

Diseño Disipativo para Observadores no Lineales

Marisol Osorio[†] and Jaime Moreno[‡]

[†]Universidad Pontificia Bolivariana, Escuela de Ingeniería,
Grupo de Investigación en Automática y Diseño.
Cir 1 Num. 70-01. Medellín, Colombia. email: marisol.osorio@upb.edu.co

[‡]Automatización, Instituto de Ingeniería,
Universidad Nacional de México (UNAM),
Edificio 12, Circuito Exterior, 04510 México D.F., México.
Tel: +52-55-56233600 ext. 8811, email: JMorenoP@ingen.unam.mx

Resumen—En este artículo se aplica una metodología de diseño de observadores, basada en la disipatividad, a sistemas con no linealidades multivaluadas o discontinuas. Se muestra que la metodología elimina restricciones impuestas por otros métodos. Los sistemas considerados deben ser conversibles a la forma de Lure.

Palabras clave: Observadores Disipativos, Sistemas multivaluados, Sistemas Discontinuos.

I. INTRODUCCIÓN

Muchos sistemas se modelan con funciones discontinuas o multivaluadas. Por ejemplo, sistemas mecánicos con fricción estática o juego, o sistemas electromecánicos con histéresis. Tradicionalmente, sistemas de este tipo no se analizan, en parte porque no se garantiza la existencia y unicidad de sus soluciones en el sentido clásico. Ahora es posible, utilizando las inclusiones diferenciales, darles un tratamiento matemático adecuado.

La observación de sistemas discontinuos o multivaluados ha sido poco explorada. Se encuentran trabajos en donde se añaden discontinuidades a los observadores para mejorar su desempeño, obteniéndose observadores por modos deslizantes (Haskara *et al.*, 1998; Drakunov y Utkin, 1995; Xiong y Saif, 2001). Existen muy pocas publicaciones sobre obtención de observadores para plantas que incluyan no linealidades discontinuas o multivaluadas (Juloski, 2004; Heemels *et al.*, 2005). Estos autores se inspiran en los observadores por criterio del círculo propuestos en (Arcak y Kokotovic, 1999). La clase de sistemas que pueden ser tratados por métodos como el de Juloski y el de Arcak, tiene tres restricciones: (i) Las no linealidades deben ser necesariamente cuadradas, esto es, deben tener el mismo número de entradas y de salidas. (ii) Las no linealidades están restringidas a ser máximamente monótonas. (iii) Se requiere que el observador diseñado tenga soluciones únicas a pesar del hecho de que sea un sistema no lineal discontinuo o multivaluado.

(Moreno, 2004) ha propuesto la Técnica de Diseño Disipativo para observadores de sistemas que contienen no linealidades suaves expresados en la forma de Lure. Esa

técnica generaliza el método propuesto en (Arcak y Kokotovic, 1999) y elimina las restricciones (i) y (ii). Muchas estrategias de diseño de observadores pueden unificarse bajo el Diseño Disipativo. Por ejemplo, los métodos de diseño de Alta Ganancia, Thau, criterio del círculo y Lipschitz. En este nuevo trabajo, el objetivo es extender la metodología a los sistemas multivaluados, lo que resulta en la eliminación también de (iii). Esos sistemas no suelen tener soluciones únicas (Deimling, 1992), por lo que una teoría que los incluya debe admitir soluciones múltiples. En la mayoría de los casos este diseño puede hacerse usando Desigualdades Matriciales Lineales (LMI por sus siglas en inglés), para las que existen métodos numéricos muy eficientes.

II. PRELIMINARES

II-A. Funciones Multivaluadas e Inclusiones Diferenciales

Para sistemas dinámicos de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (1)$$

no es posible asegurar la existencia y unicidad de soluciones cuando la función f es no localmente Lipschitz, es discontinua o es multivaluada en x (Desoer y Vidyasagar, 1975). Cuando f es multivaluada, $f(x, t)$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ para cada $t \in \mathbb{R}^+$ y $x \in \mathbb{R}^n$ y (1) se convierte en una inclusión diferencial (Deimling, 1992; Aubin y Cellina, 1984; Filippov, 1988; Yakubovich *et al.*, 2004):

