

# Identificación de sistemas lineales en tiempo finito vía modos deslizantes de orden superior

J. Davila

Dirección General de Servicios de Cómputo Académico UNAM  
en colaboración con el Centro de Investigación y Estudios Avanzados (CINVESTAV-IPN)  
Av. IPN 2508, Col. San Pedro Zacatenco, Gustavo A. Madero, México D.F.,  
jadavila@unam.mx  
Teléfono: (52)-55-57473742

M. Basin

Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL)  
Av. Universidad s/n. Ciudad Universitaria San Nicolás de los Garza, Nuevo León, C.P. 66451 Mexico  
mbasin@cfm.uanl.mx

**Resumen**—En este artículo se presenta un método de identificación paramétrica basado en la aplicación de los modos deslizantes de orden superior. El método está basado en el uso de la inyección de salida equivalente. Aprovechando la observación del estado en tiempo finito, se aplica una técnica de reconstrucción algebraica para recuperar los parámetros del sistema utilizando una ventana de tiempo finita.

**Palabras clave:** Identificación de parámetros, modos deslizantes, observadores.

## I. INTRODUCCIÓN

La teoría de identificación moderna (Eykhoff y Parks, 1990), (Ljung, 1999), está dedicada básicamente, a la extracción de señales y propiedades dinámicas de los sistemas tomando como base la medición de ciertos datos. La identificación de sistemas dinámicos está dividida en dos ramas básicas: la estimación de parámetros tomando como base la medición total de las variables de estado, y por otro lado, el uso de una estimación del estado para reconstruir completamente la dinámica del sistema.

La identificación de parámetros ha sido un área muy activa en las últimas décadas. El problema básico considerado, hace referencia a la clase de sistemas cuya dinámica depende de manera lineal en los parámetros desconocidos (vea por ejemplo, (Soderstrom y Stoica, 1989), (Ljung, 1999)). Una característica recurrente en este tipo de publicaciones, es que el vector de estados es considerado como conocido, por lo que se deberá considerar que la medición del mismo es posible. Debido a este requerimiento, observadores de estados con convergencia en tiempo finito (vea, (Davila *et al.*, 2005), (Engel y Kreisselmeier, 2002), (Fridman *et al.*, 2007)) resultan una buena herramienta para la solución de problemas de estimación paramétrica.

La observación robusta exacta es un área de intensa actividad dentro de la teoría de modos deslizantes (vea (Levant, 1998), (Edwards *et al.*, 2006), (Bartolini *et al.*,

2008)). Entre las grandes ventajas que proporcionan los observadores por modos deslizantes, destacan su simplicidad de aplicación y la convergencia del error de estimación a cero en tiempo finito. Como resultado de la mencionada convergencia en tiempo finito, la inyección de salida equivalente puede ser utilizada para la solución de problemas de identificación (vea por ejemplo, (Utkin, 1978), (Shtessel y Poznyak, 2005), (Davila *et al.*, 2006)).

En (Levant, 1998) es diseñado un observador por modos deslizantes utilizando el algoritmo de super-twisting, descrito en (Levant, 1993). Dicho algoritmo fue explotado para el diseño de observadores (Davila *et al.*, 2005) y algoritmos de identificación paramétrica (Davila *et al.*, 2006).

En (Levant, 2003) es presentado un diferenciador de orden arbitrario utilizando modos deslizantes de orden superior, el algoritmo garantiza convergencia en tiempo finito al valor real de las derivadas de una señal acotada. El uso de este algoritmo para la construcción de observadores es presentado en (Fridman *et al.*, 2007), sin embargo su aplicación para identificación paramétrica no es considerado.

En este trabajo se considera el uso del observador por modos deslizantes de orden superior (MDOS) presentado en (Fridman *et al.*, 2007), con fines de identificación paramétrica. Se considera que parte del modelo del sistema es conocido.

