

# Estabilización por Impulsos de un Acelerador Electrónico con Fricción de Coulomb

Yuri Orlov y Raúl Santiesteban  
CICESE  
Km. 107 carretera Tijuana-Ensenada  
Ensenada, Baja California 22860  
emails: yorlov{rsanties}@cicese.mx

Luis T. Aguilar  
Instituto Politécnico Nacional  
Avenida del parque 1310 Mesa de Otay  
Tijuana, Baja California 22510  
Tel.: (664)6231344 ext. 82861, Fax: (664)6231388  
email: luis.aguilar@ieee.org

**Resumen**—Dinámicas no deseadas (movimiento de atascamiento-deslizamiento, ciclos límite, etc.) que se presentan en sistemas con fricción dan lugar a errores en estado estacionario, limitando el desempeño esperado del sistema a controlar. Para mejorar el funcionamiento, se propone un nuevo control que contrarresta los efectos de fricción. Esta aproximación se basa en una actuación impulsiva mientras que el sistema está estacionado debido a la presencia de fricción seca. Un acelerador electrónico que es equivalente a un sistema de doble masa-resorte se utilizará como base de prueba. La estabilización asintótica se logra no sólo para el modelo nominal sino también para el caso perturbado sujeto a que los disturbios externos que afectan al sistema son de magnitud suficientemente pequeña.

**Palabras clave:** Control por impulsos, fricción de Coulomb, sistema no lineal.

## I. INTRODUCCIÓN

La fricción es un fenómeno altamente no lineal que produce movimientos no deseados, de tal modo que se generan errores en estado estacionario. Con el fin de reducir los efectos de fricción sin recurrir a los lazos de control de alta ganancias se necesita un modelo exacto de fricción (Olsson *et al.*, 1988). De manera alternativa se han utilizado algoritmos de control por modos deslizantes de segundo orden (Orlov, 2005; Orlov, 2009) que son robustos ante discrepancias en el modelo de fricción.

En este artículo se desarrolla una nueva estrategia de control para contrarrestar los efectos de fricción. Esta aproximación se basa en la actuación impulsiva mientras que el sistema subyacente se encuentra atascado debido a la fricción seca. Para fines de análisis se utilizará un sistema con doble masa-resorte como base de prueba conocido como acelerador electrónico (Canudas-de-Wit *et al.*, 2001). En contraste a los ya mencionados métodos de compensación de fricción y la aproximación por modos deslizantes, se construye una ley de control estática tomando en consideración que la posición es la única información disponible para retroalimentación. Adicionalmente, se prueba robustez en contra de variaciones pequeñas en los parámetros y disturbios externos.

Aunque existen una diversidad de aplicaciones sobre control impulsivo (Bentsman y Miller, 2007; Brogliato, 1999; Yang, 2001), hasta la fecha no existen contribuciones

sobre estabilización de mecanismos con fricción seca. Resultados relevantes en la teoría de control impulsiva se puede mencionar el de (Yang, 2001) quien establece las bases matemáticas para el diseño de sistemas de control impulsivo. En (Li *et al.*, 2001) se establecen condiciones suficientes para la estabilidad asintótica de este tipo de sistemas. Contribuciones alternativas de esta idea se pueden encontrar en el microposicionamiento de mecanismos.

El artículo está organizado de la siguiente manera: En la Sección II se define el problema y se presenta el modelo dinámico del acelerador electrónico. En la Sección III se presenta el diseño del controlador impulsivo junto con el análisis de estabilidad. En la Sección IV se presentan resultados de simulación. Finalmente se proporcionan conclusiones en la Sección V.