$$\frac{dx}{dt} \in f(x, t), \quad (2)$$

En la Sección IV se ve un caso de función multivaluada: Un sistema de movimiento en el que se considera el efecto de la fricción estática. Cuando la masa está en reposo, la fricción opone una fuerza igual a la aplicada, dentro de cierto rango, y la condición de movimiento no cambia. Esto implica que la fuerza opuesta por la fricción estática no es única, sino que determina un conjunto continuo dado en el caso del ejemplo, por $[-Fm, Fm]$. Funciones de este tipo no son continuas ni localmente Lipschitz, así que la existencia y unicidad de las soluciones no se asegura en

el sentido clásico. La sola existencia de soluciones para sistemas como (2) puede ser asegurada cuando $f(x, t)$ satisface las siguientes condiciones, no muy restrictivas, (Bacciotti y Rosier, 2001):

Suposición 1: $f(x, t)$ satisface las siguientes condiciones: (I) $f(x, t)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, no vacío, compacto y convexo para cada $t \in \mathbb{R}_+$ y cada $x \in \mathbb{R}^n$. (II) $f(x, t)$, como función multivaluada de x , es semicontinua por arriba para todo t . (III) $f(x, t)$ es medible en x en el sentido de Lebesgue. (IV) $f(x, t)$ es localmente acotada.

Definición 1: Una función $f(x, t)$ es *semicontinua por arriba en un punto* (x_0, t_0) si para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon, x_0, t_0)$ tal que el conjunto $f(x_1, t_1)$ está contenido en la ϵ -vecindad del conjunto $f(x_0, t_0)$, dado que un punto (x_1, t_1) pertenece a la δ -vecindad del punto (x_0, t_0) . (Yakubovich *et al.*, 2004).

Cuando $f(x, t)$ es discontinua, es posible *convexificarla* (Filippov, 1988) de manera que en el punto de discontinuidad (x_0, t_0) , el valor de $f(x, t)$ sea un conjunto convexo que incluya los valores límite cuando (x, t) tiende a (x_0, t_0) . Este proceso asegura la semicontinuidad por arriba de la función convexificada, y por ende, la existencia de soluciones. La unicidad de soluciones si está sujeta a condiciones bastante restrictivas, como por ejemplo máxima monotonicidad de $f(x, t)$. En el presente trabajo no se exige la unicidad de las soluciones, lo que elimina la necesidad de la monotonicidad. Para verificar la estabilidad de un sistema con una inclusión diferencial se puede usar el segundo método de Lyapunov (Yakubovich *et al.*, 2004) y (Bacciotti y Rosier, 2001):

Teorema 1: SEGUNDO TEOREMA DE LYAPUNOV (Bacciotti y Rosier, 2001): Sea $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función multivaluada (mapa) de x , de manera que la existencia (local) de soluciones de (2) esté asegurada. Asíumase que existe una función C^1 de Lyapunov $V(x, t)$ tal que, para algunas funciones a y $b \in \mathcal{K}_\infty$, $y \in \mathcal{K}$, y para todo $t \in [0, +\infty)$, todo $x \in \mathbb{R}^n$, y todo $v \in f(x, t)$, se satisface que:

$$a(\|x\|) \leq V(x, t) \leq b(\|x\|) , \quad (3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) + \langle \nabla_x V(x, t), v \rangle \leq -c(\|x\|) , \quad (4)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$, y $\nabla_x V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)^T$. Bajo estas condiciones el origen es Uniforme Global Asintóticamente Estable (UGAE).

II-B. Sistemas Disipativos

La metodología se basa en la teoría de disipatividad y en que ésta puede aplicarse a los sistemas discontinuos y multivaluados (Van der Schaft, 2000), (Willems, 1972a), (Willems, 1972b) y (Hill y Moylan, 1980). Considere el sistema de tiempo continuo LIT (Lineal e Invariante en el Tiempo):

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu , & x(0) = x_0 \\ y = Cx, \end{cases} \quad (5)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^q$, y $y \in \mathbb{R}^m$ son estado, entrada y salida. Se considerarán *tasas de alimentación* cuadráticas:

$$\omega(y, u) = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} , \quad (6)$$

w donde $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $S \in \mathbb{R}^{m \times q}$ y $R \in \mathbb{R}^{q \times q}$, con Q y R simétricos.