La convergencia en tiempo finito de este algoritmo permite utilizar la inyección de salida equivalente para la reconstrucción de la incertidumbre paramétrica. En el caso cuando el estado del sistema es continuo y acotado, es posible extender el algoritmo de MDOS para obtener una inyección de salida equivalente continua, y a partir de ella, diseñar un algoritmo de identificación paramétrica que explote dicha propiedad.

En la sección II, es descrita la clase de sistemas estudiados. El diseño del observador por MDOS es descrito en la sección III. La inyección de salida equivalente es obtenida

en la sección IV. Aprovechando la convergencia en tiempo finito del observador y usando como base la inyección de salida equivalente, en la sección V es presentado un algoritmo de identificación en tiempo finito para sistemas lineales. Un ejemplo académico es presentado en la sección VI para ilustrar los resultados. Los comentarios finales son presentados en la sección VII.

## II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere el siguiente sistema lineal con incertidumbre paramétrica

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u \in \mathbb{R}^q$  es un vector de entradas conocido (i.e., control),  $y \in \mathbb{R}^p$  es la salida, las matrices  $A, B, C$  son conocidas y de dimensiones adecuadas, las matrices  $\Delta A, \Delta B$ , representan la incertidumbre paramétrica y se consideran desconocidas.

*Proposición 1:* Las matrices  $(A + \Delta A)$  y  $A$  son Hurwitz.

Se desea estudiar el problema de identificación paramétrica para sistemas de la forma (1). Se buscarán las condiciones necesarias para la identificación de los parámetros de las matrices  $\Delta A$  y  $\Delta B$  para esta clase de sistemas, bajo la consideración dada en la Proposición 1.

## III. DISEÑO DEL OBSERVADOR

La reconstrucción de los estados se realizará considerando un caso especial del observador por modos deslizantes de orden superior presentado por (Fridman *et al.*, 2007).

Sea  $m$  el número de renglones distintos a cero de la matriz extendida  $[\Delta A \quad \Delta B]$ , para cada renglón  $i$ , que contenga al menos un elemento distinto de cero, defina  $k_i$  como el número de columnas cuyos elementos son distintos de cero. Considere la siguiente representación para la parte incierta del sistema:

$$\Delta Ax + \Delta Bu = D\Theta(x, u)$$

donde  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es una matriz que contiene solo 1's y 0's, y tiene sólo  $m$  renglones con un elemento distinto de cero; el vector de elementos no lineales  $\Theta(x, u)$  está dado por:

$$\Theta(x, u) = \begin{bmatrix} \theta_1 \varphi_1(x, u) \\ \vdots \\ \theta_m \varphi_m(x, u) \end{bmatrix}$$

donde  $\theta_i \in \mathbb{R}^{1 \times k_i}$  corresponde al vector de incertidumbres y  $\varphi_i(x, u) \in \mathbb{R}^{k_i}$  es el vector de regresión correspondiente (Soderstrom y Stoica, 1989).

Sin pérdida de generalidad, el sistema (1) puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + D\Theta(x, u), \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (2)$$

La siguiente definición es utilizada para el diseño del observador:

*Definición 1:* (Trentelman *et al.*, 2001)  $s_0 \in \mathbb{C}$  es llamado un cero invariante de la tripleta  $\{A, D, C\}$  si  $\text{rank } R(s_0) < n + \text{rank}(D)$ , donde  $R$  es la matriz de Rosenbrock del sistema (2)

$$R = \begin{bmatrix} sI - A, & -D \\ C, & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

*Condición 1:* La tripleta  $\{A, D, C\}$  no tiene ceros invariantes.

