

Observador adaptable para la estimación de densidad de tráfico

Luis Alvarez-Icaza

Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510, Coyoacán DF, México

Laura Munoz, Xiaotian Sun, Roberto Horowitz

Department of Mechanical Engineering, University of California at Berkeley, Berkeley, CA 94720, USA

Resumen—Se propone un esquema para la estimación de densidad de tráfico a usarse en el control en tiempo real de rampas de acceso a vías rápidas. El esquema se puede emplear en dos situaciones: a) cuando no hay sensores de flujo apropiadamente localizados cerca de la rampa y b) cuando los sensores, de existir, están dañados o funcionan defectuosamente. Para el diseño se suponen disponibles algunas mediciones de flujo y velocidad en la vecindad del punto de control de acceso. Con base en esta información, se propone un observador adaptable no-lineal de densidad que calcula además los factores de mezcla que determinan el comportamiento del modelo en los dos regímenes de tráfico: libre o congestionado. La base para el diseño son técnicas de Lyapunov que aprovechan la estructura de un modelo de conservación de vehículos.

I. Introducción

Aumentar la eficiencia en el uso de autopistas y vías rápidas es una tarea prioritaria en muchas ciudades del mundo. Esto ocurre en un contexto en que, simultáneamente, aumenta la demanda de transportación terrestre y se tienen severas limitaciones ambientales y de espacio para la construcción de nueva infraestructura. Los enfoques tradicionales para resolver el problema de control de tráfico son insuficientes, por lo que el uso de nuevas tecnologías para resolver el problema del tráfico vehicular es cada día más frecuente [1], [2]. Entre estas nuevas tecnologías se pueden mencionar las control adaptable de cruce, control de tracción y frenado, sistemas de señalización variable y el control en tiempo real de rampas de acceso.

El objetivo de las técnicas de control de acceso es restringir, cuando es necesario, el acceso de los usuarios a las vías rápidas con el fin de evitar la formación de congestión en estas. En estos sistemas se puede forzar a los usuarios a esperar en la rampa de acceso. La espera, sin embargo, se compensa rápidamente con la disminución de los tiempos de recorrido en una vía rápida no congestionada.

Para implantar estas técnicas de control de acceso en tiempo real a las vías rápidas se requiere información de tráfico que ya está disponible en muchas ciudades, donde los control de control de tráfico manejan datos de flujo, ocupación, velocidad y densidad vehiculares en un número

variado de puntos. En la mayoría de los casos, sin embargo, esta información no se usa para el control automático en tiempo real y está más dirigida al despacho de tráfico¹.

Existen ya disponibles técnicas de control en lazo cerrado para rampas de acceso cuyo propósito es aliviar la congestión en autopistas [3], [4], [5]. Estas técnicas requieren mediciones precisas de la densidad u ocupación en la vías rápidas. En muchos casos, sin embargo, las mediciones disponibles no son obtenidas en lugares lo suficientemente cerca de la rampa de acceso o los sensores disponibles están dañados. Estos dos problemas implican la necesidad de diseñar esquemas de observación de tráfico que permitan estimar la información faltante.

El objeto de este artículo es presentar un esquema de observación de tráfico para estimar la densidad vehicular en la parte media de una sección de autopista, bajo la suposición de que la información de tráfico a la entrada y a la salida de dicha sección es conocida. El esquema se construye tomando como base un modelo de conservación de vehículos, que considera que existe una relación velocidad-densidad dada por algún diagrama fundamental. Se diseña después un observador no lineal que explota la estructura del modelo para definir la forma de una matriz de ganancias de observación. Para el diseño del observador es necesario estimar una serie de parámetros, que aquí se denominan factores de mezcla, que surgen al discretizar espacialmente los modelos de conservación de vehículos. Estos factores cambian según el régimen de tráfico: libre o congestionado, por lo que su estimación en línea resulta apropiada.

El artículo incluye una primera sección donde se plantea el modelo de tráfico vehicular y se describen las relaciones fundamentales utilizadas. A continuación, la siguiente sección detalla el diseño del observador adaptable y analiza sus propiedades de convergencia. Se concluye con secciones que muestran los resultados de simulación y las conclusiones del trabajo.

II. Modelado del tráfico vehicular

El modelo de tráfico que se presenta se basa en un principio de conservación vehicular que puede expresarse como

$$\frac{\partial \mathbf{N}(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \{ \mathbf{V}(x, t) \mathbf{N}(x, t) \} \quad (1)$$

¹Traffic management control.

