



## ANÁLISIS DE PÉRDIDAS MAGNÉTICAS EN EL ARRANQUE ÓPTIMO EN TIEMPO DE UN MOTOR DE INDUCCIÓN CON ALIMENTACIÓN PWM SENOIDAL

Leszek Kawecki Zlotkowska<sup>1</sup>  
Lázaro Eduardo Castillo Barrera<sup>2</sup>

Instituto Politécnico Nacional, México D.F. 04430  
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
SEPI Unidad Zacatenco<sup>1</sup>

Depto de ICE, Academia de Control Unidad Culhuacan<sup>2</sup>  
Av. Instituto Politécnico Nacional s/n<sup>1</sup> Av. Santa Ana # 1000<sup>2</sup>  
[lkawecki@ipn.mx](mailto:lkawecki@ipn.mx),<sup>1</sup> [edcast14@yahoo.com.mx](mailto:edcast14@yahoo.com.mx)<sup>2</sup>  
Teléfonos (55) 5624 2000 ext. 73062

### Resumen

*En el presente artículo se expone un método de cálculo de las pérdidas de energía eléctrica en el núcleo magnético del motor de inducción durante su arranque óptimo en tiempo. El motor está alimentado por voltaje generado por el inversor PWM senoidal. En el modelo matemático del motor de inducción, se toma en consideración los transitorios electromagnéticos y la saturación del material magnético. Se presenta un ejemplo de cálculo para un motor de inducción de 500 hp.*

**Palabras clave:** motor de inducción, modelo matemático, simulación, control óptimo

### Introducción

Con los avances industriales y la imperiosa necesidad de variar la velocidad de los motores eléctricos (transporte eléctrico) [1] es necesario alimentar al motor de inducción por una forma de onda no senoidal, esto ocurre cuando es necesario controlar la velocidad del motor por medio de las variaciones de la frecuencia y de la amplitud del voltaje de alimentación [12]. Para este propósito se recurre frecuentemente a la técnica de voltaje PWM senoidal. La alimentación del motor de inducción por un voltaje PWM senoidal afecta el comportamiento de este, por ejemplo, se incrementan las pérdidas magnéticas del motor de inducción provocadas por las corrientes giratorias (de eddy) y la histéresis. En este artículo se presenta un método de cálculo de pérdidas magnéticas durante el arranque óptimo en tiempo del motor de inducción alimentado por voltaje PWM senoidal. También se investiga la influencia de la forma PWM senoidal de alimentación en dichas pérdidas.

Para llevar a cabo la investigación se usa el modelo matemático del motor de inducción con control óptimo en tiempo, al cual se le aplicará una forma de onda no senoidal (PWM senoidal) y se obtendrán los resultados

### Modelo del motor

El modelo matemático del motor de inducción aceptado para realizar las simulaciones considera los transitorios electromagnéticos y la saturación del hierro, el cual se basa en las siguientes suposiciones [2]:

- 1) El motor de inducción de jaula de ardilla y el convertidor de frecuencia de voltaje que alimenta al motor, son simétricos
- 2) Las resistencias y las inductancias son constantes.

Bajo estas suposiciones las ecuaciones que describen al motor de inducción de doble fase equivalente, expresadas en las coordenadas d-q inmóviles, son las siguientes [2]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_{1d}}{dt} &= u_{1d} + \frac{R_1 \omega_n}{X_1} (\psi_{od} - \psi_{1d}) \\ \frac{d\psi_{1q}}{dt} &= u_{1q} + \frac{R_1 \omega_n}{X_1} (\psi_{oq} - \psi_{1q}) \\ \frac{d\psi'_{2d}}{dt} &= -\omega_r \psi'_{2q} + \frac{R_2 \omega_n}{X_2} (\psi_{od} - \psi'_{2d}) \\ \frac{d\psi'_{2q}}{dt} &= \omega_r \psi'_{2d} + \frac{R_2 \omega_n}{X_2} (\psi_{oq} - \psi'_{2q}) \\ \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{3 p^2 \omega_n X_0}{2 F J} (\psi'_{2d} \psi_{1q} - \psi_{1d} \psi'_{2q}) - p \frac{M_0}{J} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\psi_{od} = \frac{X_o X_2}{F} \psi_{1d} + \frac{X_o X_1}{F} \psi'_{2d} - \frac{X_1 X_2}{F} f(\psi_{od}) \quad (2)$$

$$\psi_{oq} = \frac{X_o X_2}{F} \psi_{1q} + \frac{X_o X_1}{F} \psi'_{2q} - \frac{X_1 X_2}{F} f(\psi_{oq}) \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} f(\psi_{od}) &= \begin{cases} 0 & \text{para } \psi_o = 0 \\ \frac{\psi_{od}}{\psi_o} f(\psi_o) & \text{para } \psi_o \neq 0 \end{cases} \\ f(\psi_{oq}) &= \begin{cases} 0 & \text{para } \psi_o = 0 \\ \frac{\psi_{oq}}{\psi_o} f(\psi_o) & \text{para } \psi_o \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\psi_o = \sqrt{\psi_{od}^2 + \psi_{oq}^2} \quad (5)$$