Introduzcamos la siguiente definición:

*Definición 2:* Se dice que el vector de salidas  $y = Cx$  posee un vector de grado relativo completo respecto a la incertidumbre, si existe una combinación de salidas tal que el vector  $r = (r_1, \dots, r_m)$  asociado a dichas salidas, satisface:

$$c_i A^k D = 0, \quad k = 0, 1, \dots, r_i - 2, \quad (4)$$

$$c_i A^{r_i - 1} D \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5)$$

$$T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 A \\ \vdots \\ c_1 A^{r_1 - 1} \\ \vdots \\ c_m \\ \vdots \\ c_m A^{r_m - 1} \end{bmatrix}, \quad \text{rank } T = n \quad (6)$$

*Condición 2:* El sistema (1) tiene un vector de grado relativo completo respecto a la incertidumbre.

*Condición 3:* La entrada  $u$  y su derivada  $\dot{u}$  se encuentran acotadas, i.e., existen constantes  $u_0^+, u_1^+$  tales que  $\|u\| < u_0^+, \|\dot{u}\| < u_1^+$ .

El observador por modos deslizantes de orden superior está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Bu \\ y_z &= \bar{C}z \\ \hat{x} &= z + T^{-1}\bar{v}(y - y_z) \end{aligned} \quad (7)$$

donde la matriz  $T$  está definida en función del vector de grado relativo completo  $r$  (vea la definición 2).

El vector  $\bar{v}(y - y_z)$  está formado por una selección de renglones del vector extendido  $v(y - y_z)$  que está formado, a su vez, por la solución de la siguiente ecuación diferencial vectorial para cada componente de las salidas  $y$  y  $y_z$ :

$$\begin{aligned} \dot{v}_{i,1} &= w_{i,1} = -\alpha_{r_i+1} M_i^{1/(r_i+1)} |v_{i,1} - y_i + y_{z_i}|^{(r_i)/(r_i+1)} \text{sign}(v_{i,1} - y_i + y_{z_i}) + v_{i,2}, \\ \dot{v}_{i,2} &= w_{i,2} = -\alpha_{r_i} M_i^{1/(r_i)} |v_{i,2} - w_{i,1}|^{(r_i-1)/(r_i)} \text{sign}(v_{i,2} - w_{i,1}) + v_{i,3}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{i,r_i} &= w_{i,r_i} = -\alpha_2 M_i^{1/2} |v_{i,r_i} - w_{i,r_i-1}|^{1/2} \times \\ &\quad \text{sign}(v_{i,r_i} - w_{i,r_i-1}) + v_{i,r_i+1}, \\ \dot{v}_{i,r_i+1} &= -\alpha_1 M_i \text{sign}(v_{i,r_i+1} - w_{i,r_i}), \end{aligned}$$

para cada componente de la salida se tiene

$$v_i^T = [v_{i,1}^T \quad v_{i,2}^T \quad \cdots \quad v_{i,r_i}^T],$$

note que el último componente ( $v_{i,r_i+1}$ ) no es tomado en cuenta para formar  $v_i$ . El vector  $v(y - y_z)$  se forma como

$$v(y - y_z)^T = [v_1^T \quad v_2^T \quad \cdots \quad v_m^T]. \quad (9)$$

El vector  $\bar{v}(y - y_z)$  es construido seleccionando los componentes del vector de salida seleccionados para formar el vector de grado relativo completo.

El siguiente teorema es una consecuencia de los resultados presentados en (Fridman *et al.*, 2007).

**Teorema 1:** Sean satisfechas las condiciones 1-3. Entonces, con una adecuada selección de las ganancias  $\alpha_j$  y  $M_i$ , el estado  $x$  del sistema (1) es estimado en tiempo finito y de forma exacta por el observador (6) - (9).

**Demostración:** Defina  $\tilde{e} = x - z$ , entonces se tiene que la dinámica de este error está dada por:

$$\dot{\tilde{e}} = A\tilde{e} + \Delta Ax + \Delta Bu \quad (10)$$

Considere que la proposición 1 es satisfecha. Sea  $V_x = x^T P_x x$ , en donde  $P_x$  es la solución a la ecuación de Lyapunov  $(A + \Delta A)^T P + P(A + \Delta A) = -I$ . Note que esta ecuación de Lyapunov tiene solución dado que la proposición 1 es satisfecha.