Investigador y corresponsal; alvar@pumas.iingen.unam.mx .
 Estudiante de posgrado; lmunoz@me.berkeley.edu .
 Estudiante de posgrado; sunx@me.berkeley.edu .
 Profesor; horowitz@me.berkeley.edu .

donde x es la posición longitudinal a lo largo de la vía rápida, t es el tiempo, $\mathbf{N}(x, t)$ la densidad vehicular y $\mathbf{V}(x, t)$ la velocidad longitudinal. Ambas cantidades, $\mathbf{N}(x, t)$ y $\mathbf{V}(x, t)$ se agregan par el total de carriles de la vía rápida.

El modelo de la Ec. (1) se puede discretizar en un conjunto de tramos de longitud finita, si se integra dicha ecuación con respecto a x de ambos lados. Para esta integración se pueden considerar condiciones de frontera a la entrada o salida del tramo a modelar, según se requiera modelar tráfico libre o congestionado, como se describirá más adelante. La Fig. 1 muestra un diagrama de una sección de autopista discretizada en cuatro secciones, donde la integración se ha realizado con condiciones de frontera fijas a la entrada del tramo. El modelo correspondiente tiene la forma

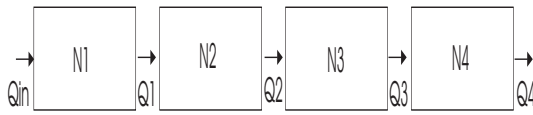


Fig. 1. Modelo de una autopista con secciones discretas

$$\dot{n}_1 = \frac{1}{L_1}(q_{in} - q_1) \quad (2a)$$

$$\dot{n}_2 = \frac{1}{L_2}(q_1 - q_2) \quad (2b)$$

$$\dot{n}_3 = \frac{1}{L_3}(q_2 - q_3) \quad (2c)$$

$$\dot{n}_4 = \frac{1}{L_4}(q_3 - q_4) \quad (2d)$$

donde n_i es la densidad vehicular promedio en la sección i , L_i la longitud de la sección i , q_i el flujo entre las secciones i y $i + 1$, y q_{in} el flujo de entrada a la primera sección. A través de la concatenación de modelos como el de la Ec. (2) es posible modelar sistemas de vías rápidas más complejos.

En el modelo de la Ec. (2), se ha supuesto que el flujo q_i en el modelo se puede expresar como

$$q_i = n_{q_i} v_{q_i} \quad (3)$$

donde n_{q_i} y v_{q_i} son la densidad y velocidad en el punto donde se conectan las secciones i y $i + 1$. Aunque para el caso más general de sistemas hidrodinámicos, la velocidad y la densidad son variables independientes, para los sistemas de transporte existe amplia literatura sobre la forma en que los conductores ajustan su velocidad en función de la densidad vehicular que perciben localmente. Esta relación se formaliza a través de lo que se conoce como "diagramas fundamentales." La Fig. 2 muestra dos curvas que corresponden a dos diagramas fundamentales diferentes. La forma de los diagramas cambia en función de las hipótesis con que se construyen. En los diagramas de la Fig. 2 se distinguen dos partes. En la primera parte de la curva, que corresponde a densidades bajas, la velocidad

es constante. Con ello se pretende modelar el régimen de tráfico que se conoce como flujo libre, que se caracteriza porque los conductores circulan a la máxima velocidad posible. La segunda parte de la curva, para densidades más altas, muestra que la velocidad decrece con el aumento en la densidad y describe el comportamiento cuando ocurre congestión. En el primer ejemplo mostrado en la Fig. 2 la velocidad decrece linealmente con la densidad, cuando esta excede un valor crítico², hasta llegar al punto de estancamiento donde la velocidad es cero. En el segundo ejemplo, los conductores reducen su velocidad en función del cuadrado de la distancia que los separa del conductor frente a ellos. Esta distancia es función inversa de la densidad, a mayor densidad menor distancia y, por tanto, menor velocidad.

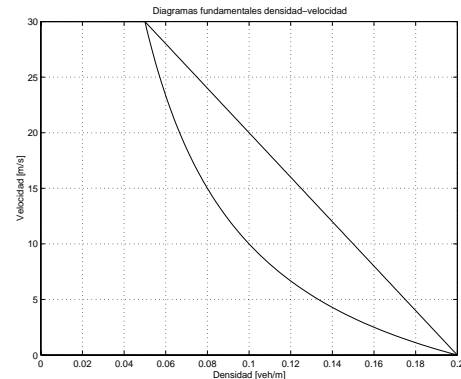


Fig. 2. Ejemplos de diagramas fundamentales

Como en la Ec. (2) se usa la densidad n_i , que modela la densidad promedio en la sección i , y no la densidad n_{q_i} en el punto de conexión entre la sección i y $i + 1$, como se supuso en la Ec. (3), es necesario expresar n_{q_i} en función de n_i , para ello se propone entonces modelar los flujos q_i de acuerdo a