$$f(\psi_o) = \begin{cases} 0 & \text{para } i_0 \leq i_{0\max} \\ \frac{X_0}{\omega_n} (i_0 - i_{0\max}) & \text{para } i_0 > i_{0\max} \end{cases} \quad (6)$$

$$i_{0\max} = \frac{u_m}{\sqrt{R_1^2 + (X_0 + X_1)^2}} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} i_{1d} &= \frac{\omega_n}{X_1} (\psi_{1d} - \psi_{0d}) \\ i_{1q} &= \frac{\omega_n}{X_1} (\psi_{1q} - \psi_{0q}) \\ i'_{2d} &= \frac{\omega_n}{X_2} (\psi'_{2d} - \psi_{0d}) \\ i'_{2q} &= \frac{\omega_n}{X_2} (\psi'_{2q} - \psi_{0q}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$i_1 = \sqrt{i_{1d}^2 + i_{1q}^2} \quad (9)$$

$$i'_2 = \sqrt{i'_{2d}{}^2 + i'_{2q}{}^2} \quad (10)$$

$$i_o = \sqrt{2} I_o = \sqrt{(i_{1d} + i'_{2d})^2 + (i_{1q} + i'_{2q})^2} \quad (11)$$

$$i_1(t) = i_{1d} \quad (12)$$

$$i'_2(t) = i'_{2d} \quad (13)$$

$$i_o(t) = i_{1d} + i'_{2d} \quad (14)$$

donde:

$$F = (X_o + X_1)(X_o + X_2) - X_o^2$$

$J$  es el par de inercia del motor

$p$  es el número de pares de polos del motor

$R_2'$  es la resistencia de devanado del rotor referido al circuito del estator

$t$  es el tiempo

$u_{1d}, u_{1q}$  son las componentes en las coordenadas d-q del voltaje que alimenta al motor de doble fase equivalente

$X_2'$  es la reactancia de dispersión de una fase del devanado del rotor referido al circuito de estator, calculada para la frecuencia nominal de la corriente del estator

$\psi'_{2d}, \psi'_{2q}$  son las componentes en las coordenadas d-q del flujo magnético concatenado con el devanado del rotor, referido al circuito de estator

$\psi_{1d}, \psi_{1q}$  son las componentes en las coordenadas d-q del flujo magnético concatenado con el devanado del estator

$\psi_{0d}, \psi_{0q}$  son las componentes en las coordenadas d-q del flujo de magnetización

$i_{1d}, i_{1q}$  son las componentes en las coordenadas d-q de la corriente de estator del motor de doble fase equivalente

$i'_{2d}, i'_{2q}$  son las componentes en las coordenadas d-q de la corriente del rotor del motor de doble fase equivalente, referida al circuito de estator

$i_2$  es la amplitud de la corriente del rotor del motor de doble fase equivalente, referida al circuito del estator

$i_1$  es la amplitud de la corriente del estator del motor de doble fase equivalente

$i_1(t)$  es la corriente de estator del motor de doble fase equivalente

$i'_2(t)$  es la corriente del rotor del motor de doble fase equivalente, referida al circuito del estator.

### Control óptimo en tiempo

El control óptimo en tiempo de velocidad del motor de inducción se diseña bajo la suposición que la alimentación del motor es por el convertidor de frecuencia de corriente senoidal. Entonces la corriente del estator y el modelo del motor de doble fase equivalente descrito en las coordenadas d-q inmóviles, se expresan como sigue [7]:

$$\left. \begin{aligned} i_{1d} &= i_1 \cos(\omega t) \\ i_{1q} &= i_1 \sin(\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi'_{2d}}{dt} &= -\omega_r \psi'_{2q} + \frac{R_2' X_0}{(X_0 + X_2')} i_1 \cos(\omega t) + \\ &\quad - \frac{R_2' \omega_n}{(X_0 + X_2')} \psi'_{2d} - \frac{R_2' \omega_n}{(X_0 + X_2')} f(\psi_{0d}) \\ \frac{d\psi'_{2q}}{dt} &= \omega_r \psi'_{2d} + \frac{R_2' X_0}{(X_0 + X_2')} i_1 \sin(\omega t) + \\ &\quad - \frac{R_2' \omega_n}{(X_0 + X_2')} \psi'_{2q} - \frac{R_2' \omega_n}{(X_0 + X_2')} f(\psi_{0q}) \\ \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{3p^2 X_0 i_1}{2J(X_0 + X_2')} [\psi'_{2d} \sin(\omega t) - \psi'_{2q} \cos(\omega t)] + \\ &\quad + \frac{3p^2 \omega_n X_0 X_2'}{2JF(X_0 + X_2')} [\psi'_{2q} f(\psi_{0d}) - \psi'_{2d} f(\psi_{0q})] + \\ &\quad - M_0 \frac{P}{J} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

donde  $f(\psi_{0d}), f(\psi_{0q})$  se describen por (4)-(7)

