

Un Modelo para Compensar Efectos Externos en un Mecanismo

Marcial Jiménez López y Gustavo Rodríguez Gómez

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Luis Enrique Erro 1,
Santa María Tonanzintla, Puebla, Pue, México, Apdo. Postal 51 y 216, C.P. 72000.

Tel. (01222)2663100 Ext. 8307, 8317. Fax: 01(222) 266 31 52.

marjime@ccc.inaoep.mx, grodrig@inaoep.mx

Resumen

En este trabajo se presentan modelos matemáticos para analizar la precisión de un sistema mecánico con dos grados de libertad que realiza la función de lanzamiento de objetos. El mecanismo se encuentra sobre la plataforma de un barco en un estado estacionario influenciado únicamente por el oleaje del mar. A través de los modelos se analiza la compensación del mecanismo por el movimiento inducido por el oleaje. Las condiciones atmosféricas y el oleaje son tomados en cuenta en el modelado porque éstas influyen en la precisión de la expulsión del objeto. Los modelos que representan la compensación, el lanzamiento y el oleaje son acoplados y simulados. La simulación nos permite analizar la exactitud del objeto lanzado y la autenticidad de los resultados bajo condiciones cambiantes: diferentes situaciones atmosféricas y niveles de oleaje.

Palabras claves: Modelado, simulación, fuerza drag, fuerza de Corioles.

1. Introducción

A través de modelos matemáticos se puede describir la realidad, se pueden recrear situaciones cambiando parámetros sin llevar acabo los hechos reales, para analizar y estudiar la parte del mundo real que nos interesa. En este trabajo se lleva a cabo la simulación del sistema de compensación de un mecanismo que se encuentra sobre un barco, con el propósito de analizar la precisión de éste, cuando se hace el lanzamiento de un objeto en el mar. El mecanismo realiza la compensación en el mecanismo de lanzamiento debido al movimiento del barco provocado por el oleaje. Las condiciones atmosféricas y el oleaje son considerados en el modelo ya que influyen en la precisión del objeto expulsado. En particular para el lanzamiento del objeto se toman en cuenta las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre él.

Dos tipos de movimientos de oleaje son considerados: cabeceo y balanceo que deben corregirse en la etapa de compensación. Estos movimientos son originados por las olas en dirección longitudinal y transversal que pasan a través del barco.

Es de esperarse que bajo condiciones atmosféricas y niveles de mar elevados, no sea posible mantener

estable el mecanismo y realizar la expulsión de un objeto con la exactitud requerida. Con la ayuda del simulador se puede determinar la precisión del mecanismo dadas ciertas condiciones del medio donde se desarrollan, y analizar el error generado por la compensación del movimiento del barco, para efectuar las correcciones pertinentes.

2. Estado del Arte

Durante años se ha investigado y experimentado acerca del comportamiento de objetos lanzados en el aire, tales como: pelotas y proyectiles. Por un lado en los libros de texto de mecánica este problema se aborda únicamente desde la perspectiva del tiro parabólico en un plano fijo, donde las fuerzas que actúan sobre el objeto se presentan en forma simplificada [4]. La ciencia de la balística exterior desarrolla modelos del movimiento de los proyectiles en forma amplia, considerando las diferentes fuerzas que influyen en el movimiento de éstos [2], [10]. Lo cual nos da un buen punto de partida para el modelo de éste. Sin embargo, nuestro propósito es más general, ya que queremos integrarlo con los movimientos de balanceo y

Existen trabajos referente a la simulación del océano, donde se han desarrollado modelos basados en el oleaje. Cieutat y Gonzato desarrollan un modelo basado en el oleaje del océano para integrarlo en un simulador de tiempo real [5]. Lex Wolters, Gerard Cats, and Harry A.G. plantean modelos de circulación generales que describen la circulación de los océanos y los fenómenos atmosféricos como la temperatura, aire, humedad [7]. James Harvey Covington Jr. desarrolla el escenario y la implementación del océano a través de ecuaciones paramétricas [6]. De acuerdo a nuestro propósito, se retomaron algunas ideas de estos autores, tales como controlar la amplitud y frecuencia de las olas, para desarrollar el modelo que genera un oleaje en dirección longitudinal y transversal.