$$q_1 = (\alpha_1 n_1 + (1 - \alpha_1) n_2) v_{q_1} \quad (4a)$$

$$q_2 = (\alpha_2 n_2 + (1 - \alpha_2) n_3) v_{q_2} \quad (4b)$$

$$q_3 = (\alpha_3 n_3 + (1 - \alpha_3) n_4) v_{q_3} \quad (4c)$$

$$q_4 = n_4 v_{q_4} \quad (4d)$$

donde $\alpha_i \in [0, 1]$ son factores de mezcla que se relacionan con la longitud de las secciones i y $i + 1$ y el régimen de tráfico: libre o congestionado [6]. En este artículo estos factores son desconocidos, aunque se suponen constantes para cada condición de tráfico.

Los términos entre paréntesis en el lado derecho de la Ec. (4) implican que la densidad n_{q_i} es una mezcla convexa de las densidades promedio n_i en las secciones aledañas. La velocidad v_{q_i} o bien es conocida o se calculará a partir de un diagrama fundamental y de los valores de n_i y α_i .

Si las Ecs. (2) y (4) se arreglan en forma matricial se llega a

$$\dot{\mathbf{N}} = L_{in} V_q A_\alpha \mathbf{N} + B q_{in} \quad (5)$$

²0.05 [veh/m] para el ejemplo en la Fig. 2.

donde

$$N = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix}, \quad L_{in} = \begin{pmatrix} 1/L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/L_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/L_4 \end{pmatrix},$$

$$V_q = \begin{pmatrix} v_{q_1} & 0 & 0 & 0 \\ -v_{q_1} & v_{q_2} & 0 & 0 \\ 0 & -v_{q_2} & v_{q_3} & 0 \\ 0 & 0 & -v_{q_3} & v_{q_4} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1/L_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -(1-\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & -(1-\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_3 & -(1-\alpha_3) \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Asuma ahora que el flujo de entrada q_{in} es constante. Se analizará la estabilidad del equilibrio $\tilde{q}_i = q_i - q_{in}$. Es importante remarcar que el valor constante de q_{in} se puede obtener con una combinación de densidad y velocidad que corresponde a flujo libre o con una combinación que corresponde a tráfico congestionado. Defina la siguiente candidata a función de Lyapunov

$$W_1 = (\tilde{q}_1 \quad \tilde{q}_2 \quad \tilde{q}_3 \quad \tilde{q}_4) \begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \\ \tilde{q}_4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Si se toma la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (6), y se asume, por simplicidad que $L_i = L\forall i$, se puede mostrar que

$$\dot{W}_1 = (\tilde{q}_1 \quad \tilde{q}_2 \quad \tilde{q}_3 \quad \tilde{q}_4) \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial n_{q_1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \tilde{q}_2}{\partial n_{q_2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \tilde{q}_3}{\partial n_{q_3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \tilde{q}_4}{\partial n_{q_4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \\ \tilde{q}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-2\alpha_1 & -(1-\alpha_1) & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1-2\alpha_2 & -(1-\alpha_2) & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 1-2\alpha_3 & -1(-\alpha_3) \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \\ \tilde{q}_4 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Las condiciones suficientes para que todos los valores característicos de la matriz en la forma cuadrática en la Ec. (7) sean negativos, y por tanto que el equilibrio $\tilde{q}_i = 0$ sea asintóticamente estable, son que *i*) $0.5 < \alpha_i < 1$ y *ii*) $\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial n_{q_i}} > 0$. La segunda condición implica tráfico en flujo libre, pues solamente en este caso las derivadas parciales son positivas. El otro punto de equilibrio, en la región congestionada, es inestable para esta condición de frontera tráfico arriba.

Es posible desarrollar un modelo similar al modelo de la Ec. (5), si las condiciones de frontera se toman a la salida del tramo de vía rápida. La diferencia más importante entre ambos casos es que ahora el punto en la región congestionada es asintóticamente estable si $0 < \alpha_i < 0.5$.

Estos resultados son consistentes con los que se presentan en [7], aunque el paradigma de modelado usado para los flujos q_i en este artículo es diferente al usado en [7].

III. Estimación de densidad

Una vez establecido el modelo dinámico para el tramo de autopista, se procede a proponer un observador para la densidad en el mismo. Para ello se asume que existen sensores de flujo y velocidad al inicio del tramo y entre las secciones 1 y 2, 3 y 4, y al final del tramo. Los sensores típicos de flujo y velocidad se representan esquemáticamente en la Fig. 3. Se componen de dos juegos de bobinas que se colocan sobre la carpeta asfáltica defasados entre sí en la dirección del flujo vehicular por una distancia conocida. La presencia de un vehículo cambia las propiedades magnéticas e induce pulsos en los embobinados. Si se conoce la distancia entre bobinas, se puede medir el tiempo entre pulsos y con ello inferir la velocidad. El número de pulsos por unidad de tiempo da una medida del flujo vehicular. Así las siguientes cantidades son conocidas: q_{in} , q_1 , q_3 , q_4 , v_{q_1} , v_{q_3} y v_{q_4} .