## II. ENUNCIADO DEL PROBLEMA

El acelerador electrónico (Figura 1), afectado por fricción de Coulomb, está gobernado por la siguiente ecuación diferencial (Canudas-de-Wit *et al.*, 2001)

$$J\ddot{x} = -k(x - x_0) - \alpha \text{sign}(\dot{x}) + u + w \quad (1)$$

donde

$$k = \begin{cases} k_1, & \text{si } x \leq x_0 \\ k_2, & \text{otro lado} \end{cases}, \quad (2)$$

$x$  es el desplazamiento,  $\dot{x}$  es la velocidad,  $J = J_1 + J_2 > 0$  es la inercia del sistema,  $\alpha > 0$  es el nivel de fricción de Coulomb,  $u$  denota la entrada de control y  $w$  son los disturbios externos. Como el lado derecho de la ecuación diferencial (1) es discontinuo, entonces la solución se define en el sentido de Filippov (Filippov, 1988).

Para fines de análisis se ha considerado el modelo de fricción de Coulomb. A pesar de que la fricción viscosa está presente en la práctica, hemos decidido no incluirlo para facilitar la exposición.

Para tomar en cuenta las discrepancias del modelo, se introduce un disturbio externo desconocido  $w(t)$ . A lo largo del artículo se asume que la amplitud del disturbio

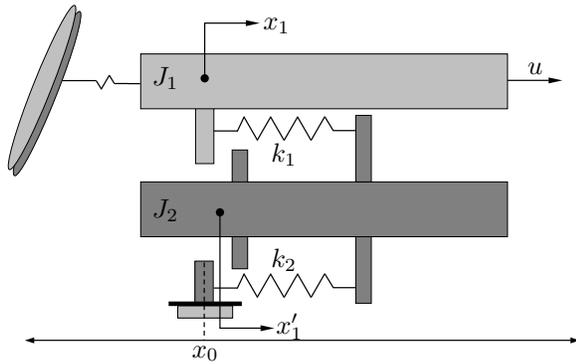


Figura 1. Acelerador electrónico.

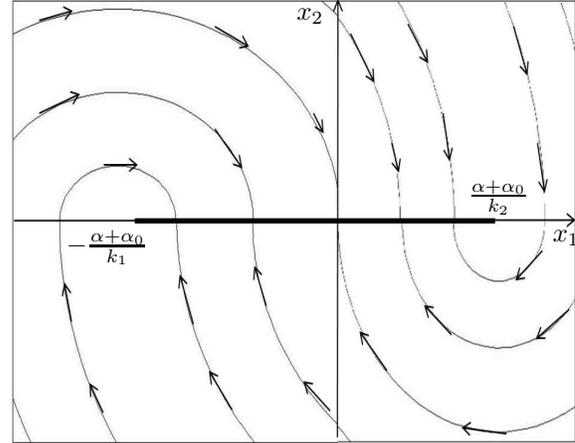


Figura 2. Retrato de fase del sistema de acelerador electrónico: caso no forzado (4).

es pequeña y menor a la mitad del nivel de fricción de Coulomb  $\alpha$ , i.e.,

$$|w(t)| \leq \alpha_0 < \frac{1}{2}\alpha \quad (3)$$

para todo tiempo  $t$  y alguna constante  $\alpha_0 > 0$ . La consideración (3) se hace por razones técnicas que se aclararán más adelante.

La representación en espacios de estado del sistema (1) queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J} [-k(x_1 - x_0) - \alpha \text{sign}(x_2) + u + w] \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $x_1 = x$  y  $x_2 = \dot{x}$ .

Dado que el sistema en lazo abierto (4) es disipativo y si la disipación está acotada inferiormente por una constante positiva  $\alpha - \alpha_0$ , entonces el sistema (4) sujeto a  $u = 0$  se atascará en tiempo finito en la zona dependiente del disturbio (véase Figura 2)

$$S = \{(x_1, x_2) : -\frac{\alpha + \alpha_0}{k_1} < x_1 < \frac{\alpha + \alpha_0}{k_2}, x_2 = 0\} \quad (5)$$

donde  $S \subset \mathbf{R}^2$ .