3. Metodología

Para resolver el problema completo se desarrollaron tres modelos llamados S1 *lanzamiento del objeto*, S2 *compensación del movimiento* y S3 *movimiento del mar*, como se muestran en la Figura 1. Éstos permiten simular el lanzamiento de un objeto a través de un mecanismo con dos grados de libertad, el cual se encuentra en la plataforma de un barco, influenciado por el oleaje del mar.

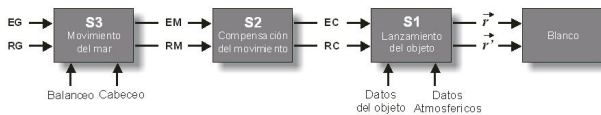


Figura 1: Sistema propuesto.

donde

- EG y RG son los valores iniciales en x y y del mecanismo,
- EM y RM son los valores con variaciones debido al movimiento del mar,
- EC y RC son los los valores compensados,
- \vec{r} y \vec{r}' son los vectores desplazamiento y velocidad del objeto.

Para validar la autenticidad de los resultados de la simulación en el lanzamiento del objeto, se presentan comparaciones con valores de tablas de rango [9].

3.1. Modelo S1: Lanzamiento del objeto

Para S1 se emplean ángulos pequeños en elevación, ya que el engranaje del mecanismo impide aumentar la precisión en los lanzamientos, este problema se describe en la sección 3.2.

La variación en el ángulo de tiro que se maneja en las pruebas de simulación va de 2.05° a 5.15° , permitiendo manejar un rango de alcance de 2.7 km a 4.3 km (3000 yds a 4700 yds).

El modelo para el lanzamiento del objeto está representado por la siguiente ecuación

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{2} \rho S C_D \vec{V} |V| - 2m(\omega \times \vec{V}) - m\vec{g} \quad (1)$$

donde

- m = masa del objeto,
- \vec{V} = vector velocidad del objeto,
- $|V|$ = magnitud escalar del vector velocidad,
- t = tiempo,
- $\frac{d\vec{V}}{dt}$ = vector aceleración,
- ρ = densidad del aire,
- S = área de referencia del objeto,
 $S = \frac{\pi d^2}{4}$, d es el diámetro,
- C_D = coeficiente de drag,
- ω = 0.00007292 rad/seg, velocidad angular de la tierra,
- \vec{g} = vector aceleración de la gravedad.

El modelo analiza la resistencia originada por el aire, también conocida como *fuerza drag*, la fuerza de Corioles [1, 4] y el peso, como se muestra en la Figura 2.

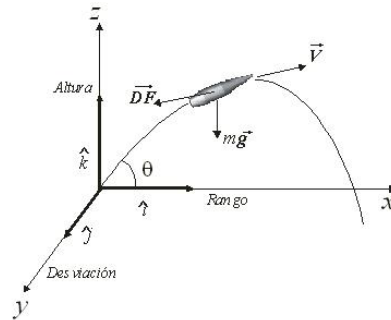


Figura 2: Fuerzas que actúan sobre el objeto.

Dividiendo por m la ecuación (1) y separando las componentes de los vectores se obtiene, después de algunas manipulaciones algebraicas, el modelo matemático del lanzamiento del objeto representado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{1}{2} \rho S C_D \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \dot{x} - 2\omega(\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda), \\ \ddot{y} &= \frac{1}{2} \rho S C_D \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \dot{y} - 2\omega(\dot{x} \sin \lambda), \\ \ddot{z} &= \frac{1}{2} \rho S C_D \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \dot{z} + 2\omega(\dot{x} \cos \lambda) - g, \end{aligned}$$

donde $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ y $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ son las componentes del vector aceleración y el vector velocidad respecto a los ejes x, y, z respectivamente. El parámetro λ es el ángulo formado por la vertical y el eje de rotación angular ω .

Reduciendo el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden anterior a un sistema de seis ecuaciones de primer orden, por medio del cambio de variables estándar [3], es posible encontrar la solución numérica del modelo matemático del lanzamiento del objeto. Las condiciones iniciales empleadas son $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ y $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (0, V_0 \cos \theta, V_0 \sin \theta)$; ver Figura 3.

Respecto al coeficiente del drag C_D , este varía con el número de Mach y puede determinarse como una función del número de Reynolds, Re . Este número es importante para definir el comportamiento de un fluido y en particular, la transición del flujo laminar al turbulento. Cuando Re se encuentra en el intervalo $1000 < Re < 200,000$, el coeficiente del drag tiende a ser constante [8]: $C_D \approx 0.4$, valor que, en general, es empleado en el modelo.