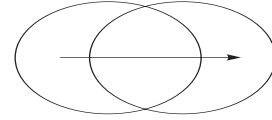


Fig. 3. Sensores de flujo y velocidad

Con base en lo anterior, se propone el siguiente observador para la densidad vehicular

$$\dot{\hat{N}} = L_{in} \hat{V}_q \hat{A}_\alpha \hat{N} + B q_{in} + K(y - \hat{y}) \quad (8)$$

donde \hat{N} es el vector de densidades estimadas, \hat{A}_α es la matriz construida con los estimados de las α_i ,

$$\hat{V}_q = \begin{pmatrix} v_{q_1} & 0 & 0 & 0 \\ -v_{q_1} & \hat{v}_{q_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{v}_{q_2} & v_{q_3} & 0 \\ 0 & 0 & -v_{q_3} & v_{q_4} \end{pmatrix},$$

$$y = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}, \quad \hat{y} = \begin{pmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_3 \\ \hat{q}_4 \end{pmatrix}$$

y K es una matriz de ganancias que se definirá más adelante.

Es posible expresar y y \hat{y} como

$$y = V_{q_s} A_{\alpha_s} N; \quad \hat{y} = V_{q_s} \hat{A}_{\alpha_s} \hat{N}$$

con $V_{q_s} = \text{diag}\{v_{q_1}, v_{q_3}, v_{q_4}\}$,

$$A_{\alpha_s} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & (1-\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & (1-\alpha_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y \hat{A}_{α_s} construida con los estimados de α_i . Si se define el vector de errores de estimación de densidad como $\tilde{N} = N - \hat{N}$ y se utilizan las Ecs. (5) y (8), se llega a la siguiente dinámica para el error de estimación de densidad

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{N}} = & L_{in} V_q A_\alpha \tilde{N} + L_{in} \tilde{V}_q \hat{A}_\alpha \hat{N} + L_{in} V_q \tilde{A}_\alpha \hat{N} \\ & - K V_{q_s} A_{\alpha_s} \tilde{N} - K V_{q_s} \tilde{A}_{\alpha_s} \hat{N} \end{aligned} \quad (9)$$

donde

$$\tilde{V}_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{v}_{q_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{v}_{q_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{A}_\alpha = \begin{pmatrix} -\tilde{\alpha}_1 & \tilde{\alpha}_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{\alpha}_2 & \tilde{\alpha}_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{\alpha}_3 & \tilde{\alpha}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_{\alpha_s} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 & -\tilde{\alpha}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\alpha}_3 & -\tilde{\alpha}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El vector de errores de estimación paramétrica se define como $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T - (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3)^T$ y se introduce la siguiente candidata a función de Lyapunov

$$W = \tilde{N}^T \tilde{N} + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (10)$$

para analizar la estabilidad del equilibrio $\tilde{N} = 0$, $\tilde{\theta} = 0$. Derivando W con respecto al tiempo conduce a

$$\begin{aligned} \dot{W} = & \tilde{N}^T (L_{in} V_q A_\alpha + A_\alpha^T V_q^T L_{in}) \tilde{N} \\ & - \tilde{N}^T (K V_{q_s} A_{\alpha_s} + A_{\alpha_s}^T V_{q_s} K^T) \tilde{N} \\ & + \tilde{N}^T L_{in} \tilde{V}_q \hat{A}_\alpha \hat{N} + \hat{N}^T \hat{A}_\alpha \tilde{V}_q^T L_{in} \tilde{N} \\ & + \tilde{N}^T (L_{in} V_q \tilde{A}_\alpha - K V_{q_s} \tilde{A}_{\alpha_s}) \hat{N} \\ & + \hat{N}^T (\tilde{A}_\alpha^T V_q^T L_{in} - \tilde{A}_{\alpha_s}^T V_{q_s}^T K^T) \tilde{N} + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \end{aligned} \quad (11)$$

El tercer término del lado derecho se puede desarrollar como

$$\tilde{N}^T L_{in} \tilde{V}_q \hat{A}_\alpha \hat{N} = \tilde{N}^T F G \tilde{N}$$

donde

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $\gamma_2, \gamma_3 \geq 0$. Este resultado se deriva como sigue. De los diagramas fundamentales se observa que la velocidad solo es diferente de cero para valores de densidad entre cero y la densidad de tráfico estancado. Además, dado que los diagramas fundamentales son funciones no crecientes es siempre el caso que

$$v(n_1) - v(n_2) = -\gamma(n_1 - n_2); \gamma \geq 0 \quad (12)$$

por lo que $\tilde{v}_{q_2} = -\gamma_2 \tilde{n}_2 - \gamma_3 \tilde{n}_3$. En particular, debe notarse que el valor de γ_i depende de $\max_n |\partial v(n)/\partial n|$ y de los valores máximos de v_{q_i} y \hat{n}_i .