La derivada de  $V_x$  está dada por:

$$\dot{V}_x = x^T ((A + \Delta A)^T P + P(A + \Delta A))x + x^T P(B + \Delta B)u + u^T (B + \Delta B)^T P x.$$

La condición  $\dot{V}_x < 0$  es satisfecha cuando:

$$\|x^T ((A + \Delta A)^T P + P(A + \Delta A))x\| > \|x^T P(B + \Delta B)u + u^T (B + \Delta B)^T P x\|,$$

por lo tanto, es satisfecha para  $\|x\| > 2\|P(B + \Delta B)\| \|u\|$ . Si la condición 3 es satisfecha, entonces es posible garantizar que  $\|x\| \rightarrow O(\gamma_x u_1^+)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , es decir, el estado se mantendrá acotado.

Del anterior análisis es posible garantizar que  $\Delta Ax$  es un vector de términos acotados, por lo tanto,  $\Theta(x, u)$  también será un vector de términos acotados. Considerando ahora  $V_e = \tilde{e}^T P_e \tilde{e}$ , de manera similar al análisis realizado para  $x$ , es posible garantizar que el error  $\tilde{e}$  se mantendrá acotado en una región de orden  $O(\gamma_e u^+)$ .

Defina  $\tilde{y} = y - y_z$ , entonces la siguiente igualdad es satisfecha para todo  $i = 1, \dots, p$ :

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_i \\ \dot{\tilde{y}}_i \\ \vdots \\ \tilde{y}^{(r_i-1)} \\ \tilde{y}^{(r_i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_i \\ c_i A \\ \vdots \\ c_i A^{r_i-1} \\ c_i A^{r_i} \end{bmatrix} \tilde{e} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_i A^{r_i-1} \end{bmatrix} \times (\Delta Ax + \Delta Bu)$$

Es posible calcular:

$$\tilde{y}^{(r_i+1)} = c_i A^{r_i+1} \tilde{e} + c_i A^{r_i} \Delta Ax + c_i A^{r_i} \Delta Bu + c_i A^{r_i-1} \Delta A \dot{x} + c_i A^{r_i-1} \Delta B \dot{u}$$

Dado que todos los términos del lado derecho están acotados, entonces se puede concluir que  $\tilde{y}^{(r_i+1)}$  también se encuentra acotada.

La aplicación de (8) garantiza que las siguiente igualdad sea satisfecha:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_i \\ \dot{\tilde{y}}_i \\ \vdots \\ \tilde{y}^{(r_i-1)} \\ \tilde{y}^{(r_i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{i,1} \\ v_{i,2} \\ \vdots \\ v_{i,r_i} \\ v_{i,r_i+1} \end{bmatrix}$$

Sea  $\bar{C}$  una matriz formada por la selección de renglones de  $C$  correspondientes a la selección del vector de grado relativo completo. Multiplicando por  $T$  la última ecuación de (7) se tiene que  $Tx = Tz + \bar{v}(y - y_z)$ , o bien  $T(x - z) = \bar{v}(y - y_z)$ , que en forma vectorial representa:

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_1 A \\ \vdots \\ \bar{c}_1 A^{r_1-1} \\ \vdots \\ \bar{c}_m \\ \bar{c}_m A \\ \vdots \\ \bar{c}_m A^{r_m-1} \end{bmatrix} \tilde{e} = \begin{bmatrix} \bar{v}_{1,1} \\ \bar{v}_{1,2} \\ \vdots \\ \bar{v}_{1,r_1} \\ \vdots \\ \bar{v}_{m,1} \\ \bar{v}_{m,2} \\ \vdots \\ \bar{v}_{m,r_m} \end{bmatrix}.$$

El resto de la prueba es resultado de la convergencia del diferenciador por modos deslizantes (Levant, 2003). ■

#### IV. INYECCIÓN DE SALIDA EQUIVALENTE

Como consecuencia de la convergencia del error de estimación a cero en tiempo finito, presentada en el Teorema 1, el vector de estados  $x$  es totalmente conocido.