Utilizando el principio de máximo de Pontryagin [8] se puede sintetizar el control óptimo en tiempo de velocidad de motores de inducción que limita la amplitud de la corriente del estator al valor deseado.

$$i_1 \leq i_1^o \quad (17)$$

donde:

$i_1^o$  es el valor admisible de la amplitud de la corriente del estator del motor. Se puede demostrar que el control óptimo en la forma implícita se describe como sigue [9]:

$$i_1 = i_1^o \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \omega t &= \frac{V_2 R_2' + V_3 \frac{3p^2}{2J} \psi_{2d}'}{\sqrt{\left[ -V_1 R_2' + V_3 \frac{3p^2}{2J} \psi_{2q}'} \right]^2 + \left[ V_2 R_2' + V_3 \frac{3p^2}{2J} \psi_{2d}'} \right]^2}} \\ \cos \omega t &= \frac{V_1 R_2' - V_3 \frac{3p^2}{2J} \psi_{2q}'}{\sqrt{\left[ -V_1 R_2' + V_3 \frac{3p^2}{2J} \psi_{2q}'} \right]^2 + \left[ V_2 R_2' + V_3 \frac{3p^2}{2J} \psi_{2d}'} \right]^2}} \end{aligned} \right\} (19)$$

donde  $V_1, V_2, V_3$  son las variables conjugadas que satisfacen las ecuaciones conjugadas siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= -V_2 \omega_r + \frac{R_2' \omega_n}{(X_0 + X_2')} V_1 - \frac{3p^2 X_0}{2J(X_0 + X_2')} V_3 i_1 \sin(\omega t) + \\ &\quad - \frac{3p^2 \omega_n X_0 X_2'}{2JF(X_0 + X_2')} V_3 f(\psi_{0q}) \\ \frac{dV_2}{dt} &= V_1 \omega_r + \frac{R_2' \omega_n}{(X_0 + X_2')} V_2 + \frac{3p^2 X_0}{2J(X_0 + X_2')} V_3 i_1 \cos(\omega t) + \\ &\quad - \frac{3p^2 \omega_n X_0 X_2'}{2JF(X_0 + X_2')} V_3 f(\psi_{0q}) \\ \frac{dV_3}{dt} &= V_1 \psi_{2q}' - V_2 \psi_{2d}' + \frac{p}{J} \frac{\partial M_0}{\partial \omega_k} V_3 \end{aligned} \right\} (20)$$

Para encontrar el control en la forma explícita hay que resolver el problema de doble valor a la frontera (que consiste en la búsqueda de los valores iniciales de las variables conjugadas), utilizando las ecuaciones canónicas (16) (20) y aplicando el control óptimo implícito (18) (19). Conociendo los valores iniciales de las variables conjugadas, se puede determinar el control óptimo en tiempo explícito resolviendo las ecuaciones canónicas con la aplicación del control (18), (19) y la formula:

$$\omega(t) = \omega_1(t) = \cos \omega t \frac{d(\sin \omega t)}{dt} - \sin \omega t \frac{d(\cos \omega t)}{dt} \quad (21)$$

El voltaje de alimentación del motor de doble fase equivalente (1)-(14), necesario para la simulación del arranque óptimo en tiempo del motor de inducción se puede determinar como sigue [11]:

$$u_{1d} = \frac{X_1}{\omega_n} i_1^0 \frac{d(\cos \omega t)}{dt} + \frac{d(\psi_{0d})}{dt} + R_1 i_1 \cos \omega t \quad (22)$$

$$u_{1q} = \frac{X_1}{\omega_n} i_1^0 \frac{d(\sin \omega t)}{dt} + \frac{d(\psi_{0q})}{dt} + R_1 i_1 \sin \omega t$$

$$u = \sqrt{u_{1d}^2 + u_{1q}^2} \quad (23)$$

### Voltaje de alimentación PWM senoidal.

En la Fig. 1 podemos apreciar el puente inversor trifásico [5].

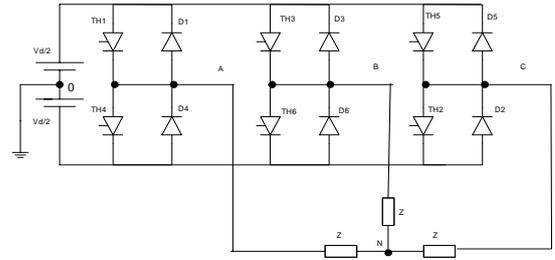


Fig.1 Puente inversor trifásico.