Adicionalmente, es posible mostrar que la matriz

$$L_{in} V_q A_\alpha + A_\alpha^T V_q^T L_{in} \leq 0 \quad (13)$$

si $0.5 < \alpha_i \leq 1$. Por lo tanto si la matriz K se elige de acuerdo con

$$(K V_{q_s} A_{\alpha_s} - F G) + (A_{\alpha_s}^T V_{q_s} K^T - G^T F^T) \geq 0 \quad (14)$$

se consigue que los cuatro primeros términos en la Ec. (11) sean negativos semidefinidos. Los términos restantes se reescriben como

$$\begin{aligned} & 2\tilde{N}^T (L_{in} V_q \tilde{A}_\alpha - K V_{q_s} \tilde{A}_{\alpha_s} \hat{N}) + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} = \\ & 2\tilde{N}^T (L_{in} \Psi_3(N, \hat{N}) - K \Psi_4(\hat{N})) \tilde{\theta} + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \end{aligned} \quad (15)$$

donde

$$\Psi_3 = \begin{pmatrix} -v_{q_1}(\hat{n}_1 - \hat{n}_2) & 0 & 0 \\ v_{q_1}(\hat{n}_1 - \hat{n}_2) & -v_{q_2}(\hat{n}_3 - \hat{n}_3) & 0 \\ 0 & v_{q_2}(\hat{n}_2 - \hat{n}_3) & -v_{q_3}(\hat{n}_3 - \hat{n}_3) \\ 0 & 0 & v_{q_3}(\hat{n}_3 - \hat{n}_4) \end{pmatrix}$$

$$\Psi_4 = \begin{pmatrix} v_{q_1}(\hat{n}_1 - \hat{n}_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_{q_3}(\hat{n}_3 - \hat{n}_4) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si se elige una ley de adaptación tipo gradiente

$$\dot{\tilde{\theta}} = \Gamma \Psi_4^T \tilde{y}, \quad (16)$$

la derivada con respecto al tiempo de W se puede reescribir en forma matricial como

$$\dot{W} = -(\tilde{\theta} \quad \tilde{N}) \begin{pmatrix} 2\Psi_4^T & -2\Psi_4^T A_{\alpha_s} V_{q_s} \\ -2(K\Psi_4 - L_{in}\Psi_3) & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{N} \end{pmatrix} \quad (17)$$

donde

$$\begin{aligned} H = & -(L_{in} V_q A_\alpha + A_\alpha^T V_q^T L_{in}) - (K V_{q_s} A_{\alpha_s} - F G) \\ & - (A_{\alpha_s}^T V_{q_s} K^T - G^T F^T) \end{aligned}$$

La matriz en la forma cuadrática de la Ec. (17) es una S -matriz [8], por lo que existen factores de escala sobre cada uno de los estados tales que $\dot{W} \leq 0$, de donde se sigue la estabilidad de \tilde{N} y $\tilde{\theta}$. Adicionalmente, si se emplea el Lema de Barbalat's [8], se puede mostrar que $\lim_{t \rightarrow \infty} q_i - \hat{q}_i = 0$. Conseguir que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta} = 0$ requiere de excitación persistente.

El análisis de estabilidad para el caso congestionado, cuando las condiciones de frontera se fijan tráfico abajo, se realiza en forma similar y no se presenta en este artículo por economía de espacio. Solamente es importante mencionar que los factores de mezcla deben satisfacer en este caso $0 < \alpha_i < 0.5$.