La siguiente igualdad vectorial es satisfecha:

$$\begin{bmatrix} v_{1,r_1+1} \\ \vdots \\ v_{p,r_p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 A^{r_1} \\ \vdots \\ c_p A^{r_p} \end{bmatrix} \tilde{e} + \begin{bmatrix} c_1 A^{r_1-1} D \\ \vdots \\ c_p A^{r_p-1} D \end{bmatrix} \Theta(x, u)$$

Del análisis de convergencia del observador se puede estimar  $\tilde{e}$  a partir de  $v(y - y_z)$ , entonces se tiene:

$$\begin{bmatrix} c_1 A^{r_1} \\ \vdots \\ c_p A^{r_p} \end{bmatrix} \tilde{e} = \begin{bmatrix} c_1 A^{r_1} \\ \vdots \\ c_p A^{r_p} \end{bmatrix} T^{-1} \bar{v}(y - y_z) \quad (11)$$

Defina

$$z_{eq}(x, z, y) = \begin{bmatrix} v_{1,r_1} \\ \vdots \\ v_{p,r_p} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 A^{r_1} \\ \vdots \\ c_p A^{r_p} \end{bmatrix} T^{-1} \bar{v}(y - y_z). \quad (12)$$

Como consecuencia del Teorema 1, se cumple que para todo tiempo  $t \geq t_0$ , donde  $t_0 > 0$  es el tiempo de convergencia del observador, se satisface que  $\hat{x} = x$ ,  $e = 0$ ,

y dada la selección de la matriz  $D$ , el vector  $z_{eq}$  satisfice la siguiente igualdad:

$$z_{eq} = Q\Theta(x, u) = \begin{bmatrix} q_1\theta_1\varphi_1(x, u) \\ \vdots \\ q_p\theta_p\varphi_p(x, u) \end{bmatrix}$$

$$z_{eq_i}(\hat{x}, z, y) = \theta_i\varphi_i(\hat{x}, u). \quad (13)$$

donde  $\theta$  es el vector de las incertidumbres y las funciones  $z_{eq_i}(\hat{x}, z, y)$  y  $\varphi_i(\hat{x}, u)$  son continuas y totalmente conocidas.

### V. IDENTIFICACIÓN EN TIEMPO FINITO DE PARÁMETROS INVARIANTES EN EL TIEMPO

A partir de (13) es posible plantear la siguiente igualdad:

$$\int_{t_1}^{t_2} z_{eq_i}(\hat{x}, z, y)\varphi_i(\hat{x}, u)^T d\tau = q_i \int_{t_1}^{t_2} \theta_i\varphi_i(\hat{x}, u)\varphi_i(\hat{x}, u)^T d\tau.$$

Defina la variable

$$\Gamma_i = \left( \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(\hat{x}, u)\varphi_i(\hat{x}, u)^T d\tau \right)^{-1}.$$

La incertidumbre paramétrica  $\theta$  puede ser expresada en términos de (13) y la definición de  $\Gamma$  como:

$$\hat{\theta}_i = \frac{1}{q_i} \left( \int_{t_1}^{t_2} z_{eq_i}(\hat{x}, z, y)\varphi_i(\hat{x}, u)^T d\tau \right) \Gamma_i \quad (14)$$

La anterior expresión (14) proporcionará un estimado de los parámetros  $\theta$ , si las siguientes condiciones son satisfechas:

- C1.  $\left( \int_{t_1}^{t_2} z_{eq_i}(\hat{x}, z, y)\varphi_i(\hat{x}, u)^T d\tau \right) \neq 0, \quad \forall t_1, t_2 > t_0.$
- C2.  $\left( \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(\hat{x}, u)\varphi_i(\hat{x}, u)^T d\tau \right) > 0$  o de manera equivalente  $\Gamma_i < \infty.$

La condición C1 garantiza la existencia de información, indispensable para la identificación paramétrica, en la inyección de salida equivalente; mientras que la condición C2, conocida como condición de excitación persistente, garantiza la existencia de información suficiente para la reconstrucción de los parámetros.