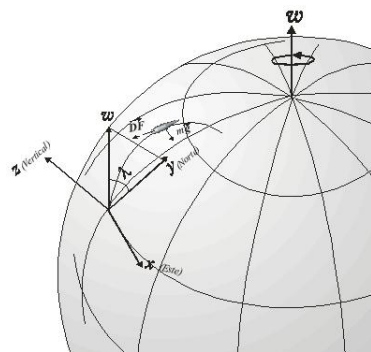


Figura 3: Sistema de referencia.

3.2. Modelo S2: Compensación del movimiento

Uno de los principales inconvenientes que se presentan en el mecanismo es debido al engranaje, cuya resolución es de 0.05° . Esto es un problema cuando el blanco se encuentra a varios kilómetros de distancia porque se requiere de una mayor precisión para el ángulo de tiro.

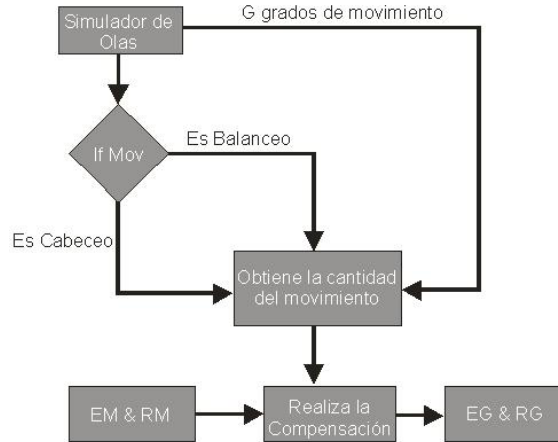


Figura 4: Compensación.

En la Figura 4 se muestra un diagrama del proceso que se realiza para la etapa de compensación. El tipo de movimiento en el oleaje es dado por el usuario y el modelo devuelve la cantidad en grados a la que se está moviendo el barco. La compensación debido al cabeceo EC se calcula por la siguiente ecuación

$$EC = EM - G$$

donde

- EM es el valor debido al oleaje del mar.
- G es la cantidad de inclinación en grados.

El movimiento de balanceo presenta un grado de dificultad mayor, ya que éste no puede ser llevado a la posición original porque el mecanismo únicamente puede llevar a cabo desplazamientos en el plano yz como se muestra en la Figura 5.

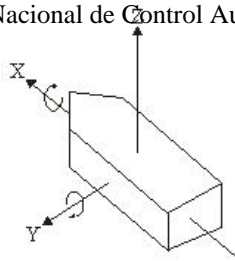


Figura 5: Dirección de la inclinación debido al oleaje.

Suponiendo que el movimiento se realiza sobre el eje x , se puede emplear la siguiente matriz de rotación, para orientar el mecanismo a la posición deseada

$$\begin{bmatrix} \cos G & 0 & \sin G \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin G & 0 & \cos G \end{bmatrix}$$

donde

G es la magnitud de la inclinación en grados.

Es posible que bajo las condiciones iniciales dadas no se dé al blanco con la exactitud requerida, por consiguiente es necesario realizar correcciones en las condiciones de inicio. En este trabajo presentamos un procedimiento que permite corregir la condición inicial representada por un ángulo de tiro θ . Es decir, dado el ángulo inicial θ_0 se determina un nuevo ángulo θ que se aproxime al blanco con un mínimo error dada la distancia a la que se encuentre. La corrección en el ángulo se hace a través del mismo sistema de ecuaciones, bajo el esquema que se muestra en la Figura 6.

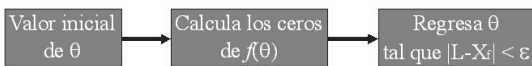


Figura 6: Corrección del ángulo de tiro a través de los ceros de la función.

donde

- L = Es la distancia al blanco.
- f = Modelo matemático del lanzamiento
- X_f = Es la longitud al blanco calculada a partir de un valor del ángulo de tiro.

Este proceso consiste en dar un ángulo inicial θ_0 y la distancia al blanco L , encontrar el ángulo tal que el

valor obtenido de X_f al evaluar $f(\theta)$ sea aproximadamente igual a L . Esto se consigue a través de los ceros de la función representado por el modelo $f(\theta)$ empleando rutinas numéricas de Matlab como $fzero$, donde la condición de paro, para la función $f(\theta)$ esta dado por $|L - X_f| < \epsilon$, donde ϵ es un parámetro dado por el usuario, conforme a su exactitud requerida.