IV. Resultados de simulación

En esta sección se presentan los resultados de dos simulaciones para ilustrar el funcionamiento del observador. Una simulación es para tráfico en flujo libre y la otra para tráfico congestionado. Las condiciones para la simulación son como sigue. Se simularon los cuatro tramos de vía rápida mostrados en la Fig. 1, cada uno de ellos con una longitud de 500 [m], durante una hora y media. Para el caso de flujo libre los factores de mezcla son $\alpha_i = 0.6; i = 1, 2, 3$ y el flujo de entrada se fijó en $q_{in} = 1.0$ [veh/s]. Para el caso congestionado, los factores de mezcla son $\alpha_i = 0.4; i = 1, 2, 3$ y el flujo de salida se fijó en $q_{out} = 1.3$ [veh/s]. En ambos casos, durante la simulación se usó el diagrama fundamental que se muestra como una hipérbola en la Fig. 2. La velocidad de flujo

libre es 30 [m/s], la densidad crítica es 0.05 [veh/m] y la de estancamiento 0.2 [veh/m]. Las densidades iniciales se fijaron alrededor de 0.05[veh/m] y los estimados iniciales difieren en un 20-25% de los reales. La matriz K para el caso de flujo libre es

$$K = 1/500 \begin{pmatrix} 0.31 & 0 & 0 \\ 0.31 & 0.31 & 0 \\ 0 & 0.31 & 0.31 \\ 0 & 0 & 0.31 \end{pmatrix},$$

y para el caso congestionado

$$K = 1/500 \begin{pmatrix} 0.31 & 0 & 0 \\ 0.31 & 0.31 & 0 \\ 0 & 0.31 & 0.31 \\ 0 & 0 & 0.31 \end{pmatrix},$$

Las Figs. 4-7 muestran el flujo entre secciones y los errores de estimación de densidad, flujo y factores de mezcla para la simulación del caso de flujo libre. Las Figs. 8-11 muestran los mismos resultados para el caso de flujo congestionado.

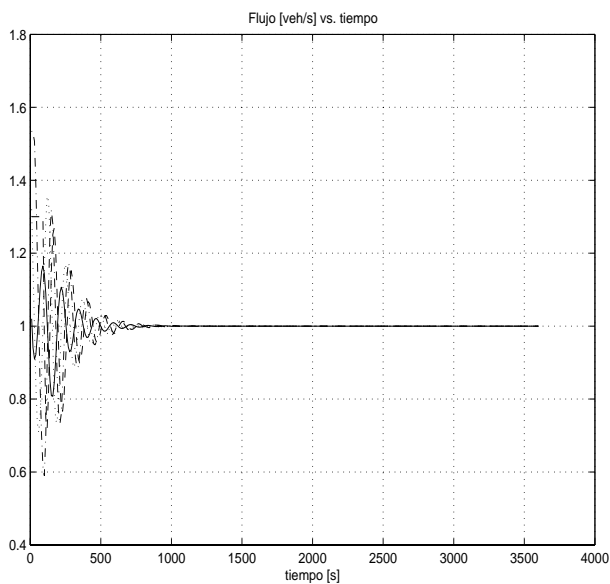


Fig. 4. Flujo libre: flujo vehicular (sección 1: continua, sección 2: punto, sección 3: punto-rama, sección 4: raya)

Es importante notar la relativa rápida convergencia del estimador de densidad en ambos casos: flujo libre y congestionado. Los errores de estimación en los factores de mezcla no convergen a cero, como puede esperarse, pues la señal de excitación es relativamente pobre en ambos casos. Sin embargo, estos errores no tienen efecto en los errores de estimación de flujo y densidad.

V. Conclusiones

Se describió un algoritmo para estimar la densidad vehicular en situaciones donde el sensor no tiene la localización necesaria o tiene fallas de funcionamiento. El esquema se basa en un modelo de conservación vehicular y supone la existencia de un diagrama fundamental para describir la relación velocidad-densidad vehicular. A partir

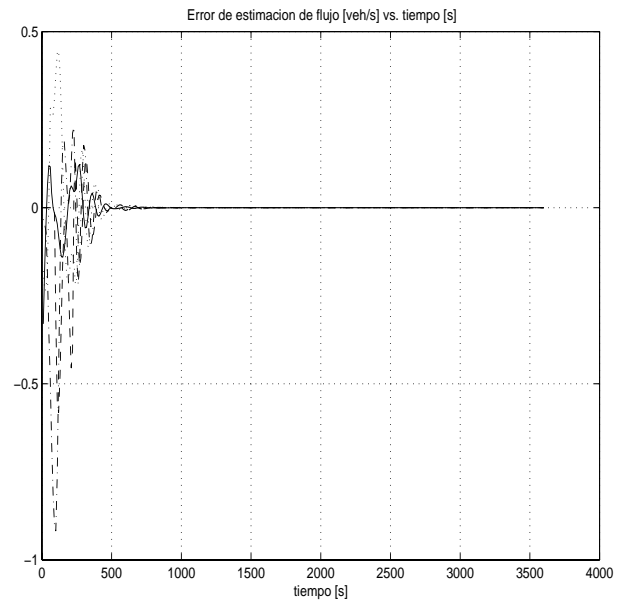


Fig. 5. Flujo libre: error de estimación de flujo (sección 1: continua, sección 2: punto, sección 3: punto-rama, sección 4: raya)