Definición 2: Un sistema Σ_L es *estrictamente disipativo en los estados* con respecto a una tasa de alimentación $\omega(y, u)$ si existen una *función de almacenamiento* positiva definida $V(x) = x^T Px$, y una *función de pérdida* positiva definida en x :

$$Z(x, u) = (K^T x + W^T u)^T (K^T x + W^T u) + \epsilon x^T P x$$

de tal manera que a lo largo de cualquier trayectoria del sistema

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \omega(y(t), u(t)) - Z(x(t), u(t)) . \quad (7)$$

Cuando $\omega(y, u)$ es cuadrática, se dice que Σ_L es (Q, S, R) -EDE.

Esto se cumple si y solo si:

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \epsilon P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T Q C & C^T S \\ S^T C & R \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K \\ W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ W \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

Con P simétrica y positiva definida, y $\epsilon > 0$ (Hill y Moylan, 1980).

Definición 3: Una no linealidad multivaluada sin memoria, variante en el tiempo $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$y \in \psi(t, u) , \quad (9)$$

tal que $0 \in \psi(t, 0)$, es (Q, S, R) -Disipativa, si para toda $t \geq 0$, y $u \in \mathbb{R}^q$ se cumple la desigualdad de disipatividad:

$$\omega(y, u) = y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u \geq 0. \quad (10)$$

E el caso escalar, se dice que una no linealidad sin memoria $\psi(t, u)$ pertenece a un sector $[k_1, k_2]$ si y solo si

$$k_1 u^2 \leq \psi(t, u) u \leq k_2 u^2. \quad (11)$$

que, como se puede ver, corresponde a (10) con $Q = 0$, $S = -\frac{1}{2}$ y $R = k_2$.

Lema 1: Considere el sistema realimentado en la forma de Lure:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu , & x(0) &= x_0 \\ y &= Cx, \\ u &\in -\psi(t, y) , \end{aligned} \quad (12)$$

y suponga que las condiciones dadas en la Suposición 1 se satisfacen. Si el sistema lineal (C, A, B) es $(-R_N, S_N^T, -Q_N)$ -EDE, y ψ satisface $\omega(y, u) = \omega(\psi(t, u), u) \geq 0$ con $(Q, S, R) = (Q_N, S_N, R_N)$, entonces el punto de equilibrio $x = 0$ de (12) es global y exponencialmente estable.

Prueba. Por hipótesis, la existencia local de soluciones de (12) está asegurada. Supóngase que (8) se satisface con

$(Q, S, R) = (-R_N, S_N, -Q_N)$. Sea $V(x) = x^T P x$ una candidata de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado. La derivada con respecto al tiempo de $V(x)$ a lo largo de las trayectorias solución de (12) es $\dot{V} = (Ax + Bu)^T P x + x^T P (Ax + Bu)$, lo que también se puede escribir, con (8) y la última ecuación en (12):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PA + A^T P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} -C^T R_N C & C^T S_N^T \\ S_N C & -Q_N \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. - \begin{bmatrix} K \\ W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ W \end{bmatrix}^T \right\} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} - \epsilon x^T P x \\ &\leq \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} -C^T R_N C \\ S_N C \\ C^T S_N^T \\ -Q_N \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} - \epsilon x^T P x \end{aligned}$$

como $u = -\psi$:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq [-x^T C^T] R_N [Cx] + -[x^T C^T] S_N^T \psi \\ &\quad - \psi^T S_N [Cx] - \psi^T Q_N \psi \end{aligned}$$

como $y = Cx$, lo anterior se puede escribir:

$$\dot{V} \leq - \begin{bmatrix} \psi \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_N & S_N \\ S_N^T & R_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ y \end{bmatrix} - \epsilon V(x) \leq -\epsilon V(x)$$

dado que ψ es (Q_N, S_N, R_N) -disipativo. Como $V(x)$ siempre es positivo, con el Teorema 1 se concluye la prueba. ■

El Lema 1 es una generalización del teorema del círculo para sistemas multivaluados. En el caso de que haya múltiples soluciones, implica que todas tienden a cero.