3.3. Modelo S3: Movimiento del mar

Para simular el movimiento de las olas del mar ya sea balanceo o cabeceo se emplea una cicloide [6]. Las ecuaciones paramétricas que definen el modelo para el oleaje están dadas por:

$$\begin{aligned} EM &= at - h \sin t, \\ RM &= a - h \cos t, \end{aligned}$$

donde

- EM Representa al oleaje en dirección transversal.
- RM Representa al oleaje en dirección longitudinal.

Estas ecuaciones dependen del tiempo, los parámetros a y h permiten controlar la frecuencia de las ondas y la amplitud de estas.

La cicloide permite generar un oleaje uniforme, facilitando simular el movimiento del barco, balanceo o cabeceo, y realizar la compensación del movimiento que éste pueda tener.

4. Implementación

Se emplea RoboWorks ¹ como ambiente visual para el usuario. Este software incluye RoboTalk el cual puede ser utilizado para comunicarse con otros programas tales como C++, Labview y Matlab, y controlar la simulación desde estos ambientes. Se opto por emplear a Matlab por su flexibilidad en el uso para introducir los datos, controlar la simulación y para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de los modelos matemáticos propuestos, ya que cuenta con una gran variedad de métodos numéricos, y el manejo de M-files para programar los DLLs (bibliotecas de vínculos dinámicos) necesarias para controlar

¹ RoboWorks es un ambiente de simulación y animación. Permite animar y construir interactivamente modelos en 3D

Memorias del Congreso Nacional de Control Automático 2003, tales como: posición del blanco, posición del objeto lanzado, el oleaje, los movimientos del mecanismo, entre otras.

Bajo el esquema mostrado en la Figura 1. se realiza la integración de los bloques, para formar el sistema completo. La Figura 7 muestra una vista del sistema operado por el usuario.

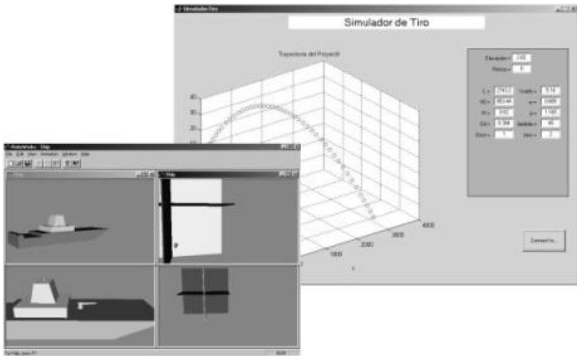


Figura 7: Sistema completo.

El proceso que se sigue para ejecutar la simulación se muestra a través del siguiente procedimiento:

- Cargar los datos de inicio introducidos por el usuario, tales como: la distancia al blanco, tiempo de trayecto del objeto, velocidad inicial, masa y radio del objeto, densidad del aire para una atmósfera estándar, el valor del C_d , el tipo de movimiento el cual puede ser 1=Cabeceo, 2=Balaneo y el ángulo de tiro.
- Realizar el cálculo para la corrección del ángulo y realizar el ajuste a 0.05° .
- Evaluar el sistema de ecuaciones diferenciales del modelo S1 con el ángulo corregido y ajustado.
- Evaluar las ecuaciones paramétricas con los datos iniciales: frecuencia y amplitud de las olas.
- Realizar la conexión con el ambiente de simulación, para generar la animación

5. Resultados de Simulación

La Tabla 1 muestra los resultados obtenidos por el modelo suponiendo que el viento sopla en dirección longitudinal y opuesta al objeto, empleando tablas

de rango [9] como parámetro de comparación contra los modelos. En la primera columna se indica la distancia (yardas) a la que se encuentra el blanco. En la quinta columna se indica el alcance que tendrá el proyectil de acuerdo a los datos de las tablas de rango (datos experimentales). La cuarta columna muestra el alcance obtenido por el modelo. Finalmente, la última columna indica el error que existe entre el modelo y las tablas de rango. Como se observa en la Tabla 1, en las pruebas de simulación se obtienen errores relativos pequeños, lo que muestra una buena aproximación de los modelos con el objeto simulado.