El siguiente teorema sintetiza los resultados anteriores.

**Teorema 2:** Sean las condiciones C1 y C2 satisfechas, entonces la reconstrucción paramétrica se lleva a cabo en tiempo finito por medio de las ecuaciones (12)-(14).

**Demostración:** La convergencia en tiempo finito del observador permite garantizar que la igualdad (13) es satisfecha para  $t \geq t_0$ . La reconstrucción paramétrica se realiza de forma algebraica, las condiciones C1 y C2 garantizan la existencia de solución al problema de reconstrucción paramétrica. Considere que  $\theta \neq 0$  y la condición C1. no es satisfecha, entonces de (14) es posible obtener que  $\hat{\theta}_{ext} \rightarrow 0$ . Considere que  $\theta \neq 0$  y la condición C2. no es satisfecha, entonces de (14) es evidente que  $\hat{\theta} \rightarrow \infty$ . ■

**Observación:** Note que la reconstrucción de la incertidumbre es basada en la existencia de una relación algebraica, lo que hace posible utilizar una ventana de tiempo

finita en los algoritmos de identificación; sin embargo, dicha relación es afectada directamente por la existencia de ruido en las mediciones, haciendo este algoritmo muy sensible a la presencia de ruido.

### VI. EJEMPLO

Considere el siguiente sistema con incertidumbre:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Considere las condiciones iniciales del sistema en  $x_0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ . Las matrices nominales, utilizadas para el diseño del observador están definidas por las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -13/2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto la incertidumbre paramétrica adopta la forma:

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La proposición 1 es satisfecha dado que los valores propios de la matriz  $(A + \Delta A)$  están ubicados en  $-2,3247, -0,3376 \pm 0,5623i, -0,5000 \pm 0,8660i$  y los valores propios de la matriz  $A$  se encuentran en  $-0,1658, -0,5 \pm 1,9365i, -1,4171 \pm 2,0055i$ . La tripleta  $\{A, C, \Delta_{ext}\}$  no tiene ceros invariantes. La entrada es conocida y está dada por:

$$u = \begin{bmatrix} 0,2\text{sen}(9t) + 0,3\text{sen}(5t) + 0,3\text{sen}(2t + \pi/4) - 0,3 \\ 0,2\text{sen}(9t) + 0,3\text{sen}(7,5t + \frac{\pi}{8}) + 0,3\text{sen}(6t + \frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}.$$

Entonces, la proposición 2 es satisfecha. El observador por modos deslizantes toma la forma:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -13/2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} z$$

La matriz  $T$  está dada por:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El vector  $v(y - y_z)$  está formado por

$$v(y - y_z)^T = [v_{1,1} \ v_{1,2} \ v_{1,3} \ v_{1,4} \ v_{2,1} \ v_{2,2} \ v_{2,3}]^T$$

