades del modelo (1)-(3), consiste en la posibilidad de identificar todos los parámetros relevantes de fricción, cuando las condiciones de operación sufren cambios con el tiempo. Esta cualidad radica en expresar el modelo (1)-(3) como una estructura lineal en parámetros permitiendo sus aplicaciones en control avanzado e identificación paramétrica.

Para conseguir tales propósitos, se ha usado la siguiente igualdad  $e^{-n|\dot{q}|^m} = \beta e^{-|\dot{q}|^m}$ , donde  $\beta$  se asume desconocida, implicando que la velocidad Stribeck también es desconocida. El modelo propuesto tiene entonces una estructura lineal en parámetros

$$F = U P, \quad (17)$$

donde

$$U = [z, -|\dot{q}|z, \dot{q}, y, -y, \text{sign}(\dot{q}) e^{-|\dot{q}|^m}] \quad (18)$$

$$P = \left[ \sigma_0 F_c, \sigma_0 \sigma_1, \sigma_1 + \sigma_2, \sigma_0 (F_s - F_c), \alpha, \frac{\alpha \beta}{\sigma_0} \right]^T \quad (19)$$

$$= [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6]^T.$$

<sup>4</sup>Ver, los análisis en [10] para el modelo de fricción de LuGre

Con la finalidad de evitar una sobre parametrización y obtener un movimiento lo suficientemente amortiguado, el mismo procedimiento sugerido en [2] ha sido seguido para colocar el coeficiente  $\sigma_1 = \sqrt{\sigma_0}$ , tal que,  $\sigma_0 > \sigma_1$ . Esto en consecuencia implica que  $P2 = \sigma_0\sqrt{\sigma_0} = \sigma_0^{\frac{3}{2}}$ . Siendo, esta parametrización conveniente para una eficiente identificación en línea.  $P \in \mathbb{R}^6$  contiene los parámetros desconocidos del modelo de fricción y la matriz de regresor  $U(q, \dot{q}, z, y)$  contiene las funciones o variables conocidas o estimadas.

## VII. CONCLUSIONES

Se presenta un novedoso modelo de fricción dinámica de segundo orden, el cual concentra un conjunto de propiedades típicas correspondientes a un buen modelo de fricción. Un extenso análisis de su comportamiento dinámico mediante simulaciones y pruebas matemáticas se llevó a cabo para demostrar que la nueva descripción matemática dada en (1)-(3) captura los fenómenos más importantes durante el contacto de dos cuerpos cuando son sometidos a movimiento. Destaca su habilidad para reproducir el comportamiento de histéresis y el llamado efecto Stribeck, el cual a diferencia del Modelo LuGre presentado en [2], ahora es determinado mediante una ecuación diferencial no lineal de primer orden. Sus características permiten preservar la base intuitiva de su Modelo precursor LuGre, reproduciendo el mismo comportamiento en estado pseudo-estacionario, y ofreciendo propiedades de pasividad equivalentes. De importante interés, resulta su estructura lineal en parámetros, la cual se distingue de otros modelos de fricción por su posibilidad de identificar todos los parámetros relevantes de fricción, extendiendo su aplicación en esquemas de identificación y control de sistemas donde los parámetros cambian debido a factores o variaciones en las condiciones de operación.

## VIII. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y a la UNAM por el soporte financiero para esta investigación. El primer autor, también agradece el soporte de la Dirección General de Estudios de Posgrado, Instituto de Ingeniería, la Coordinación de la investigación Científica y al laboratorio de Robótica de la UNAM.

## REFERENCIAS

- [1] B. Armstrong-Héouvy, P. Dupont, and C. Canudas, "A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction," *Automatica*, vol. 30, no. 7, pp. 1083–1138, 1994.
- [2] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K. J. Åström, and P. Lischinsky, "A new model for control of systems with friction," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, no. 3, pp. 419–425, 1995.
- [3] Y. Wen, "Method for random vibration of hysteretic systems," *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, vol. 102, pp. 249–263, 1976.
- [4] S. Choi, S. Lee, S. Rakheja, and C. Sun, "A hysteresis model for the field-dependent damping force of a magnetorheological damper," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 2, no. 245, pp. 375–383, 2001.
- [5] M. Sain, M. Sain, and B. Spencer, "Models for hysteresis and application to structural control," in *Proceedings of the American Control Conference*, Albuquerque, New Mexico, 1997, pp. 16–20.
- [6] C. Canudas and R. Horowitz, "Observers for tire/road contact friction using only wheel angular velocity information," in *Proceedings of the 1999 Conference on Decision and Control*, 1999, pp. 3932–3937.

- [7] J. Yi, L. Alvarez, R. Horowitz, and X. Claeys, "Emergency braking control with an observed-based dynamic tire/road friction model and wheel angular velocity measurement," *Journal of Vehicle Systems Dynamics*, vol. 39, pp. 81–97, 2003.
- [8] C. Canudas de Wit and P. Lischinsky, "Adaptive friction compensation with partially known dynamic friction model," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 11, pp. 65–80, 1997.
- [9] J. Yi, L. Alvarez, and R. Horowitz, "Adaptive emergency braking control with underestimation of friction coefficient," *IEEE Control Systems Technology*, vol. 10, pp. 381–392, 2002.
- [10] N. Barabanov and R. Ortega, "Necessary and sufficient conditions for passivity of the LuGre friction model," *Transactions on Automatic Control*, vol. 45, pp. 830–832, 2000.
- [11] Alvarez-Icaza, L. and Jiménez-Fabián, R., "An identifiable control oriented dynamic friction model," in *Proceedings of 7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, Pretoria, RSA., 2007, pp. 419–426.