Se supone que cada medio-puente está controlado por los trenes de pulsos defasados entre si sobre  $120^\circ$  eléctricos. En consecuencia los voltajes de líneas A, B, C respecto el punto 0 (la mitad del voltaje continuo que alimenta al inversor), también llamados los voltajes polares o los voltajes de bornes A, B, C, están defasados entre si sobre  $120^\circ$  eléctricos.

Se cumplen las siguientes ecuaciones [5]:

$$\left. \begin{aligned} V_{AN} &= \frac{1}{3}(2V_{A0} - V_{B0} - V_{C0}) \\ V_{BN} &= \frac{1}{3}(2V_{B0} - V_{C0} - V_{A0}) \\ V_{CN} &= \frac{1}{3}(2V_{C0} - V_{A0} - V_{B0}) \\ V_{AB} &= V_{A0} - V_{B0} \\ V_{BC} &= V_{B0} - V_{C0} \\ V_{CA} &= V_{C0} - V_{A0} \end{aligned} \right\} (24)$$

donde:

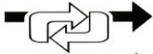
$V_{AN}, V_{BN}, V_{CN}$  son los voltajes de las fases A, B y C de la carga (los voltajes de línea respecto el punto neutral N),  $V_{A0}, V_{B0}, V_{C0}$  son los voltajes de los bornes A, B, C,  $V_{AB}, V_{BC}, V_{CA}$  son los voltajes entre líneas.

Transformando la máquina trifásica a la de doble fase equivalente expresada en las coordenadas d-q (directa y en cuadratura) inmóviles, hay que transformar también los voltajes de fases  $V_{AN}, V_{BN}, V_{CN}$  de la máquina trifásica a los voltajes de fases  $u_{1d}, u_{1q}$  de la máquina bifásica. Dicha transformación se realiza según las siguientes fórmulas [4]:

$$\left. \begin{aligned} u_{1d} &= \frac{1}{3}(2V_{A0} - V_{B0} - V_{C0}) = V_{AN} \\ u_{1q} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(V_{B0} - V_{C0}) \end{aligned} \right\} (25)$$

Como se nota de las fórmulas (24) y (25), para determinar los voltajes de las fases de la carga, hay que saber como varían en el tiempo los voltajes de bornes A, B, C.

Para determinar la secuencia de conmutación de los dispositivos semiconductores de potencia del inversor, es importante conocer las técnicas para generar las señales de disparo. Dichas señales se producen por medio de la comparación de la onda triangular de la frecuencia alta y la amplitud fija (llamada onda portadora) común para todas las fases del inversor y las ondas senoidales de la frecuencia baja, individuales



**APMCA** Cada fase y desplazadas entre si sobre 120 grados eléctricos (llamadas las ondas de referencia). En este tipo de inversores PWM la secuencia de disparo de los dispositivos semiconductores se presenta en la Tabla 1:

Tabla 1. Secuencia de disparo de los dispositivos semiconductores

Cuando	Conduce el tiristor	Da como resultado
$v_{tri} \geq v_{sen,a}$	TH4	$V_{A0} = -V_d / 2$
$v_{tri} < v_{sen,a}$	TH1	$V_{A0} = +V_d / 2$
$v_{tri} \geq v_{sen,b}$	TH6	$V_{B0} = -V_d / 2$
$v_{tri} < v_{sen,b}$	TH3	$V_{B0} = +V_d / 2$
$v_{tri} \geq v_{sen,c}$	TH2	$V_{C0} = -V_d / 2$
$v_{tri} < v_{sen,c}$	TH5	$V_{C0} = +V_d / 2$

En la tabla 1.  $v_{tri}$  es el valor de voltaje de la onda portadora y  $v_{sen,a}, v_{sen,b}, v_{sen,c}$  son los voltajes de las ondas de referencia de las fases A, B y C.

La relación entre la frecuencia de la onda portadora y la onda de referencia se define como el índice de modulación de frecuencia [10]:

$$m_f = \frac{f_{tri}}{f_{sen}} \quad (26)$$

donde:

$m_f$  es el índice de modulación de frecuencia,

$f_{tri}$  es la frecuencia de la onda portadora,

$f_{sen}$  es la frecuencia de la onda de referencia.

En el trabajo se usó el valor del índice de modulación de frecuencia igual a 9 ( $m_f = 9$ ). La relación entre las amplitudes de las ondas de referencia y portadora se define como el índice de modulación de amplitud [10]:

$$m_a = \frac{V_{m,sen}}{V_{m,tri}} \quad (27)$$

donde:

$m_a$  es el índice de modulación de amplitud,

$V_{m,sen}$  es la amplitud de la onda de referencia,

$V_{m,tri}$  es la amplitud de la onda portadora.

Si el índice de modulación de amplitud es menor a 1, entonces la amplitud de la armónica fundamental del voltaje de fase de salida del inversor PWM senoidal es idealmente proporcional a este índice [11]:

$$u_{pf} = m_a \frac{V_d}{2} \quad \text{para } 0 \leq m_a \leq 1 \quad (28)$$

donde  $u_{pf}$  es la amplitud de la primera armónica del voltaje de fase generado por el inversor PWM senoidal.

