

## APRENDIENDO ESTRUCTURAS DE CONTROL LINEAL Y SU APLICACIÓN EN PROCESOS EXPERIMENTALES

M. en I. Ricardo Garibay Jiménez  
 Departamento de Ingeniería de Control, Facultad de Ingeniería, UNAM  
 Fax: 52-5-56161855; e-mail: rgaribay@servidor.unam.mx

**Resumen.** Este trabajo tiene como propósito presentar un paquete de controladores digitales de enfoque didáctico, dedicado a la experimentación de los principales esquemas de control lineal que se estudian en los cursos de control básico. La estructura del sistema y su forma de operación favorece el aprendizaje de los algoritmos de control, ya que hace posible la experimentación y el desarrollo de proyectos de aplicación, permitiendo al usuario interactuar en todo momento con el sistema, para modificar los parámetros del controlador y actualizar en línea el programa, sin interrumpir la acción de control. El sistema ha sido aplicado a diversos procesos físicos, de donde se reportan los resultados del control de una planta lineal de tercer orden.

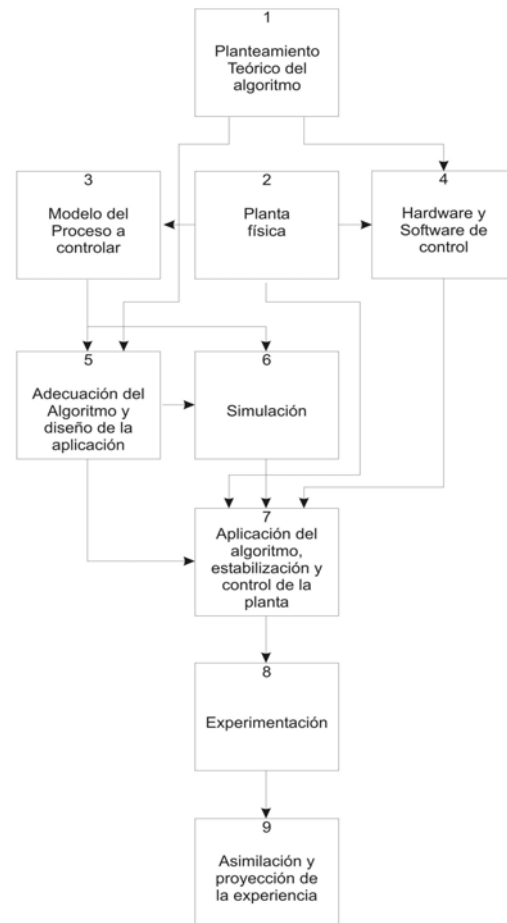
analiza el planteamiento y justificación del algoritmo de control (1), reconoce las características y el comportamiento de la planta (2), para elaborar o comprender el modelo correspondiente (3); posteriormente, realiza la adecuación del algoritmo y diseña la solución de control de acuerdo con las particularidades del caso (5). Con base en el diseño se puede simular (6) o aplicar directamente la solución en la planta física (7). El control en tiempo real de las etapas de aplicación y experimentación (8), requiere del desarrollo previo del hardware y software (4) y la culminación del proceso se logra con la asimilación de la experiencia y su proyección (9) para plantear innovaciones algorítmicas, metodológicas y/o tecnológicas en proyectos posteriores.

### I. Introducción

En la actualidad, para lograr un adecuado dominio de la teoría y el diseño de sistemas de control, es indispensable la aplicación de los algoritmos de control en plantas y procesos de laboratorio, probando bajo condiciones reales las soluciones propuestas, mismas que deben asegurar un desempeño confiable y válido de acuerdo con el planteamiento teórico. Es importante considerar que la experimentación realimenta el proceso de aprendizaje, ya que aporta la experiencia necesaria para mejorar, en lo sucesivo, el planteamiento, análisis y desarrollo de proyectos.