La ley de control impulsiva viene dada por

$$u^* = u_\delta + u_c \quad (6)$$

donde

$$u_\delta = \sum_{i=1}^{\infty} v(x_1) \delta(t - t_i) \quad (7)$$

es un actuador impulsivo, usando una retroalimentación de

posición continua  $v(x_1)$ , y

$$u_c = -k(x_0 - x_r)$$

es la compensación lineal. Entonces cuando la ley de control impulsiva  $u_\delta$  es aplicada en instantes de tiempo dependientes del estado  $t_i(x_1, x_2)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , el sistema de lazo cerrado exhibe una dinámica continua y discreta que en función del error viene dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= \frac{1}{J} (-ke_1 - \alpha \text{sign}(e_2) + w), \quad t \neq t_i, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} e_1(t_i^+) &= e_1(t_i^-), \\ e_2(t_i^+) &= e_2(t_i^-) + v(e_1(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

donde  $e_1 = x_1 - x_r$ ,  $e_2 = x_2$ ,  $e_2(t_i^+) = \lim_{t \rightarrow t_i, t > t_i} e_2(t)$  y  $e_2(t_i^-) = \lim_{t \rightarrow t_i, t < t_i} e_2(t)$ . Tomando en consideración la retroalimentación de posición  $v(x_1)$  se llega a la regla de restitución (9) porque la entrada de tipo impulsiva (6) resulta en el correspondiente cambio instantáneo de velocidad mientras que la dinámica de posición y por lo tanto la retroalimentación de posición  $v(x_1(t))$  se mantiene en tiempo continuo. Nótese que implementando la retroalimentación de estado  $v(x_1, x_2)$  se impone una cierta regla de restitución no lineal causada por el producto de la función Delta  $\delta(t - \tau)$ , localizado en un instante de tiempo  $\tau$ , y la función discontinua  $v(x_1(t), x_2(t))$  en  $t = \tau$  (véase, e.g., (Orlov, 2000) para detalles en respuesta impulsiva no lineal).

El objetivo es diseñar un controlador impulsivo (6) de tal manera que el sistema de lazo cerrado (8)–(9) sea asintóticamente estable alrededor del origen  $(e, \dot{e}) =$

(0, 0), sin importar cualquier disturbio externo (3) que esté afectando el sistema. Se asume que la posición actual  $x_1(t)$  se puede medir mientras que la única información disponible en la velocidad  $x_2(t)$  es el conocimiento de si es nula o no.

### III. DISEÑO DEL CONTROLADOR

Considérese el controlador impulsivo (6) con

$$v(x_1) = -\sqrt{\frac{2\alpha|e_1| - ke_1^2}{J}} \text{sign}(e_1) \quad (10)$$

que se aplica al sistema (4) en instantes de tiempo  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , tal que

$$|x_1(t_i)| \leq \frac{\alpha + \alpha_0}{k}, \quad x_2(t_i^-) = 0. \quad (11)$$

El comportamiento dinámico del sistema en lazo cerrado (6)–(11) se describe como sigue. Una vez que el sistema (4) llega a la región de atascamiento (5), es forzado por el controlador impulsivo (6) para que cambie las velocidades del sistema de manera instantánea (véase Figura 3). La amplitud del controlador (10) ha sido preespecificada de tal manera que el sistema (4) pueda ser llevado de la zona de atascamiento (5) a la trayectoria de fase mientras que el sistema no perturbado llegue al origen sin oscilaciones. Se demuestra que la estabilización asintótica se lleva a cabo no solo para el sistema no perturbado (4) con  $w = 0$  sino también para la versión perturbada siempre y cuando los disturbios externos que afectan al sistema satisfagan la condición impuesta de la cota superior (3).

De lo anterior se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 1:** Considérese la dinámica del oscilador con fricción descrito por (4) y la ley de control impulsiva (6), especificado con (10), (11). Entonces el sistema de lazo cerrado (6)–(11) es asintóticamente estable en forma global siempre y cuando la condición de la cota superior (3) se satisfaga para los disturbios externos que afectan el sistema.