donde cada uno de sus elementos está dado por la solución de la siguiente ecuación diferencial vectorial:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{1,1} &= w_{1,1} = -\alpha_4 M_1^{1/4} |v_{1,1} - y_1 + y_{z1}|^{(3)/(4)} \times \\ &\quad \text{sign}(v_{1,1} - y_1 + y_{z1}) + v_{1,2}, \\ \dot{v}_{1,2} &= w_{2,2} = -\alpha_3 M_1^{1/3} |v_{1,2} - w_{1,1}|^{2/3} \times \\ &\quad \text{sign}(v_{1,2} - w_{1,1}) + v_{1,3}, \\ \dot{v}_{1,3} &= w_{1,3} = -\alpha_2 M_1^{1/2} |v_{1,3} - w_{1,2}|^{1/2} \times \\ &\quad \text{sign}(v_{1,3} - w_{1,2}) + v_{1,4}, \\ \dot{v}_{1,4} &= -\alpha_1 M_1 \text{sign}(v_{1,4} - w_{1,3}), \\ \dot{v}_{2,1} &= w_{2,1} = -\alpha_3 M_2^{1/3} |v_{2,1} - y_2 + y_{z2}|^{2/3} \times \\ &\quad \text{sign}(v_{2,1} - y_2 + y_{z2}) + v_{2,2}, \\ \dot{v}_{2,2} &= w_{2,2} = -\alpha_2 M_2^{1/2} |v_{2,2} - w_{2,1}|^{1/2} \times \\ &\quad \text{sign}(v_{2,2} - w_{2,1}) + v_{2,3}, \\ \dot{v}_{2,3} &= -\alpha_1 M_2 \text{sign}(v_{2,3} - w_{2,2}). \end{aligned}$$

La convergencia del error de estimación de los estados  $e = x - \hat{x}$  se puede ver en la Figura 1, note que después de un intervalo de tiempo finito, el observador garantiza la convergencia a cero del error de observación. La incertidumbre paramétrica es reescrita en la forma (12), como:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_{1,1}, \\ \varphi_1(x, u) &= x_2, \\ \theta_2 &= [\theta_{2,1} \ \theta_{2,2}], \\ \varphi_2(x, u) &= [x_4 \ u_2]^T, \end{aligned}$$

Del planteamiento del problema se sabe que los valores reales de  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= [4, 5], \\ \theta_2 &= [3 \ 2]. \end{aligned}$$

Eligiendo la ventana de tiempo como  $t_1 = 8$ ,  $t_2 = 8.5$ . La reconstrucción del parámetro  $\theta_{1,1}$  se muestra en la Figura 2.

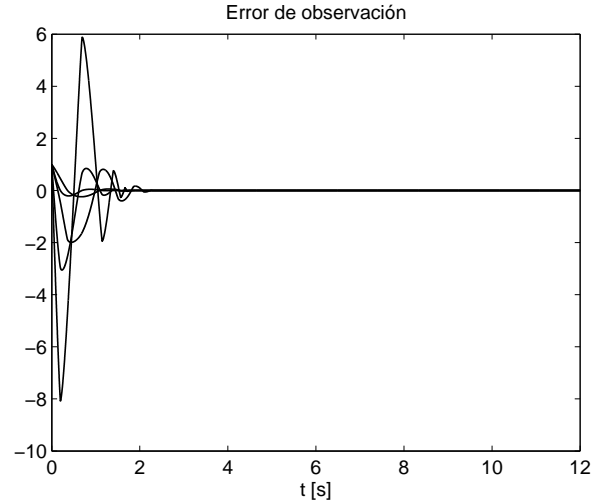


Figura 1. Convergencia del error de observación.

La reconstrucción de los parámetros  $\theta_{2,1}$  y  $\theta_{2,2}$ , está dada en la figura 3.

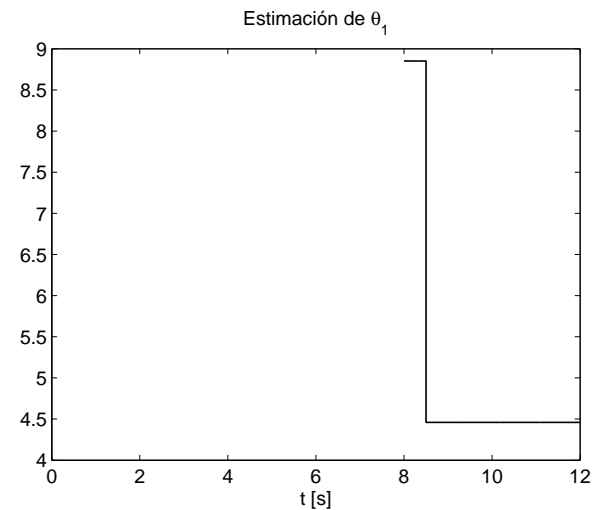


Figura 2. Convergencia de la estimación de los parámetros  $\theta_{1,1}$ .