Por estas razones, los laboratorios son parte fundamental en el proceso de formación de ingeniería en control, por lo que se requiere mantenerlos actualizados en su contenido académico, de aplicación e infraestructura. Esta necesidad se ha vuelto cada vez más complicada debido al continuo cambio tecnológico y las limitaciones presupuestales que se tienen para el equipamiento en las instituciones públicas de educación superior. Esta situación puede enfrentarse con base en el desarrollo de *sistemas de instrumentación basados en PC*, como una alternativa de solución económica y accesible.

El sistema que se presenta se basa en el modelo de aprendizaje mostrado en la Figura 1, en donde se muestran las etapas del proceso de aprendizaje de los métodos y esquemas de control, apoyado en la experimentación. Durante este proceso, el estudiante



**Figura 1. Modelo de aprendizaje.**

El sistema proporciona los elementos de hardware y software para aplicar los algoritmos de control, y con base en sus características didácticas, facilita las etapas de aplicación, experimentación y asimilación. Lo anterior, permite que el estudiante concentre su esfuerzo en la comprensión del algoritmo, la elaboración del modelo y el diseño de la solución. Los controladores funcionan sobre una misma tarjeta de adquisición de datos instalada en la PC y software de control desarrollado en el Departamento de Control de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, como una plataforma para diversas soluciones de control, básicas y avanzadas. Los paquetes de programación que se presentan, **CDobject** y **SPVisor**, resuelven la necesidad de contar con dispositivos de control digital económicos y accesibles.

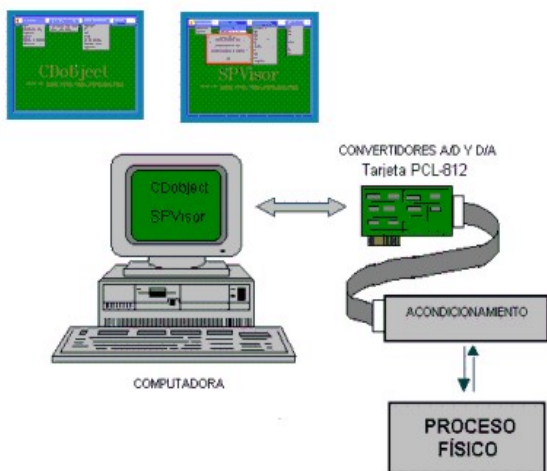


Figura 2. Componentes del sistema

En la Tabla 1 se resumen las funciones, esquemas y aplicación de los controladores.

Controlador	CDobject	SPVisor	SPVisor-K
Esquema	<i>PID</i>	<i>Retro de estado</i>	<i>Control óptimo</i>
	<i>Ubicación de polos</i>	<i>Observador o. c.</i>	<i>Filtro de Kalman</i>
Diseño	<i>Ubicación de polos, modelo E/S</i>	<i>Fórmula Ackermann.</i>	<i>Algoritmos LQR - LQG</i>
Aplicación	<i>Planta lineal con función de transferencia <math>G_p(s)</math></i>	<i>Planta lineal de hasta 5° orden con modelo en variables de estado</i>	

Tabla 1. Esquemas y aplicaciones

Actualmente, este tipo de controladores se pueden desarrollar empleando sistemas como dSPACE, LabVIEW o Matrix, los cuales, presentan una estructura de aplicación abierta para configurar diversas soluciones de control; sin embargo, estas opciones son costosas y tienen la limitante del número de licencias de software adquiridas. La ventaja de la solución propuesta radica en su bajo costo y la facilidad de la aplicación inmediata, de acuerdo con los algoritmos indicados, sin que el alumno tenga que pasar por una etapa de asimilación del software y la programación de la aplicación.

## II. Características y aplicación del controlador CDobject

**CDobject** se desarrolló mediante la programación orientada a objetos (**POO**) para lograr el control en lazo cerrado de procesos continuos por medio de una PC. Codificado en C++, se conecta con el proceso a través de una tarjeta de adquisición de datos, en el rango de (-10,10) volts, para los canales A/D y D/A. En línea, tiene la capacidad de ejercer acciones de control **PID** y por asignación de polos, en forma ininterrumpida, a pesar de que se requiera un cambio de parámetros del controlador o una breve historia de control de la planta. El despliegue de la señal de control  $u(k)$  y de la salida del proceso  $y(k)$  ( $Pv$ ) se presentan en gráficas de barras y contra el tiempo.