**Demostración:** Se mencionó que mientras el sistema no forzado (4) posee un conjunto invariante  $S_w$  estable en forma global y en tiempo finito localizado, de acuerdo a (5), dentro de la zona de atascamiento  $S$ . Una vez que el sistema en lazo cerrado (6)–(11) permanezca en  $S$ , es decir que  $e_1(t_1) = \xi_1$  tal que  $|\xi_1| \leq \frac{\alpha + \alpha_0}{k}$ , el controlador impulsivo (6), (10), (11) se aplicará en cada instante de tiempo  $t_1$ . La regla de restitución (9) es entonces especificada como

$$\begin{aligned} e_1(t_1) &= \xi_1 \\ e_2(t_1^+) &= -\sqrt{\frac{2\alpha|\xi_1| - k\xi_1^2}{J}} \text{sign}(\xi_1). \end{aligned} \quad (12)$$

Si el sistema en lazo cerrado está libre de perturbaciones, las trayectorias del estado reinicializadas con (12), podrán

mono-direccionalmente llegar al origen en tiempo finito (véase Figura 3). Sin embargo, si una perturbación admisible (3) afecta el sistema de lazo cerrado, la trayectoria del estado llegará a la zona de atascamiento en  $e_1(t_2) = \xi_2 \neq 0$  sujeto a que  $e_2(t_2^-) = 0$ .

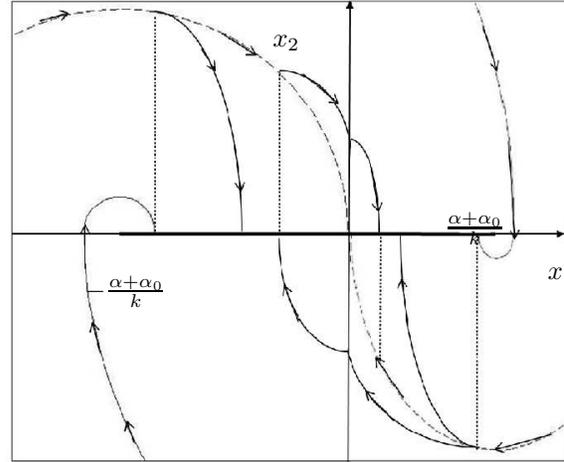


Figura 3. Retrato de fase del sistema de lazo cerrado impulsivo (6)–(11): líneas punteadas son los brincos de velocidad, las líneas sólidas son las trayectorias perturbadas, y las líneas discontinuas es para la trayectoria no perturbada.

Nuestro objetivo es demostrar que, incluso para el peor caso de disturbio  $w = \alpha_0$  o  $w = -\alpha_0$ , se satisface la siguiente desigualdad:

$$|\xi_2| \leq \frac{2\alpha_0}{\alpha} |\xi_1|. \quad (13)$$

Entonces por iteración en  $i$ , se pueden obtener relaciones similares

$$|\xi_{i+1}| \leq \frac{2\alpha_0}{\alpha} |\xi_i|, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

para las posiciones del estado  $\xi_i = e_1(t_i)$  en los instantes de tiempo  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , en los que se alcanza la zona de atascamiento (5). Dado que se ha considerado  $q = \frac{2\alpha_0}{\alpha} < 1$  entonces se obtiene que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |e_1(t_i)| = \lim_{i \rightarrow \infty} q^{i-1} |\xi_1| = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} |e_2(t_i^+)| = 0 \quad (15)$$

donde la relación

$$e_2(t_i^+) = -\sqrt{\frac{2\alpha|\xi_i| - k\xi_i^2}{J}} \text{sign}(\xi_i), \quad i = 1, 2, \dots,$$

que es similar a (12), se tomó en consideración.

Con el propósito de validar (13), se calcula el valor de  $\xi_2$  como una función de  $\xi_1$ , asumiendo que  $\xi_1 < 0$ ,  $\bar{k} =$

$\max\{k_1, k_2\}$ , y desarrollando un cálculo similar.