Tomando esto en consideración así como el hecho de que, durante el control óptimo en tiempo la amplitud del voltaje senoidal de alimentación puede sobrepasar su valor nominal  $u_m$ , se aceptó el valor del índice de modulación de amplitud igual a 0.8 ( $m_a = 0.8$ ).

En el inversor PWM senoidal se pide que la amplitud de la primera armónica entre fases del voltaje generado por él, sea igual a la amplitud nominal entre fases del voltaje de alimentación senoidal [6]. La amplitud de la primera armónica de voltaje entre fases del inversor PWM senoidal es:

$$u_p = u_{pf} \sqrt{3} = \frac{m_a V_d \sqrt{3}}{2} \quad (29)$$

La amplitud del voltaje entre fases senoidal es:

$$u_p = u_m \sqrt{3} \quad (30)$$

Tomando en consideración (29) y (30), se puede determinar el valor del voltaje continuo  $V_d$  que alimenta al inversor PWM senoidal como sigue:

$$V_d = \frac{2u_m}{m_a} \quad (31)$$

En seguida en la Fig. 2 se presenta la portadora triangular y las ondas de referencias senoidales y en la Fig. 3 se presenta el voltaje del eje directo para un motor de inducción de 500 h.p. trabajando en el estado estacionario, alimentado por el inversor PWM senoidal con los valores de los índices de modulación de frecuencia y de amplitud mencionados anteriormente ( $m_f = 9, m_a = 0.8$ ).

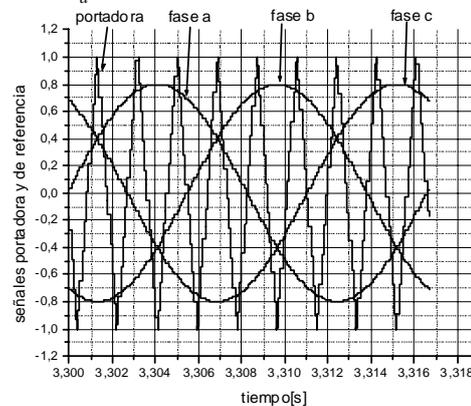


Fig. 2 La onda portadora triangular y las ondas de referencia senoidales

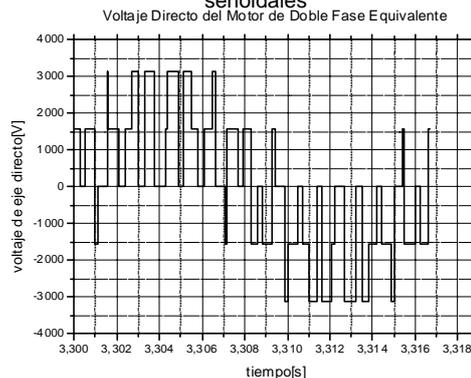
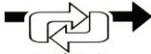


Fig. 3 Voltaje de eje directo



### Alimentación magnéticas

Cuando la alimentación es senoidal las pérdidas magnéticas por unidad de masa (medidas en J/kg), obtenidas durante el tiempo  $t_r$  se describen como sigue [1,2,7]:

$$P_m = \int_0^{tr} B(t)^2 \omega(t) (A_z \omega(t) + B_z) dt \quad (32)$$

donde:

$$A_z = \frac{\gamma_c d (d + 1.628l)}{24 \rho_m}, \quad B_z = \frac{\varepsilon}{200 \pi}$$

$d$  es el grosor de la lámina del núcleo magnético del motor, medido en (m),

$B(t)$  es la densidad de flujo magnético medido en (T),  $\gamma_c$  es la conductividad específica de la lámina, medida en (S/m),

$\rho_m$  es la densidad específica de la lámina, medida en ( $\text{kg/m}^3$ ),

$\omega(t) = 2\pi f(t)$  es la frecuencia angular de la corriente senoidal que provoca las pérdidas magnéticas, medida en (rd/s)

( $f(t)$  es la frecuencia de esta corriente medida en (Hz)),

$l$  es la distancia entre las paredes de los dominios magnéticos que forman bandas paralelas de grosor  $d$ .  $\varepsilon$  es un coeficiente constante de valor dependiente del tipo de la lámina.