**Controlador PID:** La teoría de control considera tres acciones básicas: la proporcional, la integral, y la derivativa [3]. Estas acciones se pueden aplicar de manera combinada dando lugar al algoritmo de control **PID** [3], cuya importancia radica en que da solución satisfactoria a múltiples aplicaciones en la industria y es tradicionalmente estudiado en los cursos de control automático. **CDobject** posee estas acciones de control en sus equivalentes discretos.

**Control por asignación de polos.** A partir del modelo discreto de la planta se puede determinar la estructura del controlador por asignación de polos, con base en la especificación del objetivo de control [4]. A partir de la función de transferencia del proceso

$$G_p(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (1)$$

y la especificación del comportamiento dinámico deseado en malla cerrada

$$H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{Y(z)}{R(z)} \quad (2)$$

es posible obtener una estructura lineal de control

$$U(z) = \frac{T(z)}{S(z)} R(z) - \frac{Q(z)}{S(z)} Y(z) \quad (3)$$

donde los polinomios  $S(z)$ ,  $T(z)$  y  $Q(z)$  determinan una función de transferencia de malla cerrada  $H_m(z)$  a partir de la función discreta del proceso  $G_p(z)$ . La figura 3 muestra el diagrama de bloques del esquema.

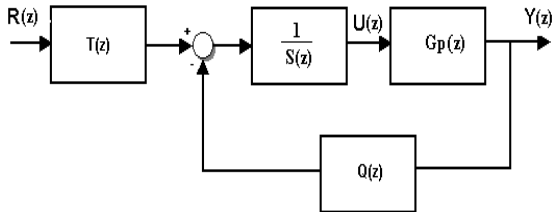


Figura 3. Control por asignación de polos

Esta estructura de control la posee **CDobject**, incluyendo el cálculo de los polinomios, para una planta de segundo orden con un cero estable.

**Aplicación del controlador.** En este caso se empleó la planta de segundo orden

$$G_p(z) = \frac{0.0048(z - 0.9792)}{(z - 1)(z - 0.9048)} \quad (4)$$

la cual determina los parámetros para la asignación de polos:  $a = 1$ ,  $c = 0.9048$ ,  $b = -0.9792$  y  $K = 0.0048$ . Asimismo, se propone como especificación la función de transferencia de malla cerrada

$$H_m(z) = \frac{(1 + p_1z + p_2)z}{z^2 + p_1z + p_2} \quad (5)$$

cuyos coeficientes  $p_1$  y  $p_2$  son calculados por el programa, a partir de los valores deseados de sobrepaso  $M_p$  y tiempo de levantamiento  $t_r$ . En la función  $H_m(z)$  se observa que el algoritmo cancela el cero estable de  $G_p(z)$ .

Al programa **CDobject** se le introducen los términos  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $K$ ,  $M_p$  y  $t_r$  para calcular  $p_1$ ,  $p_2$  y los coeficientes de los polinomios  $T(z)$ ,  $S(z)$  y  $Q(z)$ . Con estos polinomios el programa determina la señal de control (3) y la proporciona al proceso.

El resultado de la prueba para  $M_p = 0.2$  y  $t_r = 2.2$  seg se muestra en la figura 4, en la cual, la gráfica de color rojo, corresponde a la respuesta del sistema ante un cambio del valor de referencia  $\Delta r = 4$  y a la aplicación de una carga  $\Delta p = 25$ . En la misma se pueden medir los términos del comportamiento

dinámico especificado. También, se observa que el sistema logra un error de estado estable nulo por la presencia del integrador de la planta.