Alcance yds.	Ángulo tiro	Tiempo seg.	Valor modelo	Valor tabla	Error en %
3000	2.02	5.14	2999	2987	0.019
3100	2.14	5.41	3080	3086	0.628
3200	2.28	5.69	3197	3185	0.082
3300	2.42	5.97	3308	3283	0.263
3400	2.57	6.26	3413	3382	0.411
3500	2.73	6.56	3515	3480	0.435
3600	2.90	6.86	3611	3578	0.319
3700	3.06	7.17	3704	3677	0.118
3800	3.23	7.48	3793	3775	0.186
3900	3.41	7.80	3906	3873	0.162
4000	3.60	8.13	3987	3971	0.324
4100	3.80	8.46	4091	4069	0.223
4200	4.00	8.79	4189	4168	0.254
4300	4.21	9.13	4307	4266	0.159
4400	4.43	9.48	4393	4364	0.083
4500	4.65	9.84	4503	4461	0.069

Tabla 1: Comparación entre el modelo y las tablas de rango.

6. Conclusiones y Trabajo Futuro

Los resultados experimentales demuestran la validez de los modelos desarrollados en función del propósito del trabajo: simular la compensación para analizar la precisión del objeto lanzado al objetivo, con el propósito de corregir los parámetros iniciales en x , y del mecanismo antes de llevar a cabo un lanzamiento.

En el caso del modelo S1 para el lanzamiento del objeto las fuerzas tomadas en cuenta son: la fuerza drag y la fuerza de Corioles, debido a las restricciones que existen en el mecanismo de lanzamiento que impide emplear ángulos de tiro mayores. Al contar con un mecanismo más fino es necesario considerar las otras fuerzas de alzamiento, Magnus, Normal y tener en cuenta el caso de la gravedad variable.

Memorias del Congreso Nacional de Control Automático, 2003, el ángulo de tiro para lograr lanzamientos con mayor exactitud. Dado el número de ecuaciones diferenciales ordinarias presentes en el modelo, seis, el procedimiento se ejecuta en tiempo aceptable.

En la práctica este simulador puede ser empleado para validar el funcionamiento de futuras y nuevas versiones de mecanismos de lanzamiento.

Además, el simulador puede ser empleado para propósitos de investigación y educativos ya que se pueden experimentar diferentes situaciones atmosféricas y niveles de mar, para analizar y estudiar el comportamiento de un objeto lanzado.

Los resultados obtenidos hasta el momento involucran un viento que opone a la dirección del objeto, la variación del viento en cualquier ángulo no se considera.

Referencias

- [1] ANDERS PERSSON; *How Do We Understand the Coriolis Force?*; American Meteorological Society; 1998.
- [2] ANTHONY J. CALISE, HESHAM A. EL-SHIRBINY; *An Analysis of Aerodynamic Control for Direct Fire Spinning Projectiles*; The American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc; AIAA 2001-4217; 2001.
- [3] DAVID A. SÁNCHEZ; *Ordinary Differential Equations and Stability Theory: An Introduction*; Dover Pubns, 1979.
- [4] GEORGE L. CASSIDAY AND GRANT R. FOWLES; *Analytical Mechanics*; Brooks Cole, 6th edition; 1998.
- [5] J. M. CIEUTAT AND J. C. GONZATO; *A new efficient wave model for maritime training simulator*; Realistic animation of liquids. In Graphics Interface; 1996.
- [6] JAMES HARVEY COVINGTON JR; *Implementing an Open Ocean Theater in npsnet*; Thesis - NAVAL POSTGRADUATE SCHOOL Monterey, California; 1994.
- [7] LEX WOLTERS, GERARD CATS, AND HARRY A.G. WIJSHOFF; *Programming Environments for Atmosphere and Ocean Circulation Simulation on Massively Parallel*

Computers; in the Proceedings of the DPRI Symposium, Boston; 1992.

- [8] MARCO PILOTTI, GIOVANNI MENDUNI, DIAR; *Beginning of sediment transport of incoherent grains in shallow shear flows*; Journal of Hydraulic Research; VOL,39, NO,2; 2001.
- [9] RANGE TABLE; *Technician Report*; Ordnance Pamphlet 867B; 1945.
- [10] ROBERT MCCOY; *Modern Exterior Ballistics: The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles*; Schiffer Military History; 1999.