En el caso donde  $w = \alpha_0$  la dinámica del sistema entre impactos sucesivos es gobernados por

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= \frac{1}{J}(-\bar{k}e_1 - \alpha + \alpha_0), \quad t \in (t_1, t_2). \end{aligned} \quad (16)$$

Inicializando con (12), la solución del sistema perturbado (16) está dado por

$$\frac{1}{J}(-\bar{k}\frac{e_1^2}{2} - \alpha e_1 + \alpha_0 e_1) = \frac{\alpha_0 \xi_1}{J} + \frac{e_2^2}{2}. \quad (17)$$

Estando confinado al instante de tiempo  $t_2$  cuando  $e_2(t_2^-) = 0$ , la relación anterior lleva a

$$\bar{k}e_1^2(t_2) + 2(\alpha - \alpha_0)e_1(t_2) + 2\alpha_0\xi_1 = 0. \quad (18)$$

Estableciendo  $\xi_2 = e_1(t_2)$  y tomando en consideración el caso donde  $\xi_1 < 0$  está bajo estudio, se sigue que

$$\xi_2 = -\frac{\alpha - \alpha_0}{k} + \sqrt{\frac{(\alpha_0 - \alpha)^2}{k^2} + \frac{2\alpha_0|\xi_1|}{k}}. \quad (19)$$

Sustituyendo (19) en (13) para  $\xi_2$ , se llega a la desigualdad

$$-\frac{\alpha - \alpha_0}{k} + \sqrt{\frac{(\alpha_0 - \alpha)^2}{k^2} + \frac{2\alpha_0|\xi_1|}{k}} \leq \frac{2\alpha_0}{\alpha}|\xi_1|. \quad (20)$$

Para verificar (20) es suficiente presentarla en la siguiente forma

$$\frac{(\alpha_0 - \alpha)^2}{k^2} + \frac{2\alpha_0|\xi_1|}{k} \leq \left[ \frac{2\alpha_0}{\alpha}|\xi_1| + \frac{\alpha - \alpha_0}{k} \right]^2, \quad (21)$$

y observando que (21) es equivalente a la desigualdad

$$\frac{2\alpha_0|\xi_1|}{k} \leq \frac{4(\alpha_0)^2}{\alpha^2}|\xi_1|^2 + \frac{4\alpha_0(\alpha - \alpha_0)}{\alpha k}|\xi_1| \quad (22)$$

cuya validación se reduce desigualdad obvia

$$1 \leq \frac{2(\alpha - \alpha_0)}{\alpha}, \quad (23)$$

que resulta de (3). Así la desigualdad (13) se verifica en el caso de que  $w = \alpha_0$ .

Sólo falta verificar la desigualdad (13) en el caso de que  $w = -\alpha_0$  con la dinámica del sistema entre impactos

sucesivos gobernada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= \frac{1}{J}(-\bar{k}e_1 - \alpha - \alpha_0), \quad t \in (t_1, t_2). \end{aligned} \quad (24)$$

La solución del sistema anterior, inicializado con (12), está dado por

$$\frac{1}{J}(-\bar{k}\frac{e_1^2}{2} - \alpha e_1 - \alpha_0 e_1) = -\frac{\alpha_0 \xi_1}{J} + \frac{e_2^2}{2}. \quad (25)$$

Especificado en el siguiente instante de tiempo del impacto  $t_2$  cuando  $e_2(t_2^-) = 0$ , la relación (25) lleva a

$$\bar{k}e_1^2(t_2) + 2(\alpha + \alpha_0)e_1(t_2) - 2\alpha_0\xi_1 = 0. \quad (26)$$

Estableciendo  $\xi_2 = e_1(t_2)$ , se sigue que

$$\xi_2 = -\frac{\alpha_0 + \alpha}{k} + \sqrt{\frac{(\alpha_0 + \alpha)^2}{k^2} - \frac{2\alpha_0|\xi_1|}{k}} \quad (27)$$

a condición de que el caso  $\xi_1 < 0$  está bajo estudio.