Como se nota de la fórmula (32), para un material magnético dado las pérdidas magnéticas dependen exclusivamente del valor de la densidad de flujo magnético  $B(t)$  y de la frecuencia de la corriente que provoca dichas pérdidas. El valor de la densidad de flujo magnético se puede describir de la forma siguiente [7]:

$$B(t) = \begin{cases} B_m \frac{i_o}{i_{o\max}} & \text{para } i_o \leq i_{o\max} \\ B_m & \text{para } i_o > i_{o\max} \end{cases} \quad (33)$$

donde  $i_o$  es la amplitud de la corriente de magnetización que varía en el tiempo durante el cambio de velocidad del motor,  $B_m$  es la densidad de flujo magnético de saturación del material magnético del motor, ver Fig. 4

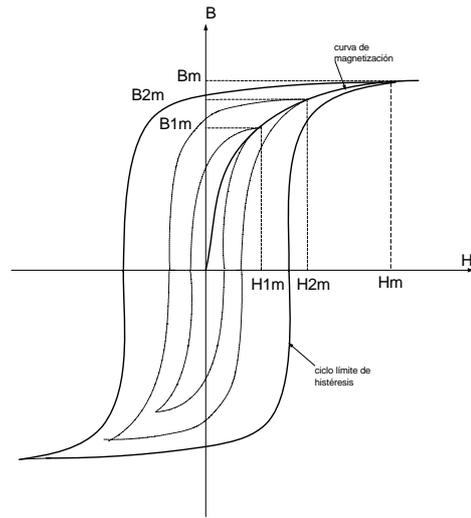


Fig.4 Ciclo de histéresis para diferentes valores de intensidad del campo magnético.

Cuando el voltaje que alimenta al motor de inducción tiene la forma no senoidal, en la corriente de magnetización aparecen las armónicas de orden mayor. Cada una de estas armónicas provoca las pérdidas magnéticas por separado [3]. Las pérdidas totales son entonces iguales a la suma de las componentes individuales descritas por la fórmula (32).

$$P_{mt} = \sum_k \int_0^{tr} B_k(t)^2 \omega_k(t) (A_z \omega_k(t) + B_z) dt \quad (34)$$

donde:

$P_{mt}$  son pérdidas magnéticas totales por unidad de masa.

$B_k(t)$  es el valor de la densidad de flujo magnético provocado por la  $k$ -ésima armónica de la corriente de magnetización  $i_{ok}(t)$ .

$k$  es el número de la armónica.

$\omega_k(t) = k\omega_1(t)$  es la frecuencia angular de la  $k$ -ésima armónica de la corriente de magnetización  $i_{ok}(t)$ .

$\omega_1(t)$  es la frecuencia angular de la primera armónica.

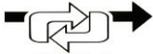
El valor de la densidad de flujo magnético  $B_k(t)$  provocada por la  $k$ -ésima armónica, se puede determinar de la fórmula (33) como sigue:

$$B_k(t) = \begin{cases} B_m \frac{i_{ok}}{i_{o\max}} & \text{para } i_{ok} \leq i_{o\max} \\ B_m & \text{para } i_{ok} > i_{o\max} \end{cases} \quad (35)$$

donde:

$i_{ok}$  es la amplitud de la  $k$ -ésima armónica que varía en el tiempo durante el arranque.

Como se observa, para calcular las pérdidas magnéticas totales sobre la base de la corriente de magnetización, hay que determinar el espectro de dicha corriente en cada instante durante el arranque (las amplitudes  $i_{ok}$  de todas las armónicas de las frecuencias angulares  $k\omega_1$  en cada momento del arranque) y luego, usándose la fórmula (35), se determina  $B_k(t)$  correspondientes a las



Amplitudes en el tiempo de las amplitudes  $i_{ok}$ .

Finalmente de la fórmula (34) se calcula las pérdidas por unidad de masa.

Para calcular el espectro de la corriente de magnetización, hay que determinar la curva de esta corriente en el estado estacionario del trabajo del motor de inducción con alimentación PWM y con una carga constante. Por lo tanto es necesario calcular el espectro de la corriente de magnetización solamente en "n" instantes  $t_{1i}$ , (donde  $i=1,2,\dots,n$ ) elegidos, que cubren todo el intervalo de tiempo de arranque, además de fijar las condiciones de arranque (la frecuencia y amplitud del voltaje de alimentación, el deslizamiento y la carga), correspondientes a estos instantes elegidos. Aparece entonces la necesidad de determinar los valores de la densidad de flujo de magnetización entre estos instantes (por medio de alguna interpolación).

Los datos de la curva de la corriente de magnetización en los instantes elegidos  $t_{1i}$ , preparados en la forma adecuada, sirven para determinar los espectros de dicha curva en los momentos  $t_{1i}$  utilizando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT)

Los instantes  $t_{1i}$  se eligen basándose en la forma de la curva de la amplitud de la corriente de magnetización, obtenida durante el arranque.