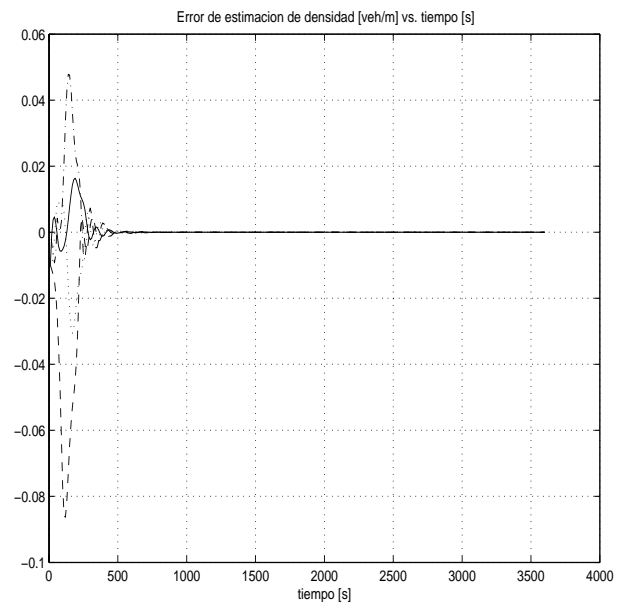


Fig. 6. Flujo libre: error de estimación de densidad (sección 1: continua, sección 2: punto, sección 3: punto-rama, sección 4: raya)

de esto, se propone un observador adaptable cuya estabilidad depende de la selección de una matriz de ganancias determinada por la condición de tráfico: flujo libre o congestionado. El esquema se probó por simulación y los resultados confirman los hallazgos analíticos. Es necesario ahora aplicar el algoritmo en escenarios más complejos y combinarlo con algoritmos de control de acceso.

Referencias

- [1] Pravin Varaiya. Smart cars on smart roads: problems of control. IEEE Transactions on Automatic Control, AC-38(2):195-207, 1993.
- [2] R. Horowitz and P. Varaiya. Control design of an automated highway system. Proceedings of the IEEE, 88:913-925, 2000.

- [3] M. Papageorgiou, J.-M. Blosseville, and H. Hadi-Salem. Modelling and real-time control of traffic flow on the southern part of Boulevard Peripherique in Paris: Part i: Modelling and part ii: Coordinated on-ramp metering. *Transportation Research A*, 24A(5):345–370, 1990.
- [4] M. Papageorgiou, H.S. Habib, and J.M. Blosseville. ALINEA: a local feedback control law for on-ramp metering control. *Transportation Research Record*, 1320:58–64, 1991.
- [5] H. Zhang, S.G. Ritchie, and W.W. Recker. Some general results on the optimal ramp control problem. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 4:51–69, 1996.
- [6] P. Li and A. Shrivastava. Traffic flow stability induced by constant time headway policy for adaptive cruise control vehicles. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 10:275–301, 2002.
- [7] S. Swaminathan and P. Li. Traffic flow stability induced by arbitrary adaptive cruise control policy. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 4101–4106, 2003.
- [8] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, USA, second edition, 1996.

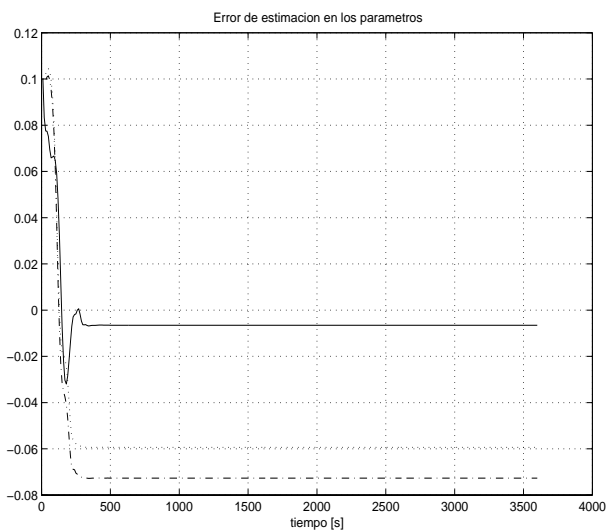


Fig. 7. Flujo libre: error de estimación paramétrica (sección 1: continua, sección 2: punto, sección 3: punto-rama, sección 4: raya)