III. OBSERVADORES DISIPATIVOS PARA SISTEMAS NO LINEALES MULTIVALUADOS

Supóngase que se tiene una planta:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + G\xi + \varphi(t, y, u), & x(0) = x_0 \\ \xi \in \psi(\sigma), y = Cx, \sigma = Hx, \end{cases} \quad (13)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $u \in \mathbb{R}^m$ es una entrada acotada conocida, $y \in \mathbb{R}^p$ es la salida medida, y $\sigma \in \mathbb{R}^r$ es una función lineal de los estados, no necesariamente medible físicamente. $\varphi(t, y, u)$ es una función no lineal univaluada de (t, y, u) , que se asume localmente Lipschitz en y , continua en u , y continua a tramos en t . $\psi(\sigma)$ es una función vectorial multivaluada de dimensión q que depende de σ . Se asume que la Suposición 1 es satisfecha por (13). Es bueno anotar que $\psi(\sigma)$ puede ser una versión convexificada de una función discontinua para algunos valores de x .

Interesa diseñar un *observador* para el sistema (13), esto es, un sistema dinámico Ω que tiene como entradas la entrada u y la salida y de Σ , y como salida $\hat{x}$, que es una estimación del estado x de Σ . Se propone un

observador completo multivaluado como el propuesto en (Moreno, 2004) de la forma:

$$\Omega: \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) + G\zeta + \varphi(t, y, u), \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \zeta \in \psi(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y)) \\ \hat{y} = C\hat{x}, \hat{\sigma} = H\hat{x} \end{cases} \quad (14)$$

$L \in \mathbb{R}^{n \times p}$, y $N \in \mathbb{R}^{r \times p}$ son matrices que deben diseñarse. Se define el error en la estimación del estado por medio de $e \triangleq \hat{x} - x$, el error en la estimación de salidas $\tilde{y} \triangleq \hat{y} - y$, y $\tilde{\sigma} \triangleq \hat{\sigma} - \sigma$. La dinámica del sistema que representa el comportamiento del error e está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (A + LC)e - G[\vartheta - \zeta], \\ \vartheta &\in \psi(\sigma), \zeta \in \psi(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y)) \\ \tilde{y} &= Ce, \tilde{\sigma} = He, \end{aligned} \quad (15)$$

con $e(0) = e_0 = \hat{x}_0 - x_0$. Nótese que $\hat{\sigma} + N\tilde{y} = H\hat{x} + NCe = Hx + He + NCe = \sigma + (H + NC)e$. Definiendo $z \triangleq (H + NC)e = \tilde{\sigma} + N\tilde{y}$, una función del error de estimación, y una nueva no linealidad en general multivaluada $\phi(z, \sigma)$:

$$\phi(z, \sigma) \triangleq \psi(\sigma) - \psi(\sigma + z), \quad (16)$$

la dinámica del error puede ser escrita:

$$\Xi: \begin{cases} \dot{e} = A_L e + G\eta, & e(0) = e_0 \\ z = H_N e, \eta \in -\phi(z, \sigma), \end{cases} \quad (17)$$

donde $A_L \triangleq A + LC$, y $H_N \triangleq H + NC$. Obsérvese que debido a (16) $0 \in \phi(0, \sigma)$ para todo σ , y por ende, $e = 0$ es un punto de equilibrio de (17). En general (17) es no autónomo, dado que la planta (13) lo controla a través de la función lineal de los estados σ . ϕ es entonces una no linealidad variable en el tiempo, cuya variación depende del estado de la planta.

Si el origen de Ξ es UGAE, entonces las trayectorias del observador convergen a las trayectorias de Σ . Esto es cierto a pesar de que en ningún momento se exige la unicidad de soluciones ni para el observador ni para la planta. La convergencia puede verificarse a través de criterios de convergencia de conjuntos, dado que no se consideran soluciones únicas sino conjuntos de soluciones que son válidas (Dontchev y Lempio, 1992).

Una posibilidad para diseñar el observador es obtener las matrices L y N de manera que el sistema la dinámica del error Ξ (17) satisfaga las condiciones del Lema 1. Para esto, es necesario que la no linealidad satisfaga la condición de disipatividad, esto es:

Suposición 2: Sea ϕ (16) tal que para alguna forma cuadrática no positiva definida, la desigualdad $\omega(\phi, z) = \phi^T Q \phi + 2\phi^T S z + z^T R z \geq 0$ se satisfaga para toda σ , para algunas matrices (Q, S, R) .