### Ejemplo numérico

Para ilustrar la aplicación del método de cálculo propuesto, se presenta un ejemplo numérico para un motor de 500 h.p., que tiene los datos siguientes:

$$u_m = 1877.94V \quad p = 2 \quad \omega_n = 377 \text{ rd / s,}$$

$$R_1 = 0.262\Omega \quad R_2' = 0.187\Omega \quad X_1 = X_2' = 1.206\Omega,$$

$$X_o = 54.02\Omega \quad J = 11.06 \text{ kgm}^2 \quad i_{o\text{max}} = 150 \text{ A}$$

El núcleo magnético del motor está construido con una lámina anisótropa de laminado en frío que contiene 4% de silicio. Los datos de la lámina son:

$$B_m = 1.5T \quad l = 0.001m \quad \gamma_c = 2.096 \times 10^6 \text{ S / m}$$

$$d = 0.0003m \quad \rho_m = 7.65 \times 10^3 \text{ kg / m}^3 \quad \varepsilon = 1.5m^4 / H \text{ kg}$$

$$A_z = 6.584 \times 10^{-6} m^4 / \Omega \text{ kg} \quad B_z = 2.387 \times 10^{-3} m^4 / H \text{ kg}$$

En la figura 5 se muestra la forma de onda con la cual se alimenta al motor de inducción.

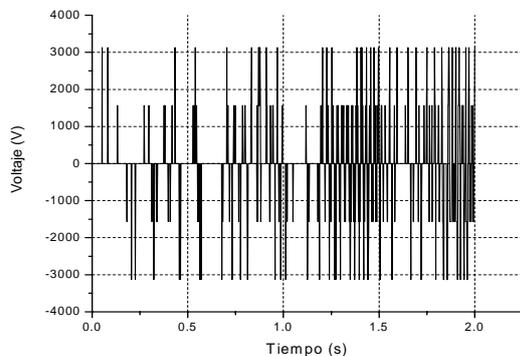


Fig. 5 Voltaje de alimentación PWM senoidal de una fase.

El arranque óptimo en tiempo del motor dura cerca de 2.0 s. La curva de la amplitud de la corriente de magnetización obtenida durante la simulación se presenta en la Fig. 6.

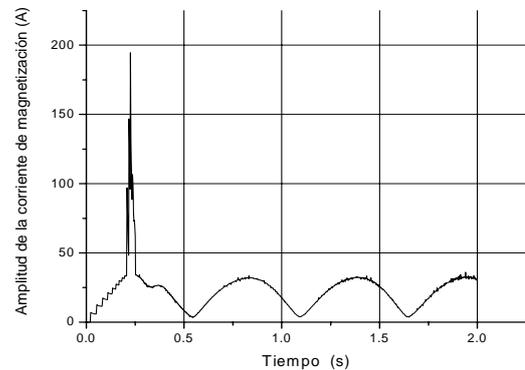


Fig. 6 Amplitud de la corriente de magnetización

Basándose en esta curva, se eligen 63 instantes de tiempo a partir de los cuales se almacenan los datos de la curva de la corriente de magnetización, con el fin de calcular los espectros.

Como ejemplo en la Fig. 7 se presenta la forma de onda de la corriente de magnetización para un instante  $t_1 = 0.03s$

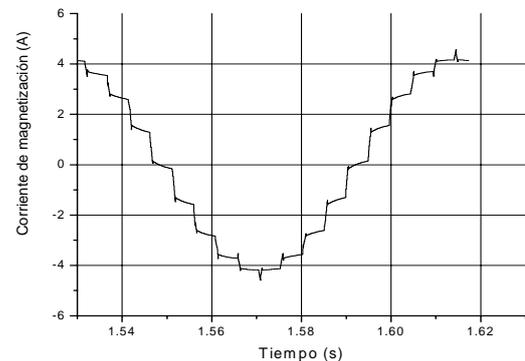


Fig. 7 Corriente de magnetización para  $t_1 = 0.03s$

En la Fig. 8 se presenta su respectivo espectro.

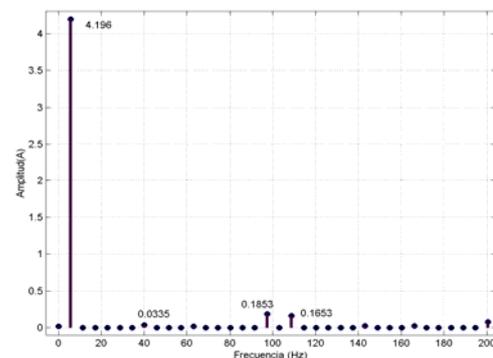


Fig. 8 Espectro de la corriente de magnetización para  $t_1 = 0.03s$

Una vez concluidos los cálculos de los espectros de la corriente de magnetización para los instantes elegidos,



ASMECA determinan los valores de la densidad de flujo de magnetización, para cada una de las 50 armónicas significativas, utilizando para esto la interpolación escalonada.

La tabla 2 presenta el resumen de los resultados.