Sustituyendo (27) en (13) para  $\xi_2$ , llegamos a la siguiente desigualdad

$$\frac{\alpha_0 + \alpha}{k} - \sqrt{\frac{(\alpha_0 + \alpha)^2}{k^2} - \frac{2\alpha_0|\xi_1|}{k}} \leq \frac{2\alpha_0}{\alpha}|\xi_1|. \quad (28)$$

Para validar (28) es suficiente representarla en la forma

$$\left[ \frac{\alpha + \alpha_0}{k} - \frac{2\alpha_0}{\alpha}|\xi_1| \right]^2 \leq \frac{(\alpha_0 + \alpha)^2}{k^2} - \frac{2\alpha_0|\xi_1|}{k}, \quad (29)$$

y observar que (29) es equivalente a la desigualdad

$$\frac{2\alpha_0|\xi_1|}{k} + \frac{4(\alpha_0)^2}{\alpha^2}|\xi_1|^2 \leq \frac{4\alpha_0(\alpha + \alpha_0)}{\alpha k}|\xi_1|. \quad (30)$$

Dado que  $\xi_1$  está dentro de la zona estimada de atascamiento (5), i.e.,  $|\xi_1| \leq \frac{\alpha + \alpha_0}{k}$ , la validación de (30) se reduce a la desigualdad

$$1 + \frac{2\alpha_0(\alpha + \alpha_0)}{\alpha^2} \leq \frac{2(\alpha + \alpha_0)}{\alpha}, \quad (31)$$

que resulta directamente de (3). Así la desigualdad (13) se verifica en el caso que  $w = -\alpha_0$ , también. Esto completa la prueba del teorema porque como se señaló, la desigualdad (13) lleva a estabilidad asintótica en forma global del sistema en lazo cerrado (6)–(11). ■

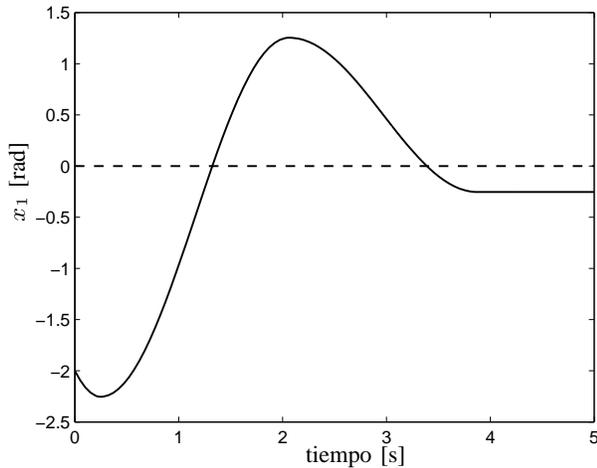


Figura 4. Respuesta del sistema cuando  $u_\delta = 0$ .

#### IV. RESULTADOS NUMÉRICOS

Las características de funcionamiento y propiedades de robustez del controlador impulsivo propuesto se analizan a través de simulaciones numéricas. En las simulaciones, desarrolladas con MATLAB, se seleccionaron los parámetros  $x_0 = 0, J = 1, m = 1, k_1 = 1, k_2 = 3$  y  $\alpha = 1$ . Las condiciones iniciales de posición y velocidad fueron establecidas en  $x_1(0) = -2$  y  $x_2(0) = -2$ . Con el propósito de resaltar la importancia del estudio se muestra en la Figura 4 la respuesta del sistema cuando  $u_\delta = 0$ . Nótese que la respuesta tiene un error en estado estacionario considerable. Los resultados de simulación se muestra en las Figuras 5 y 6 para los casos perturbados y no perturbados, respectivamente.

El controlador impulsivo (6), (10), (11) se aplica primero al sistema no perturbado. Con el propósito de probar la robustez del controlador, se suma a la planta un disturbio externo armónico

$$w = 0.7 \sin(t).$$

Se concluye un buen funcionamiento y de las propiedades deseadas de robustez de la Figura 5.