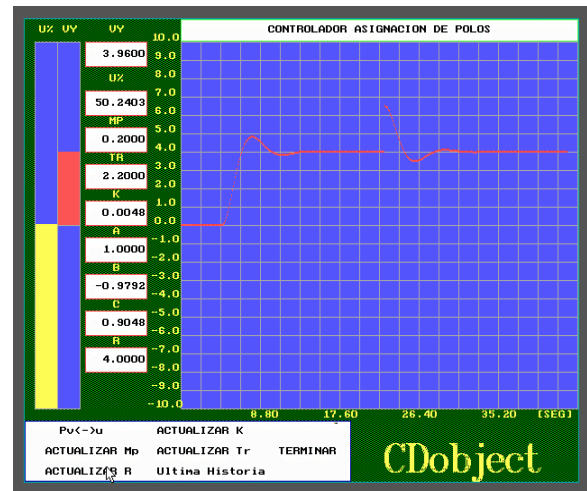


Figura 4. Salida del sistema de control por asignación de polos

### III. Características y aplicación del controlador SPVisor

Con base a la estructura de su antecesor, el paquete **SPVisor** permite el control de procesos continuos, por medio de una computadora personal, de acuerdo con los esquemas de realimentación de estado y observador de orden completo. A partir de la descripción discreta del proceso en variables de estado:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) &= C_d x(k) \end{aligned} \quad (6)$$

el controlador puede manejar una planta controlable y observable, de orden  $n < 6$ , de una entrada-una salida con estimación del estado. Su interfaz gráfica incluye el despliegue de las señales de control  $u(k)$ , la salida de la planta  $y(k)$ , la estimación de la salida  $\hat{y}(k)$  y el error de estimación  $\tilde{y}(k)$ , presentando gráficas de estas señales en forma de barras y contra el tiempo.

En el controlador la regulación se lleva a cabo por medio de la señal de control

$$u(k) = K_d \hat{x}(k) \quad (7)$$

en donde el estimado del estado  $\hat{x}(k)$  en cada instante de muestreo se obtiene del observador:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A_d \hat{x}(k) + B_d u(k) + L_d [y(k) - \hat{y}(k)] \\ \hat{y}(k) &= C_d \hat{x}(k) \end{aligned} \quad (8)$$

Para que este esquema se lleve a cabo, es indispensable el modelo de la planta, dado por las matrices  $A_d$ ,  $B_d$ , y  $C_d$ , la medición de la salida  $y(k)$  y las matrices de ganancia de control  $K_d$  y del observador  $L_d$ .

El paquete **SPVisor** desarrolla las funciones de regulación y servo e incluye la variante de que la planta tenga polos en el origen, por lo que la ley de control toma la forma descrita por las ecuaciones siguientes

$$u(k) = u_1(k) + u_2(k) \quad (9)$$

$$u_1(k) = K_d N_x r(k) - K_d \hat{x}(k) \quad (10)$$

$$u_2(k+1) = u_2(k) + k_i [r(k) - y(k)] \quad (11)$$

Si la planta es tipo 0, debe introducirse el término de ganancia  $k_i > 0$  indicado en (11), para que el programa genere un integrador en la trayectoria directa, según se muestra en el diagrama de bloques del sistema, mostrado en la figura 5. Por otra parte, si la planta es de tipo 1 o mayor, debe introducirse  $k_i = 0$ , con lo cual, la parte integral del control no se realiza. Para aplicar el controlador se deberá tener muy clara esta diferencia al momento de declarar el valor de dicho término. Las características mencionadas hacen que el controlador sea más versátil y completo, de acuerdo con el planteamiento en [2].

Para emplear el controlador, las matrices  $k_i$ ,  $K_d$ , y  $L_d$  deben ser previamente diseñadas, tomando como base las especificaciones del desempeño; asimismo, debe calcularse la matriz  $N_x$  indicada en (10), con el procedimiento desarrollado en [2], para compensar el estado con respecto a los cambios de referencia. Otros parámetros que también deben considerarse son el período de muestreo  $T$  y el orden  $n$  del modelo del proceso.