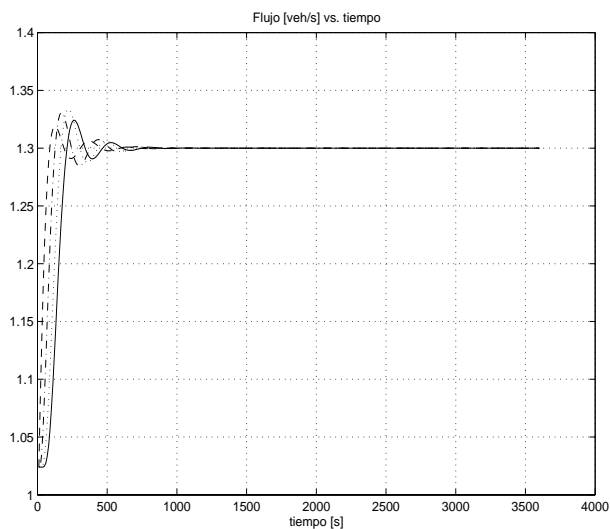


Fig. 8. Congestionado: flujo vehicular (sección 1: continua, sección 2: punto, sección 3: punto-rama, sección 4: raya)

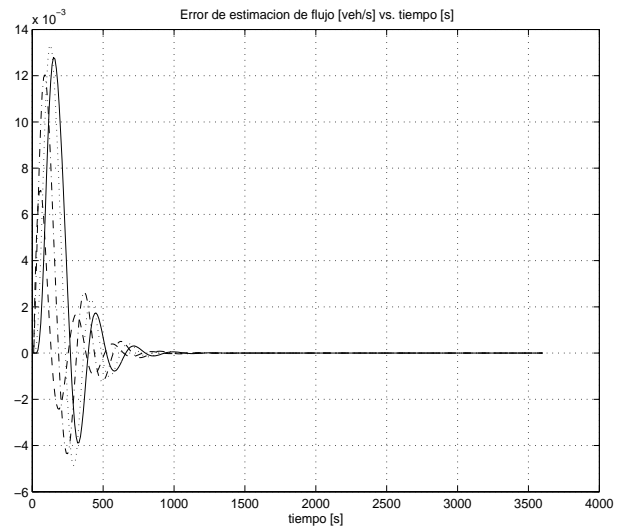


Fig. 9. Congestionado: error de estimación de flujo (sección 1: continua, sección 2: punto, sección 3: punto-rama, sección 4: raya)

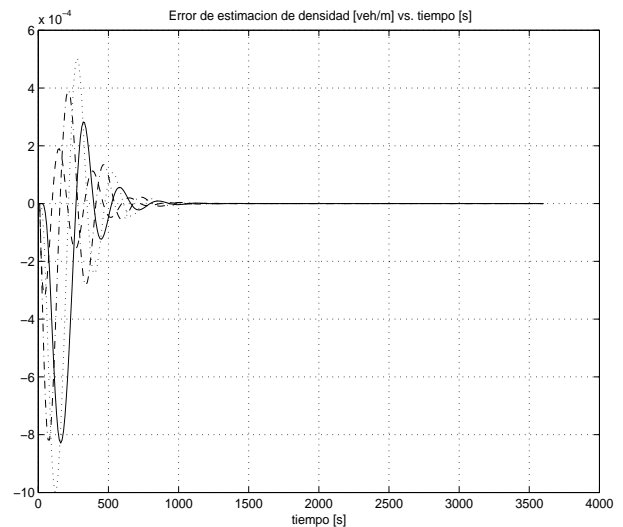


Fig. 10. Congestionado: error de estimación de densidad (sección 1: continua, sección 2: punto, sección 3: punto-rama, sección 4: raya)

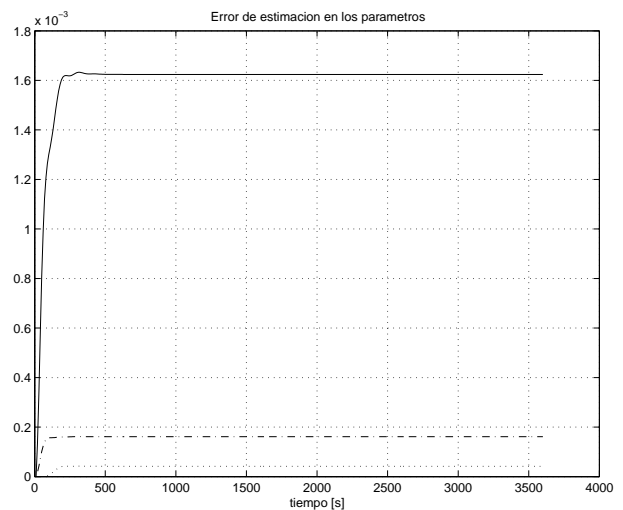


Fig. 11. Congestionado: error de estimación paramétrica (sección 1: continua, sección 2: punto, sección 3: punto-rama, sección 4: raya)