Entonces el diseño del observador se puede enunciar así:

Teorema 2: Supóngase que las Suposiciones 1 y 2 son ciertas. Si hay matrices L y N tales que el subsistema lineal de Ξ es $(-R, S^T, -Q)$ -EDE, entonces Ω es un observador

exponencial global de Σ , esto es, existen constantes $\kappa, \gamma > 0$ tales que para todo $e(0)$

$$\|e(t)\| \leq \kappa \|e(0)\| \exp(-\gamma t). \quad (18)$$

Prueba. Por definición de $(-R, S^T, -Q)$ -EDE, existe una matriz $P = P^T > 0$, y $\epsilon > 0$ tales que

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \epsilon P + H_N^T R H_N, \\ G^T P - S H_N, \\ PG - H_N^T S^T \\ Q \end{bmatrix} \leq 0. \quad (19)$$

La aplicación del Lema 1 lleva inmediatamente a $\dot{V} \leq -\epsilon V(e)$, con $V(e) = e^T P e$. (18) se obtiene con $\kappa = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$, y $\gamma = \frac{\epsilon}{2}$. ■

Entonces, para diseñar L y N debe satisfacerse la desigualdad matricial (19). Obsérvese que, así planteado, el criterio del círculo no exige que la no linealidad sea cuadrada, esto es, que presente el mismo número de entradas que de salidas.

El método propuesto generaliza y mejora algunos métodos propuestos previamente en la literatura. Incluye el caso en que las no linealidades son suaves, tal como fue propuesto originalmente en (Moreno, 2004). En ese artículo se puede ver que el método incluye como casos especiales el observador por criterio del círculo propuesto en (Arcak y Kokotovic, 1999), el observador Lipschitz clásico de Thau (Thau, 1973), y el observador de Alta Ganancia. Más aún, incluye como un caso especial y lo generaliza, el método de diseño de observadores propuesto en (Heemels *et al.*, 2005), para sistemas discontinuos y multivaluados. Algunas de las ventajas que presenta con respecto a otras metodologías son las siguientes:

- (i) Permite el tratamiento de no linealidades no cuadradas, que no pueden ser tratadas por medio del método propuesto en (Heemels *et al.*, 2005).
- (ii) Las no linealidades no tienen que ser monótonas, porque no se exige unicidad de soluciones.
- (iii) Los grados adicionales de libertad en el diseño pueden ser utilizados para mejorar el diseño, obteniendo resultados menos conservativos, u optimizando alguna función de costo.

IV. EJEMPLO

Para una ilustración muy simple del método, considérese el sistema esquematizado en la Figura 1. Las ecuaciones en espacio de estado del sistema son:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}_1 = F + \xi, \xi \in \psi(\sigma), \\ \dot{x}_2 = x_1, y = x_2, \sigma = x_1 \end{cases}$$

F es la fuerza aplicada al sistema, ψ es el negativo de la no linealidad mostrada en la Figura 1 que representa la fuerza de oposición al movimiento ejercida por el cuerpo, debido a la fricción viscosa y estática. El coeficiente de fricción viscosa es μ_v , y corresponde a la pendiente en la gráfica de

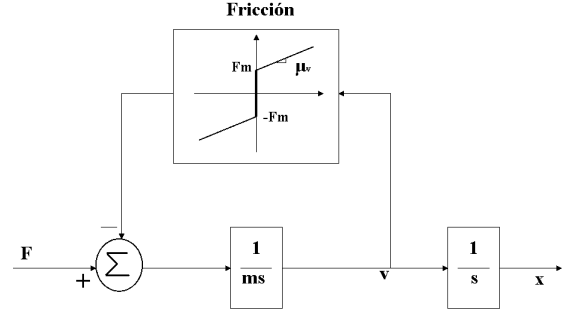


Figura 1. Sistema de movimiento con fricción estática y viscosa

la no linealidad para $v \neq 0$. x_1 es la velocidad y x_2 es la posición del cuerpo en movimiento. En forma matricial:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + BF + G\xi, \xi \in \psi(\sigma), \\ y = Cx, \sigma = Hx \end{cases}$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \mu_v \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El valor de la masa se ha considerado unitario. El observador se define con la estructura propuesta en (14). El sistema que describe la dinámica del error es como en (17). L y N deben diseñarse de manera que se asegure la estabilidad global exponencial del origen del sistema que representa la dinámica del error. Según lo anteriormente expuesto, la estabilidad puede ser asegurada con el Lema 1. Para usar este lema es necesario identificar las matrices Q, S y R que determinan la disipatividad de ϕ . Como se vió para el caso escalar (11), puede usarse la condición de sector de la no linealidad con ese fin. En este caso es sencillo identificar este sector, como puede verse de la Figura 2, en donde se grafica $\phi(z, \sigma)$ para varios valores de σ :