**Aplicación del controlador SPVisor con el método de ubicación de polos (Fórmula de Ackermann).**  
Este esquema se aplicó en una planta controlable y observable de segundo orden, tipo 0, de una entrada y una salida, cuyo modelo discreto (12) se expresa para un período de muestreo  $T = 0.1$  seg.

$$A_d = \begin{bmatrix} 1.8097 & -0.8187 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$C_d = [0.0047 \quad 0.0044]$$

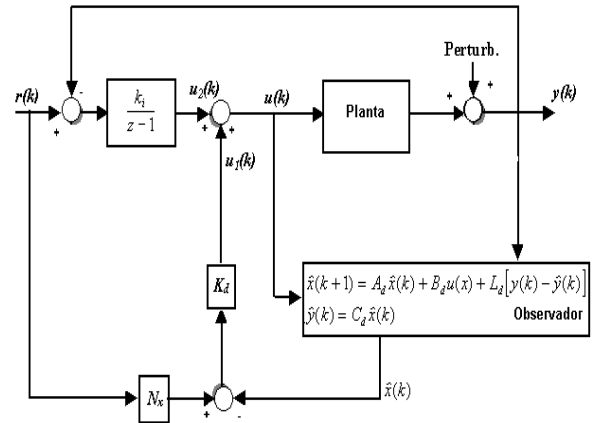


Figura 5. Esquema de control y observador en SPVisor.

La especificación del comportamiento de malla cerrada considera dos polos complejos como los dominantes, para definir los parámetros  $M_p$  y  $t_r$  como los representativos de la respuesta deseada; el resto de los polos,  $n_l = n - 2$ , se definen reales negativos:

Polos dominantes:  $M_p = 0.2$  y  $t_r = 2.2$  seg.

Otros polos:  $s_3 = -9$ .

A partir de estas definiciones se puede emplear la fórmula de Ackermann para determinar la matriz de diseño  $K_d$ , que incluye la ganancia del integrador  $k_i$ . La matriz  $N_x$  se calcula de acuerdo con el método mencionado [2].

$$K_d = [0.5138 \quad -0.4434], \quad k_i = 1.3029$$

$$N_x^T = [110.42 \quad 110.42] \quad (13)$$

Para definir los polos del observador se sigue el criterio basado en que la rapidez de la estimación debe ser mucho mayor que la dinámica de malla cerrada, por lo cual, basta con definir valores reales negativos para los  $n$  polos del observador y con ellos calcular la matriz  $L_d$ , también por medio de la fórmula de Ackermann. En este caso se especificaron los polos del observador en el dominio continuo:  $q_{1,2} = -15$ , obteniéndose

$$L_d^T = [170.7 \quad 129.01] \quad (14)$$

El resultado de la prueba se muestra en la figura 6, en la cual, la gráfica de color rojo, corresponde a la respuesta del sistema ante un cambio del valor de referencia  $\Delta r = 4$  y a la aplicación de una carga  $\Delta p = 2.5$ . De la misma gráfica se pueden medir los términos del comportamiento dinámico especificado y se observa que el sistema logra un error de estado estable nulo debido a la presencia del integrador generado por el controlador. La traza de color amarillo corresponde a la señal de control