## VII. CONCLUSIONES

Las técnicas de observación por modos deslizantes, además de la reconstrucción de estados en tiempo finito, permiten el uso de propiedades particulares de la técnica de modos deslizantes, como es la posibilidad de utilizar la inyección de salida equivalente. Las técnicas proporcionadas en este artículo permiten la reconstrucción de los parámetros del sistema obteniendo un estimado del valor real en tiempo finito.

## REFERENCIAS

- Bartolini, G., Fridman, L., Pisano, A. y Usai, E., Eds. (2008). *Modern Sliding Mode Control Theory: New Perspectives and Applications*. Springer. London.

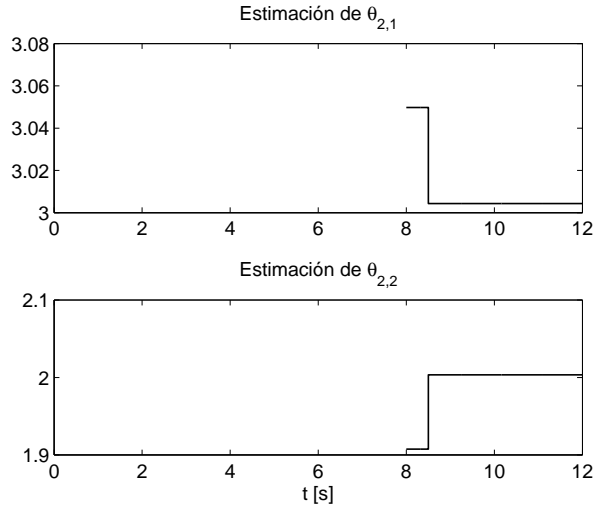


Figura 3. Convergencia de la estimación de los parámetros  $\theta_{2,1}$ ,  $\theta_{2,2}$ .

- Davila, J., L. Fridman y A. Levant (2005). Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **50**(11), 1785–1789.
- Davila, J., L. Fridman y A. Poznyak (2006). Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *International Journal of Control* **79**(10), 1251–1262.
- Edwards, C., Fossas, E. y Fridman, L., Eds. (2006). *Advances in variable structure and sliding mode control*. Lecture Notes in Control and Information Science. Springer Verlag, Berlin.
- Engel, R. y G. Kreisselmeier (2002). A continuous-time observer which converges in finite time. *IEEE Trans. Automat. Contr.*
- Eykhoff, P. y P.C. Parks (1990). Identification and system parameter estimation; where do we stand now? (editorial). *Automatica* **26**(1), 3–5.
- Fridman, L., A. Levant y J. Davila (2007). Observation of linear systems with unknown inputs via high-order sliding-modes. *Int. J. System Science* **38**(10), 773–791.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control* **58**, 1247–1263.
- Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica* **34**(3), 379–384.
- Levant, A. (2003). High-order sliding modes: differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control* **76**(9-10), 924–941.
- Ljung, L. (1999). *System Identification*. Information and System Sciences Series. second ed. Prentice Hall PTR. New Jersey.
- Shtessel, Y.B. y A.S. Poznyak (2005). Parameter identification of affine time varying systems using traditional and high order sliding modes. En: *Proceedings of American Control Conference 2005*.
- Soderstrom, T. y P. Stoica (1989). *System Identification*. Prentice Hall International. Cambridge, Great Britain.
- Trentelman, H. L., A. A. Stoorvogel y M. Hautus (2001). *Control theory for linear systems*. Springer-Verlag. London, Great Britain.
- Utkin, V.I. (1978). *Sliding Modes and their application in Variable Structure Systems*. MIR. Moscow, URSS.