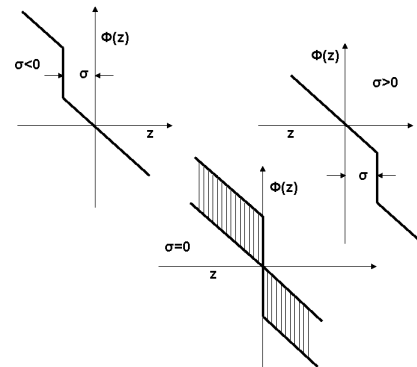


Figura 2. Sector de $\phi(z)$

Se puede apreciar que el sector se define por medio de $\phi(z, \sigma) \in [-\infty, -\mu_v]$, siendo μ_v el coeficiente de fricción

viscosa. Se usa la condición de sector complementaria - $\phi(z, \sigma) \in [\mu_v, \infty]$. Para este sector, y siendo z la entrada a la no linealidad, la desigualdad (11) se escribe $z[\phi(z, \sigma) - \mu_v z] \geq 0$. Obsérvese que esta desigualdad corresponde a la desigualdad de disipatividad (10) con $Q = 0$, $S = \frac{1}{2}$ y $R = -\mu_v$. Para obtener $N = n$ y $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}^T$, la condición de diseño (19) es equivalente a que la función de transferencia $H(s)$ de la parte lineal del sistema, definida entre $-\phi$ y z , sea estrictamente positiva real:

$$H(s) = G(s) [I + \mu_v G(s)]^{-1},$$

donde:

$$G(s) = -H_N (sI - A_N)^{-1} G = \frac{s + n - l_2}{s^2 - sl_2 - l_1},$$

con lo que:

$$H(s) = \frac{s + n - l_2}{s^2 + (\mu_v - l_2)s + (\mu_v(n - l_2) - l_1)}$$

Para una función como $H(s)$, de segundo orden y con un cero real, las condiciones para la estricta positividad real se traducen en que todos los coeficientes de la función de transferencia sean positivos y que el coeficiente de s en el denominador sea mayor que el término independiente en el numerador, lo que se puede escribir así:

$$\begin{aligned} n - l_2 &> 0, \mu_v - l_2 > 0 \\ (\mu_v(n - l_2) - l_1) &> 0, \mu_v - l_2 > n - l_2 \end{aligned}$$

Todas estas condiciones se cumplen, si $\mu_v = 1$, eligiendo $N = n = 0,5$ y $L = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$

El observador se simuló en Matlab junto con la planta, obteniéndose las siguientes respuestas y error del observador:

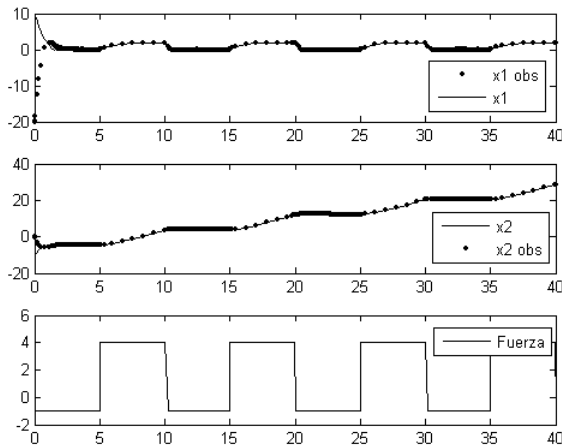


Figura 3. Estados de la planta y el observador

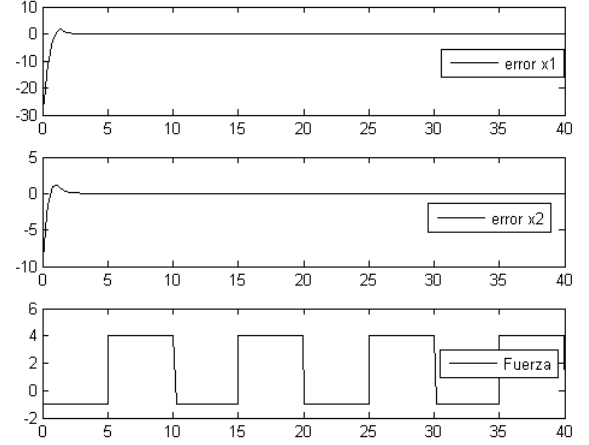


Figura 4. Error del Observador

V. CONCLUSIONES

Se ha aplicado con éxito la metodología de diseño de observadores llamada Técnica de Diseño Disipativa a sistemas con no linealidades multivaluadas, o discontinuas, previa convexificación. Esta técnica generaliza y mejora algunos métodos de diseño de observadores y, en particular, elimina las restricciones del método propuesto en (Heemels *et al.*, 2005). Puede ser aplicada a sistemas con no linealidades discontinuas, no monótonas, no cuadradas, y no requiere unicidad de soluciones del observador.

VI. AGRADECIMIENTOS

Trabajo patrocinado por la DGAPA-UNAM, Proyecto PAPIIT IN 111905-2. Los autores también desean agradecer a UNAM, UPB, Grupo A+D y Colciencias por el apoyo prestado a este trabajo.

REFERENCIAS

- M. Arcak and P. Kokotovic "Nonlinear observers: A circle criterion design", in *Proceedings of the 38th. Conference on Decision and Control*, 1999, IEEE, Phoenix, Arizona, USA. pp. 4872-4876
- J. P. Aubin and A. Cellina, "Differential inclusions; set-valued maps and viability theory", Berlín, Springer-Verlag, 1984.
- A. Bacciotti and L. Rosier, "Lyapunov Functions and Stability in Control Theory", in *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 267, Londres, Springer-Verlag, 2001.
- K. Deimling, "Multivalued differential equations", Berlín, Gruyer, 1992.
- C. A. Desoer and M. Vidyasagar, "Feedback systems: input output properties", New York, Academic press, 1975.
- A. Dontchev y F. Lempio "Difference methods for differential inclusions: A survey", *SIAM Review* 34: 263-294.
- S. Drakunov and V. Utkin. "Sliding-mode observers tutorials". *Proceedings of the 34th. Conference on Decision and Control*, New Orleans (1995).
- A. F. Filippov, "Differential inclusions with discontinuous righthand side", *Mathematics and its applications (Soviet Series)*, Dordrecht, The Netherlands, Kluwer, 1988.
- I. Haskara, Ü. Özgünner and V. Utkin. "On sliding mode observers via equivalent control approach". *International Journal of Control*, 71, pp. 1051-1067 (1998).
- W. Heemels, A. Juloski, B. Brogliato "Observer design for Lur'e systems with monotonic multivalued mappings", in IFAC (ed.) *Preprints of the 16th IFAC World Congress*, 2005, Prague, Czech Republic.

- Hill, D. and Moylan, P. "Dissipative dynamical systems: Basic input-output and state properties", *Journal of the Franklin Institute* 309: 327–357.
- A. Juloski, "Observer design and identification methods for hybrid systems: theory and experiments". PhD thesis, Eindhoven University of Technology. (2004).
- J. Moreno "Observer design for nonlinear systems: A dissipative approach", in IFAC (ed.) *Proceedings of the 2nd. IFAC Symposium on Systems, Structure and Control SSSC2004*, Oaxaca, México, 2004, pp.735-740.
- Thau, F "Observing the state of nonlinear dynamic systems" *Int J. Control* 17: 471–479.
- Van der Schaft "L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control", 2nd edn, Springer-Verlag, London.
- J. Willems "Dissipative dynamical systems, part I: General theory, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*" 45: 321–351.
- J. Willems "Dissipative dynamical systems, part II: Linear systems with quadratic supply rates, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*" 45: 352–393.
- Y. Xiong, M. Saif. "Sliding mode observers for nonlinear uncertain systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(12), pp. 2012–2017 (2001).
- V. Yakubovich, G. Leonov and A. K. Gelig, "Stability of stationary sets in control systems with discontinuous nonlinearities" *Series on stability, vibration and control of systems, vol. 14*, Singapore, World Scientific, 2004.