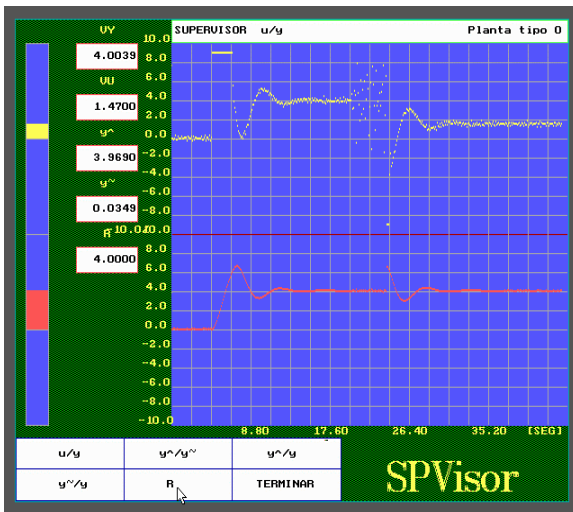


Figura 6. Control por realimentación de estado y observador de una planta tipo 0

#### IV. Características y aplicación del controlador SPVisor-K

Esta versión del controlador digital se emplea para la experimentación con el esquema de control digital óptimo cuadrático (DLQR), en plantas lineales, expresadas en la forma discreta (6). El controlador incluye el seguimiento de las variaciones de la señal de referencia y un observador de estado de orden completo.

El algoritmo DLQR [1] asegura que el proceso transite establemente del estado  $x(0)$  a  $x(N)$ , en  $N$  pasos, al aplicarse la secuencia de control óptima

$$u(k) = \{u(0), u(1), u(2) \dots u(N-1)\} \quad (15)$$

que se obtiene minimizando el índice de costo

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k+1)Qx(k+1) + u^T(k)Ru(k)]$$

donde las matrices  $Q$  y  $R$  son simétricas positivas semidefinidas:  $Q = Q^T \geq 0$  y  $R = R^T \geq 0$ . Estas matrices son propuestas por el diseñador para ponderar la importancia relativa del esfuerzo de control y el estado. El índice se expresa en una forma cuadrática con un valor mínimo garantizado, en términos del esfuerzo de control  $u(k)$  y del estado  $x(k)$  como desviación de la condición de equilibrio.

Empleando la técnica de programación dinámica y el principio de optimalidad de Bellman se establece que la secuencia de control óptima se calcula, paso a paso, como:

$$u(N-j) = -K_{N-j}x(N-j) \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

en donde la matriz de control  $K_{N-j}$ , se define

$$K_{N-j} = (B_d^T P_{N-j+1} B_d + R)^{-1} B_d^T P_{N-j+1} A_d \quad (17)$$

y la matriz  $P_{N-j+1}$  es la solución de la ecuación de recurrencias de Ricatti [1]. Dicha solución requiere la especificación de las matrices  $Q$  y  $R$ .

Si el horizonte de la solución puede ampliarse a un número indefinido de pasos, es decir, si  $N \rightarrow \infty$ , las matrices de control (17) y de Riccati convergen a una forma cerrada

$$\bar{K} = (B_d^T \bar{P} B_d + R)^{-1} B_d^T \bar{P} A_d \quad (18)$$

$$\bar{P} = Q + A_d^T \bar{P} [I - B_d (B_d^T \bar{P} B_d + R)^{-1} B_d^T \bar{P}] A_d \quad (19)$$

Con base en los enunciados anteriores se calcula el controlador DLQR, con base en el modelo de la planta y las matrices de ponderación  $Q$  y  $R$ . El controlador emplea la matriz de control  $\bar{K}$ , de acuerdo con la estructura de la figura 5, que se ha descrito previamente. El observador  $L_d$  puede diseñarse con el enfoque de asignación de polos, como en el caso anterior.

**Aplicación del controlador SPVisor en el enfoque de control óptimo DLQR.** Este esquema se aplicó en una planta controlable y observable de tercer orden, tipo 1, de una entrada y una salida, cuyo modelo discreto (20) se expresa para un periodo de muestreo  $T = 0.1$  seg

$$A_d = \begin{bmatrix} 2.8097 & -2.6284 & 0.8187 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_d = 10^{-3} [0.1586 \quad 0.6035 \quad 0.1435] \quad (20)$$

La definición de las matrices de ponderación se obtuvo de un proceso de ensayos en simulación, quedando

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 150 \quad (21)$$

Los ensayos permitieron definir las matrices de ponderación para un comportamiento dinámico aproximado por un tiempo de levantamiento  $t_r = 2.2$  seg