Tabla 2

perd. magnet. armónica nr	Pérdidas magnéticas [J/kg]
1	2.072338787968749
5	9.389988524170096E-003
7	1.168009101065875E-002
11	9.509716120810143E-003
13	3.762244054067528E-003
17	8.672625252438859E-002
19	8.930741521192422E-002
23	5.435185268893018E-003
25	1.670961868424402E-002
29	1.779567135852544E-002
31	6.811058656678498E-003
35	2.813506466563655E-002
37	2.902058153438676E-002
41	1.224689471991985E-002
43	1.591362075722439E-002
47	1.803841521791688E-002
49	1.243961364818459E-002
perdidas magnéticas totales:	2.445260219927139

### Conclusiones

Con base en los resultados obtenidos, se puede afirmar que el método propuesto de cálculo de las pérdidas de energía eléctrica en el material magnético del motor de inducción durante el arranque óptimo en tiempo, sirve para evaluar la influencia de la forma PWM senoidal de voltaje de alimentación en las pérdidas magnéticas.

La alimentación del motor por voltaje PWM senoidal provoca la aparición en la corriente de magnetización de las armónicas impares de orden mayor. Dichas armónicas provocan un aumento en las pérdidas magnéticas. Para el motor investigado dicho aumento es del orden del 18% con respecto a la senoidal.

### Referencias

[1] G. Calderon-Lopez, A. J. Forsyth, and D. R. Nuttall, "Design and Performance Evaluation of a 10-kW Interleaved Boost Converter for a Fuel Cell Electric Vehicle," 5th International Power Electronics and Motion Control Conference, Shanghai, China, vol. 2, pp. 1328-1332, 2006.

[2] L. Kawecki, T. Niewierowicz, "Pérdidas Magnéticas durante el Arranque Ordinario de Motores de Inducción", Memoria de 1<sup>er</sup> Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas, SEPI-ESIME-IPN, México D.F., 11-15 de Noviembre de 1996, páginas 42-47

[3] Eugen A. Klingshirn, Howard E. Jordan, "Polyphase Induction Motor Performance and Losses on Nonsinusoidal Voltage Sources", IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems, Vol. 3, Pag 87-93, March 1968, páginas 624-631

[4] J. Meisel, "Principles of Electromechanical Energy Conversion", McGraw-Hill 1966

[5] J.M.D. Murphy, F.G. Turnbull, "Power Electronic Control of AC Motors", Pergamon Press 1988

[6] W.I. Gruzov, J.A. Sabilin, "Sistemas de Propulsión Asíncrona con Convertidores Estáticos", (en ruso), Energía, Leningrado 1970

[7] L. Kawecki "Pérdidas magnéticas durante el arranque óptimo en tiempo del motor de inducción alimentado por voltaje escalonado" Memoria de VI Conferencia Internacional Simulación Computacional y Aplicaciones Industriales, Instituto Tecnológico de Tijuana, The McLeod Institute for simulation Sciences., Tijuana BC México. pp 186-193

[8] M. Athans, P.L. Falb "Optimal control" Ed. Mc Graw-Hill internacional 1966.

[9] L. Kawecki, T. Niewierowicz, "Control óptimo en tiempo de velocidad de motores de inducción tomando en consideración transitorios electromagnéticos y saturación del material magnético" Memoria de conferencia internacional IEEE Sección México, capítulo de potencia, décima reunión de verano, num. 1 vol. 4, julio 13-18 de 1997. Acapulco Gro. Pág 112-119.

[10] Daniel W. Hart "Electrónica de Potencia", Prentice Hall 2001.

[11] Ned Mohan, Tore M. Undeland, William P. Robbins "Power Electronics, converters, applications, and design", John Wiley & Sons, Inc. 1995

[12] P. James, A. Forsyth, G. Calderon-Lopez and V. Pickert, "DC-DC converter for hybrid and all electric vehicles," 24th International Battery, Hybrid and Fuel Cell Electric Vehicle Symposium and Exhibition, Stavanger, Norway, vol., pp. 1-9, 2009.

**LESZEK KAWECKI** nació en Krasnystaw, Polonia. Terminó Licenciatura y Maestría con especialidad en Control Automático y Telemecánica en la Facultad de Electrónica del Politécnico de Varsovia. Obtuvo el grado de Doctor en Ciencias Técnicas con especialización en Control Óptimo en el mismo Politécnico, Facultad de Electricidad, en el año 1977. En los años 1971-1979 trabajó en el Politécnico de Lublin, Polonia, como Profesor e Investigador. A partir de Septiembre de 1979 trabaja en el Instituto Politécnico Nacional, México, como Profesor Titular e Investigador. Las disciplinas de investigación son: control óptimo de procesos industriales, computación analógica, digital e híbrida, electrónica.

### LÁZARO EDUARDO CASTILLO BARRERA

Actualmente es profesor titular en la ESIME Unidad Culhuacan del IPN, en 2004 obtuvo el grado Maestro en Ciencias en Ingeniería Eléctrica en la SEPI Unidad Zacatenco del IPN. Realizó sus estudios de nivel superior en la ESIME-CUL-IPN, donde obtuvo el título de Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica, con especialidad en electrónica, en el año 2000. Miembro de Comité Directivo de la AMICEE Las disciplinas de interés son: control óptimo, electrónica analógica y digital, instrumentación virtual.