#### V. CONCLUSIONES

Una nueva aproximación para contrarrestar los efectos de fricción se desarrolla y se prueba en un sistema masa-resorte. La aproximación se basa en la actuación impulsiva mientras que el sistema se encuentra atascado debido a la presencia de fricción de Coulomb. Estabilidad asintótica en forma global del sistema en lazo cerrado y su robustez contra disturbios externos de magnitud suficientemente pequeña se llevan a cabo en el presente estudio teórico. La efectividad de la propuesta se ilustra a través de simulaciones numéricas. El controlador robustifica robots mani-

puladores con fuerzas de Coulomb relativamente fuertes. Queda pendiente como trabajo futuro la implementación práctica del controlador impulsivo siguiendo la línea de razonamiento propuesta en (Yang y Tomizuka, 1988).

#### REFERENCIAS

- Bentsman, J. y B.M. Miller (2007). Dynamical systems with active singularities of elastic type: A modeling and controller synthesis framework. *IEEE Transactions on Automatic Control* **52**(1), 39–55.
- Brogliato, B. (1999). *Nonsmooth mechanics*. second ed. Springer. London.
- Canudas-de-Wit, C., I. Kolmanovsky y J. Sun (2001). Adaptive pulse control of electronic throttle. En: *IEEE Proc. of the American Control*. Vol. 4. Arlington, USA. pp. 2872–2877.
- Filippov, A.F. (1988). *Differential equations with discontinuous right-hand sides*. Kluwer Academic Publisher. Dordrecht.
- Li, Z.G., C.Y. Wen y Y.C. Soh (2001). Analysis and design of impulsive control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(6), 894–897.
- Olsson, H., K. Astrom, C. Canudas de Wit, M. Gafvert y P. Lischinsky (1988). Friction models and friction compensation. *European Journal of Control* **4**, 176–195.
- Orlov, Y. (2000). Instantaneous impulse response of nonlinear systems. *IEEE Trans. Auto. Ctrl.* **45**(5), 999–1001.
- Orlov, Y. (2005). Finite-time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM Journal on Control and Optimization* **43**, 1253–1271.
- Orlov, Y. (2009). *Discontinuous Systems: Lyapunov Analysis and Robust Synthesis under Uncertainty Conditions*. Springer. London.
- Yang, S. y M. Tomizuka (1988). Adaptive pulse width control for precise positioning under the influence of stiction and Coulomb friction. *Journal of Dynamic Systems, measurement, and Control* **110**, 221–227.
- Yang, T. (2001). *Impulsive Control Theory*. número 272 En: *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer. Berlin.