A partir de estas definiciones se emplean las ecuaciones (18) y (19) para determinar la matriz de control óptimo  $K_d$ .

$$K_d = [0.0994 \quad -0.1754 \quad 0.0776] \quad (22)$$

La matriz  $N_x$  se calcula de acuerdo con la propuesta en [2].

$$N_x^T = [1104.3 \quad 1104.3 \quad 1104.3] \quad (23)$$

En este caso, el diseño del observador se hizo por el método de ubicación de polos, de tal forma que la rapidez de la estimación sea mayor que la dinámica de malla cerrada, especificando los polos del observador en los valores:  $q_{1,2,3} = -15$ . La matriz  $L_d$ , se calculó por medio de la fórmula de Ackermann.

$$L_d^T = [3841.7 \quad 2295.7 \quad 1014.4] \quad (24)$$

El resultado de la prueba se muestra en la figura 7, en la cual, la gráfica de color rojo, corresponde a la respuesta del sistema ante un cambio del valor de referencia  $\Delta r = 4$  y a la aplicación de una carga  $\Delta p = 4$ . La traza de color amarillo corresponde a la señal de control.

## V. Conclusiones

A través del presente trabajo se han probado diversos algoritmos de control digital en procesos físicos experimentales y se han comprobado las ventajas que

brindan los controladores basados en **PC** para desarrollar con mayor eficacia la enseñanza de la teoría de control, realizar prácticas sencillas y didácticas, y evaluar el desempeño de los esquemas de control que se proponen. Es importante señalar que todos los algoritmos fueron suficientemente probados, lográndose desempeños apegados a los que se plantearon teóricamente y muy similares a los obtenidos en las simulaciones correspondientes. Además es importante destacar que los paquetes **CObject** y **SPVisor** operan sobre una misma plataforma de programación, lo que ha permitido ahorrar código y evolucionar un programa original hacia diversas aplicaciones.

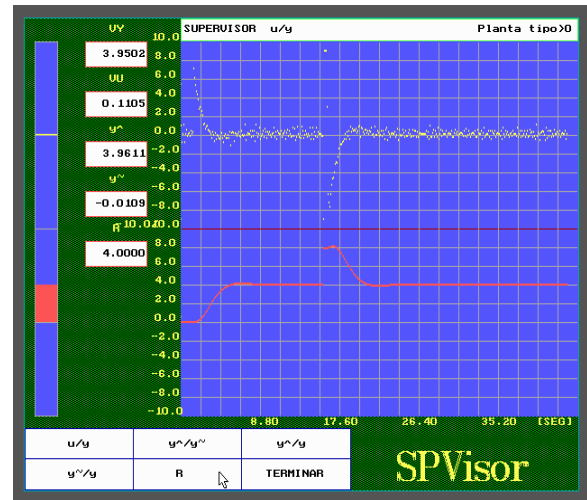


Figura 7. Control DLQR de una planta tipo 1

## Referencias

- [1] Iserman, R. "Digital Control Systems", vol1, 2<sup>nd</sup> ed. Springer-Verlag, Berlín (1989).
- [2] Franklin, G. F., Powell, J. D. "Digital Control of Dynamic Systems", 2<sup>nd</sup> ed. Addison-Wesley, New York (1990).
- [3] Ogata, K. "Ingeniería de Control Moderna", 3<sup>a</sup> ed. Prentice-Hall Hispanoamericana, México (1990).
- [4] Astrom, K. J., Wittenmark, B. "Computer Controlled Systems: Theory and Design" Prentice-Hall, Englewood Cliffs N.J. (1984).
- [5] Schildt, H. "Turbo C/C++: The Complete Reference". Osborne Mcgraw-Hill, Berkeley, Ca. (1992).
- [6] Rosas, A. "Paquete de controladores digitales mediante programación orientada a objetos". Tesis profesional. Facultad de Ingeniería, UNAM, México (1994).
- [7] Ollero, A. "Control por Computadora", Ediciones Alfaomega, México, D. F. (1992).