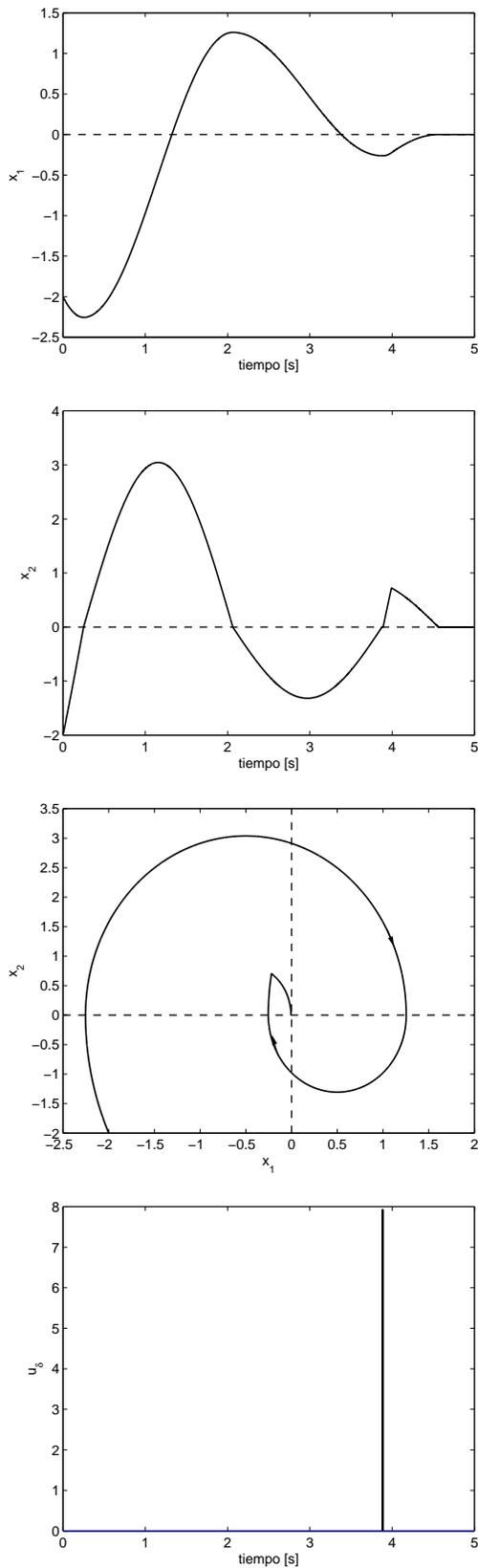


Figura 5. Estabilización impulsiva del acelerador electrónico con fricción de Coulomb: caso no perturbado.

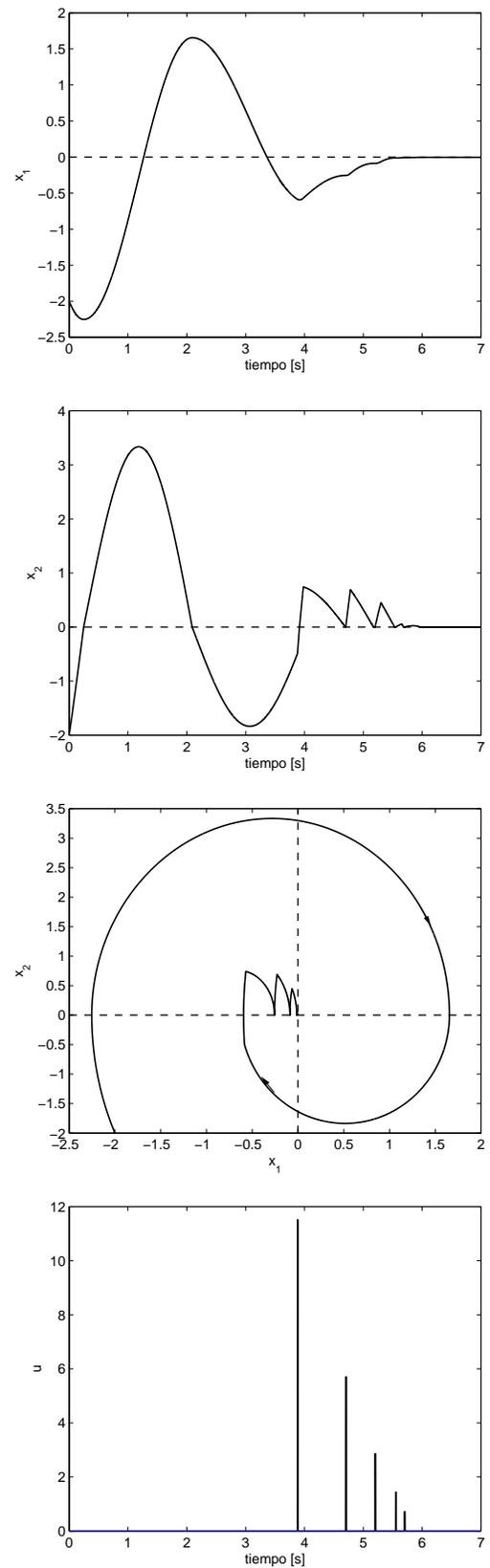


Figura 6. Estabilización impulsiva del acelerador electrónico con fricción de Coulomb: caso perturbado.